Radka Smýkalová
Středověký zrod trigonometrických veličin

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 3, 143–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150586

STŘEDOVĚKÝ ZROD TRIGONOMETRICKÝCH VELIČIN

Radka Smýkalová

Podle internetové encyklopedie Wikipedie je středověk tradiční označení dějinné epochy mezi koncem starověku a antické civilizace a začátkem novověku. Tento název se poprvé objevil v období renesance. Středověk je obvykle ohraničen pádem Západořímské říše v roce 476 a objevením Ameriky Kryštofem Kolumbem roku 1492 či zveřejněním 95 tezí Martinem Lutherem roku 1517.

Již dlouho před pátým stoletím našeho letopočtu se začala matematika rozvíjet na dalekém Východě – v Číně a Indii. Tato vývojová etapa dále pokračovala v arabských zemích, v Íránu a ve Střední Asii, později v Evropě a asi v 15. století až 16. století spěla ke svému konci.

Přibližně tísíc let středověku prošly ať už existující či nově vznikající oblasti matematiky velkým vývojem (jazyk, pojmy, postupy, symbolika). Nejinak tomu bylo i v oblasti našeho zájmu, v trigonometrii. Tabulky tětiv, díky nimž byli starověcí astronomové schopni dopočítat úhly i délky stran pravoúhlého trojúhelníka, ustupovaly do pozadí. Objevovaly se vhodnější trigonometrické veličiny (jako například *sinus* nebo *tangens*), které byly po řadu staletí chápány jako *délky*, později jako *poměry*, *podíly čísel* (zlomky) a konečně jako *čísla*. I názvy a symboly pro nové trigonometrické veličiny prošly složitým vývojem. Málokdo ví, že až učenci raného novověku dali těmto veličinám označení, které přetrvalo až do dneška.

Velké uplatnění v astronomii a kartografii a potřeba stále přesnějších tabulek motivovaly mnohé středověké vzdělance k novým a stále hlubším zkoumáním, jaké obecné vlastnosti mají závislosti, které trigonometrické veličiny vyjadřují. Jejich výsledky pak na přelomu patnáctého a šestnáctého století vedly ke vzniku teorie goniometrických funkcí, které se analytickou cestou definitivně „odpoutaly“ od svých staletých nositelů – délek stran a velikostí úhlů trojúhelníků. Pro geometrické výpočty se význam těchto funkcí nijak nesnížil, ba naopak. Analytické prostředky tyto výpočty (nadále v praxi vysoce potřebné a žádané) ještě více zefektivnily.

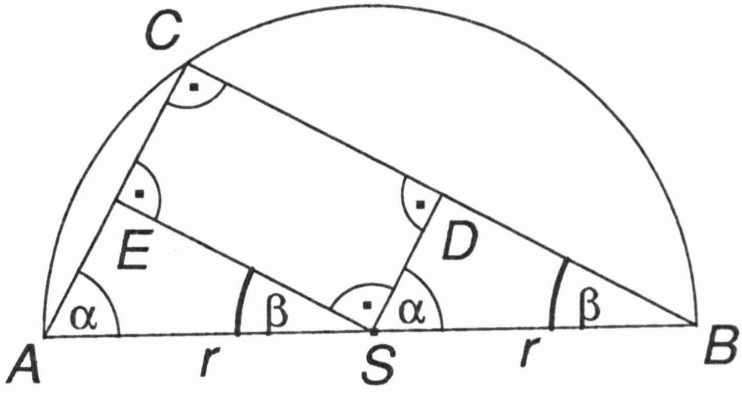
Zaměříme se nyní na dvě asijské oblasti a uvedené nejdůležitější stránky vývoje středověké trigonometrie doplníme o konkrétní přínosy jednotlivých osobností. Přestože objektem našeho zájmu je především trigonometrie rovinná, nezapomeneme ani na trigonometrii sférickou, která byla rovněž intenzívně rozvíjena. Mnohá stěžejní díla té doby jsou provázaným výkladem metod výpočtů v rovinných i sférických trojúhelnících.

Trigonometrie v Indii

V oblasti trigonometrie se Indové opírali o práce helénistických autorů, ale přinesli také mnoho nového. Nejvíce čerpali z poměrně rozvinuté trigonometrie tětiv od Ptolemaia. Vzpomeňme, že jeho tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který vymezuje. Řešení libovolného rovinného trojúhelníku pomocí Ptolemaiovy tabulky bylo však velice zdlouhavé, což vedlo indické učence k zavedení nových trigonometrických veličin. První a nejdůležitější byla veličina *sinus*. Díky ní se již s tětivami při řešení trojúhelníků setkáváme velice málo, neboť poloviční délka tětivy oblouku φ je rovna sinu oblouku $\frac{\varphi}{2}$. Ilustrujme nyní poloviční délky tětiv v kružnici o daném poloměru r pomocí obrázku 1. Za předpokladu, že poloměr kruhu se rovná jedné a při označení $\alpha = |\measuredangle BAC|$ definujeme po vzoru Indů veličiny *sinus* a *kosinus* příslušné úhlu α rovnostmi

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}|BC| = |BD| = |SE|, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}|AC| = |AE| = |SD|.$$

Po zavedení úhlu $\beta = |\measuredangle ABC| = 90^\circ - \alpha$ okamžitě dostáváme rovnosti $\sin\beta = \cos\alpha$ a $\cos\beta = \sin\alpha$.



Obrázek 1 Délky polovičních tětiv

Je nutné zdůraznit, že těmto dvěma novým *délkovým* veličinám, které Indové používali pouze pro úhly z intervalu $\langle 0, 90°\rangle$, říkáme dnešním způsobem *sinus* a *kosinus* a jejich hodnoty značíme $\sin\alpha$, resp. $\cos\alpha$, i když to je korektní pouze v případě poloměru $r = 1$. Sami Indové pro tyto veličiny měli své názvy, které následně prošly dlouhým historickým vývojem. Zmíníme se o něm o pár řádků níže.

Z provedené úvahy o dvojicích úhlů α, β z obr. 1 plyne, že sinus a kosinus jsou dva exempláře veličiny téhož druhu („poloviční tětivy"), což přesněji zapíšeme rovností

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Otázka zní, proč je tedy Indové vůbec rozlišovali a nevystačili si s jednou veličinou, jako si dříve Ptolemaios vystačil s $\operatorname{tet}\alpha$, délkou tětivy příslušnou středovému úhlu α? *Dvojice* sinus, kosinus umožnila Indům vyjadřovat jednodušeji vztahy mezi stranami a úhly pravoúhlého trojúhelníku a také různé důležité vzorce, jako například vztah pro „sinus poloviny oblouku"

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r(r - \cos\alpha)}{2}}$$

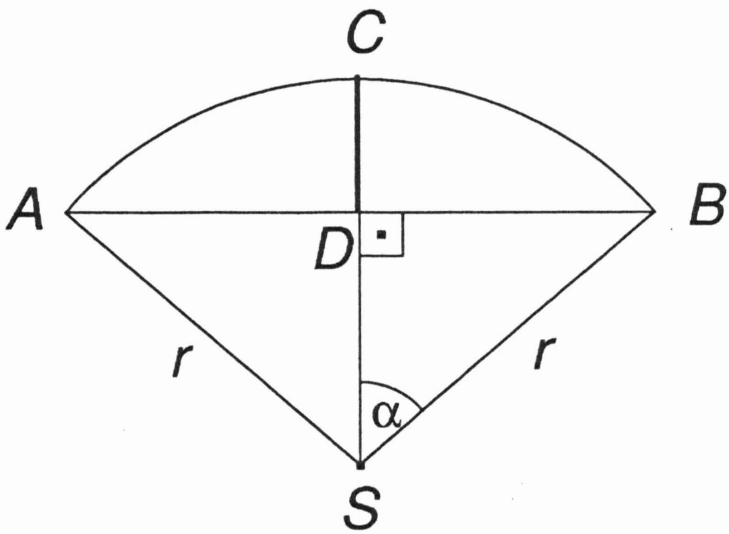
či vzorce pro „sinus součtu a rozdílu"

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{r},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{r}.$$

(Pro nás neobvyklý jmenovatel r je namístě, neboť trigonometrické veličiny byly tehdy chápány jako *délky*.) Všechny tyto vztahy Indové popisovali slovně bez jakékoliv algebraické symboliky, navíc při poloměru r různém od 1. Představme si další komplikaci, kdybychom každé užití hodnoty $\cos\alpha$ museli nahradit popisem výpočtu $\sin(90° - \alpha)$, nejčastěji zřejmě pomocí výrazu $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$! Další historie matematiky ukázala, že zrod indických „dvojčat" sinus a kosinus byl opravdu šťastnou událostí – díky nim dnes elegantně vyjadřujeme nejenom třeba sinovou a kosinovou větu z planimetrie trojúhelníku, ale také hodnoty exponenciální funkce v oboru komplexních čísel.

Je překvapující, že podle [5] v dobách středověkých považovali matematici za druhou (po sinu) nejdůležitější trigonometrickou veličinu nikoliv kosinus, ale dnes již téměř zapomenutý *sinusversus*, délku úsečky *mezi tětivou a obloukem*. Za předpokladu $r = 1$ a při označení $\alpha = \frac{1}{2}|\measuredangle AOB|$ je veličina sinusversus příslušná úhlu α znázorněna na obr. 2 délkou úsečky CD, tedy $\operatorname{sinvers}\alpha = |CD|$. Význam této veličiny byl v řadě trigonometrických aplikací větší



Obrázek 2 Délka sinusversus

než význam kosinu, neboť např. v zeměměřictví a stavitelství odedávna patřily k základním početním údajům *výšky úsečí* a *vzepětí oblouků* (angl. *versed sines*). I když podle obrázku 2 zřejmě platí

$$\operatorname{sinvers}\alpha = |CD| = |SC| - |SD| = r - \cos\alpha,$$

i tento jednoduchý převodní vztah by v namáhavé praxi středověkých výpočtů znamenal další (tedy nežádoucí) početní operaci (o to více komplikovanou v pozdější epoše výpočtů s logaritmy). Proto byly hodnoty $\operatorname{sinvers}\alpha$ tabelizovány, zejména pro malá α s přesností větší než hodnoty sinů a kosinů, protože bylo navíc zásadní otázkou, nakolik se hodnota $\operatorname{sinvers}\alpha$, řádově menší než $\sin\alpha$, přibližuje k nule. V dnešní počítačové době ztratily tyto numerické argumenty svoji váhu, a tak funkci $1 - \cos\alpha$ nadále nějak pojmenovávat zcela pozbylo smyslu.

Jak jsme v předchozím slíbili, promluvíme krátce o etymologickém vývoji termínů sinus, kosinus a sinusversus. S těmito veličinami (ovšem pod jinými názvy) se setkáváme již v anonymních astronomických dílech *Siddhántas* a také ve veršovaném astronomickém a matematickém traktátu *Árjabhattíja*, který byl sepsán roku 499 třiadvacetiletým Árjabhattou. Árjabhatta zde používal slovo *arddhadžíva* pro délku poloviny tětivy – pro veličinu sinus. Později zkrátil název na pouhé *džíva*. Když arabští učenci přeložili dílo *Árjabhattíja*, indický termín změnili na *džiba*, následně na skutečné arabské slovo *džaib*, tj. ňadra, výstřih, vypuklost atd. Ve dvanáctém století bylo při překladu z arabštiny do latiny použito slovo *sinus*, které mělo týž základní význam jako *džaib*. Zkrácený zápis *sin* se poprvé objevil u anglického profesora astronomie Edmunda Guntera (1581 – 1626).

Veličinu kosinus nazýval Árjabhatta *kótidžíva*, tj. sinus zbytku (doplňku do 90°). Slovo *kótidžíva* bylo přeloženo do arabštiny jako *džaib al-tamam* a následně do latiny ve dvanáctém století jako *sinus residui*. V patnáctém století se objevuje u Peurbacha (1423 – 1461) a Regiomontana (1436 – 1476) označení *sinus complementi*, tj. sinus doplňku, ze kterého s největší pravděpobodností vznikl záměnou pořadí a zkrácením náš dnešní *cosinus*, který Edmund Gunter na přelomu šestnáctého a sedmnáctého století zapisoval jako *co.sinus*. Zkratka *cos* se poprvé objevila roku 1674 u anglického matematika a geometra Jonase Moora (1617 – 1679).

Slovem *utkramadžíva* nazývali Indové sinusversus. Když ve dvanáctém století začali učenci používat latinské termíny všech trigonometrických veličin, mezi nimiž byl i *sinusversus*, pro termín sinus (aby ho odlišili od sinusversu) měli název *sinus rectus*, tj. přímý sinus a poloměr kružnice nazývali *sinus totus*, tj. úplný sinus. Tento poslední termín se udržoval v evropských dílech věnovaných trigonometrii až do dob Eulera, který svými pracemi definitivně prosadil pro poloměr trigonometrické kružnice hodnotu $r = 1$.

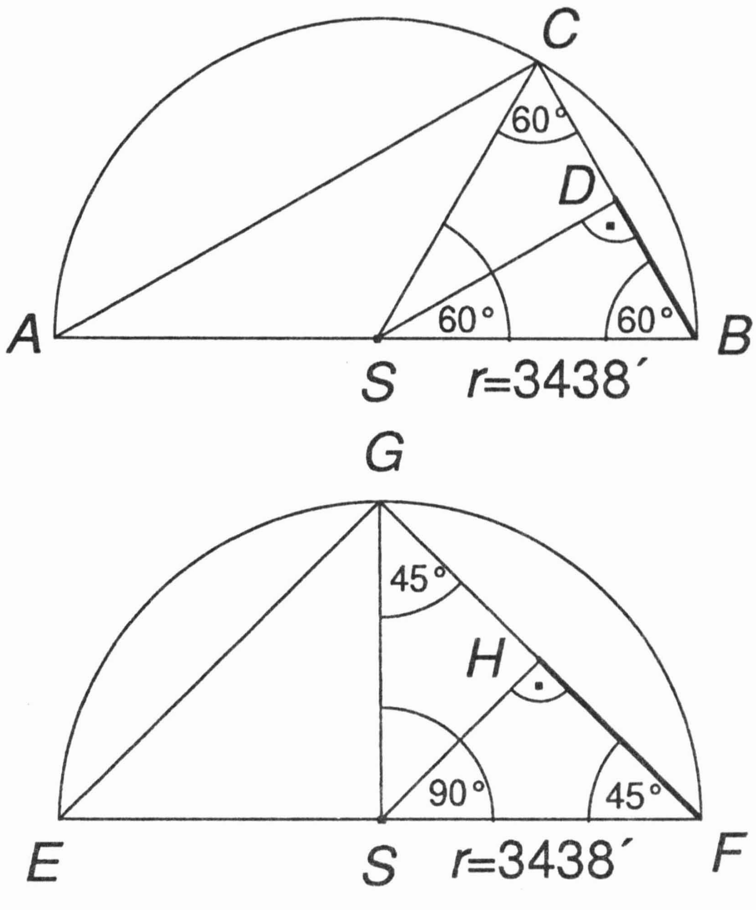
Při hodnocení přínosu indických vědců pro trigonometrii nesmíme zapomenout na tabulky trigonometrických veličin, bez kterých by byla tato věda prakticky nepoužitelná. První tabulka sinů a sinusversů se nalézá v anonymní astronomické práci ze 4. a 5. století *Súrja Siddhánta* a v díle *Árjabhattíja*. V práci *Árjabhattíja* jsou uvedeny hodnoty obou těchto veličin pro úhel $3{,}75° = 225$ a jeho celočíselné násobky. Porovnáním s tabulkami od Ptolemaia můžeme konstatovat, že první indické tabulky nedosahovaly přesnosti Ptolemaiova *Almagestu*.

Dříve než se zaměříme na způsob výpočtu tabulek, promluvíme o jisté zvláštnosti *míry* (jednotek, ve kterých tyto délky vyjadřujeme celými čísly nebo zlomky) trigonometrických veličin. Stejně jako ve starověkém Řecku, také Indové dělili kruh na 360 stupňů neboli 21600 (úhlových) minut. Vzpomeňme na Ptolemaia, který průměr kruhu rozdělil na 120 stejných jednotkových dílů (délky 1^d), takže poloměr kruhu měl velikost $r = 60^d$. Těmito díly a jejich šedesátinnými zlomky potom Ptolemaios vyjadřoval délky tětiv. Většina indických vědců však stejnou míru u trigonometrických veličin nepoužívala, ne jinak tomu bylo u autorů již zmíněných *Siddhántás* a *Árjabhattíja*. Ti šli ve stopách Hipparcha. Zda se jim více zamlouvaly Hipparchovy myšlenky, nebo se jim Ptolemaiův *Almagest* do rukou dostal později než spisy Hipparchovy, se můžeme jen domýšlet. Hipparchos vyjadřoval trigonometrické veličiny a délky oblouků pomocí stejné jednotky – uváděl je v (úhlových) minutách. Tuto jednotku délky určil tak, že položil poloměr kruhu rovný 3438 minutám ($r = 3438$). K tomuto číslu patrně dospěl ze vzorce pro obvod kruhu $o = 2\pi r = 360° = 360 \cdot 60$. Pro zajímavost ze vzorce vyjádříme a pro hodnotu $r = 3438$ vyčíslíme konstantu π:

$$\pi = \frac{21600}{2r} = \frac{21600}{2 \cdot 3438} = 3{,}141361\ldots$$

Vidíme, že chyba je až na místě desetitisícin.

Způsob, jakým indičtí učenci tabulky sestavovali, není nikde



Obrázek 3 $\sin 30° = |BD|$ a $\sin 45° = |FH|$

autenticky popsán. S největší pravděpodobností po vzoru Hipparcha nejdříve zjistili hodnoty $\sin 90°$, $\sin 30°$ a $\sin 45°$. Hodnota $\sin 90° = 3438$ byla zřejmá, jelikož je to právě polovina délky tětivy oblouku o velikosti $180°$, tedy poloměr r. Hodnota $\sin 30° = 1719$ je poloviční délka poloměru a hodnota $\sin 45° = 2431$ byla spočítána z Pythagorovy věty pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, viz obr. 3. Následně hodnoty sinů pro další úhly do tabulek Indové doplnili pomocí jim známého vztahu pro sinus polovičního oblouku (který jsme uvedli výše), až dospěli k hodnotě $\sin 3{,}75°$. Poté počítali siny doplňků těchto úhlů a polovin těchto doplňků atd.

Do 12. století žádný indický astronomický text neobsahoval tabulky trigonometrických veličin pro úhly menší než 3,75°. Podstatně přesnější tabulky sinů s nejmenším úhlem 1° sestavil až Bháskara (1114 – ?), který počítal se stejnou hodnotou poloměru $r = 3438$ a položil $\sin 1° = 60$. Využil tedy přiblížení $\sin\alpha \approx \alpha$, které, jak je známo, platí pro malá α právě v obloukové míře.

Praktické úlohy, které Indové řešili, byly věnované měření vzdáleností a výšek pomocí vertikální tyče – gnómonu a pomocí podobnosti. Gnómon a jeho projekce (stín) tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, vedou tedy k trigonometrickým úlohám. Početní stránka těchto úloh předcházela zavedení veličin *tangens* a *kotangens*. Setkáváme se však s nimi až v první polovině 9. století v dílech učenců arabského chalifátu.

Trigonometrie v arabských zemích

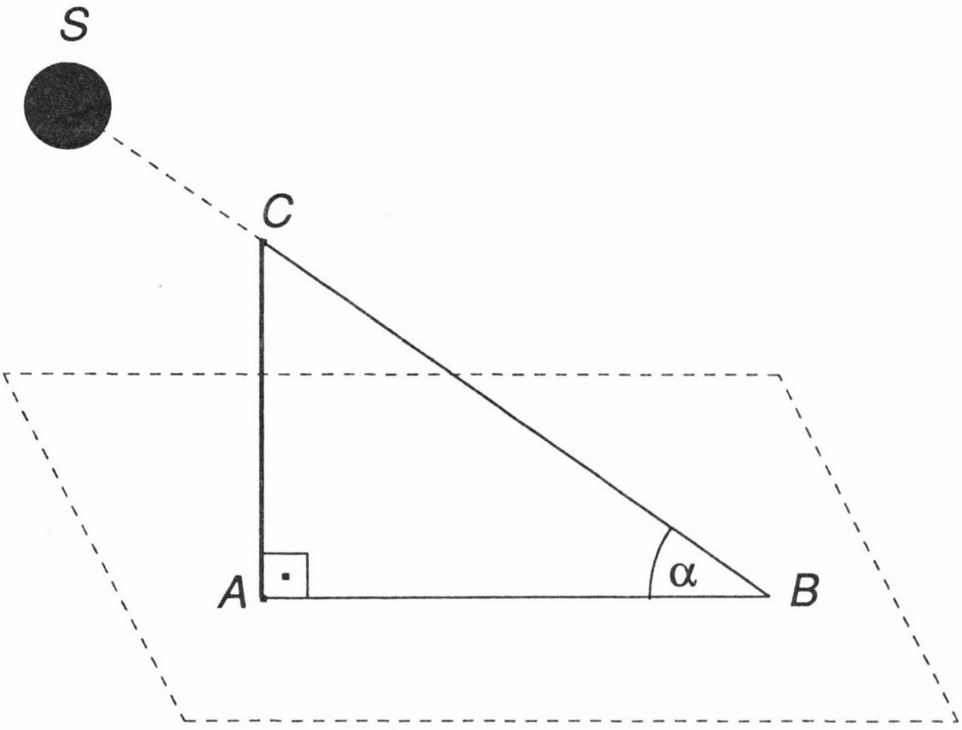
Arabská matematika byla nejvíce ovlivněna matematikou mezopotámskou, řeckou a indickou. Z indické matematiky převzala zápis čísel a algoritmy pro písemné počítání, z řecké matematiky abstraktní geometrii a myšlenku axiomatické výstavby matematiky, z mezopotamského a egyptského světa převzala tradici numericky náročných výpočtů a především důraz na užití matematiky v praktickém životě. Desítkový poziční systém pronikal pomalu na Blízký východ a byl používán vedle domácích systémů.

Pro rozvoj matematiky měla základní význam hlavní přírodní věda té doby – astronomie. Není tedy divu, že stejně jako v Indii, rovněž v islámských zemích byli matematikové většinou i astronomy. Článkem, který spojoval matematiku a astronomii, byla právě trigonometrie.

Základ arabských trigonometrických znalostí tvořila díla předchůdců starších kultur – jedna z indických *Siddhántas*, Ptolemaiův

Almagest a Menelaova *Sférika*. Inspirováni jejich výsledky a metodami zavedli arabští učenci některé nové trigonometrické pojmy, prozkoumali vlastnosti trigonometrických veličin a vyřešili všechny případy rovinných a sférických trojúhelníků. Tím postupně propracovali trigonometrii jako samostatnou oblast matematiky.

Přistupme k tomu hlavnímu, čím konkrétním přispěli arabští učenci k rozvoji trigonometrie – zavedli nové veličiny *tangens*, *kotangens* a také *sekans* a *kosekans*. Tyto trigonometrické veli-

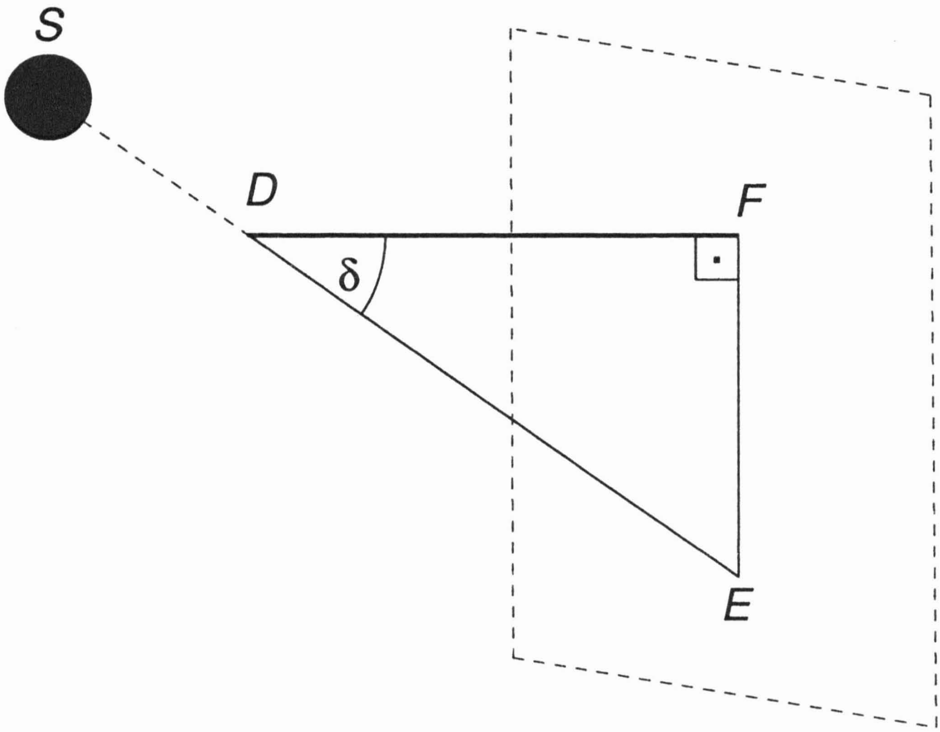


Obrázek 4 Svislá tyč a její stín

činy se v islámských dílech objevily v devátém století v souvislosti s gnómonikou, tedy nikoli v souvislosti s tětivami a oblouky vztahujícími se ke kruhu, jak tomu bylo u veličin sinus a kosinus. Na obrázku 4 vidíme Slunce S a tyč AC kolmou k povrchu Země. Tyč AC vrhá stín AB, z jehož konce B je vrchol C tyče vidět pod výškovým úhlem, který označíme α. Za předpokladu, že $|AC| = 1° = 60$, závisí délka stínu $|AB|$ i délka $|BC|$ slunеčního paprsku mezi body B a C pouze na úhlu α. Tyto dvě Araby zavedené veličiny dnes nazýváme *kotangens*, respektive *kosekans*:

$$\operatorname{cotg} \alpha = |AB|, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = |BC|.$$

Veličiny tangens a sekans definovali arabští učenci podobně. Ten-



Obrázek 5 Vodorovná tyč a její stín

tokrát upevnili tyč DF kolmo na svislou zeď, aby byla vodorovná, tj. rovnoběžná se zemským povrchem (viz obr. 5). Tyč DF vrhá stín EF. Z vrcholu tyče D je konec E stínu vidět pod úhlem, který označíme δ. Za předpokladu, že $|DF| = 1° = 60$, závisí délka stínu $|EF|$ i délka $|DE|$ slunečního paprsku mezi body D a E pouze na úhlu δ. Tyto dvě veličiny dnes nazýváme *tangens*, respektive *sekans*:

$$\operatorname{tg} \delta = |EF|, \qquad \sec \delta = |DE|.$$

Ještě jednou poznamenejme, že ve středověkých arabských zemích byly trigonometrické veličiny délky (kotangens se nazýval *prvním*, tangens *druhým stínem*, jejichž mírou byly (obloukové) stupně. Dnes jsou to samozřejmě čísla. Zdůrazněme, že Arabové tyto veličiny přiřazovali pouze úhlům z intervalu $\langle 0, 90°\rangle$.

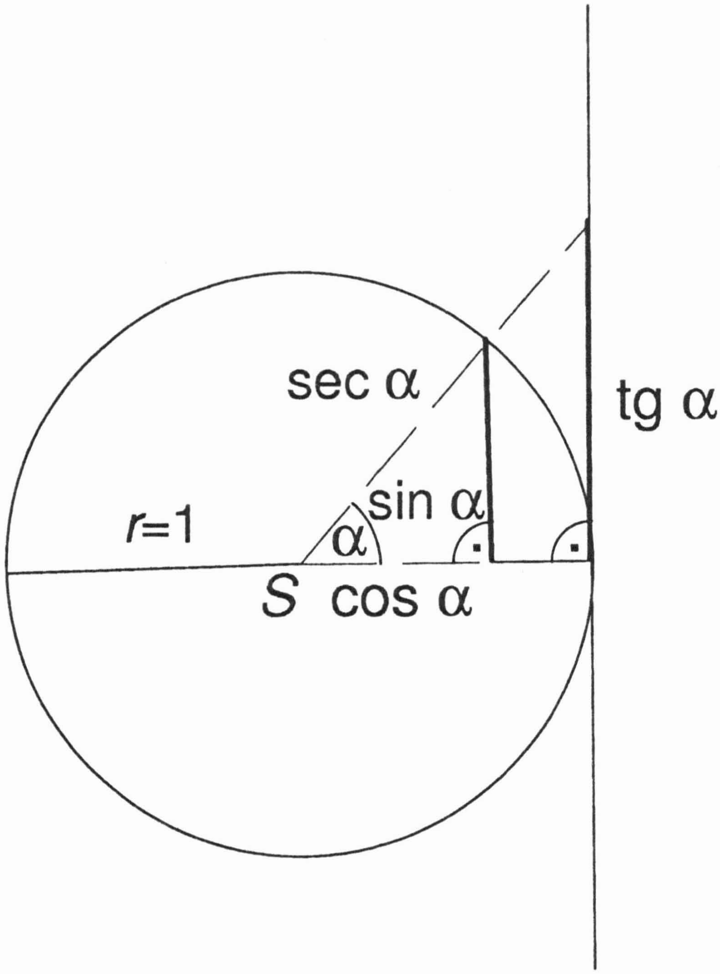
Systematický výklad všech nových trigonometrických veličin (sin, cos, sinvers, tg, cotg, sec, cosec) najdeme v astronomické práci *Zdokonalení Almagestu*, napsané již koncem 9. století al-Battáním. Je v ní odvozena řada vztahů, mezi nimi vyjádření tangens a kotangens pomocí poměrů sinu a kosinu ve tvaru

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{a} \quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(Znovu upozorňujeme na neobvyklý jmenovatel r.) Přes tyto dva jednoduché převodní vztahy veličiny tangens a kotangens neztratily svůj význam, naopak našly rychle mnohá uplatnění i mimo gnómoniku (zejména v astronomii), takže tabulky jejich hodnot byly velmi potřebné.

Asi sto let po *Zdokonalení Almagestu* se objevily ještě propracovanější základy trigonometrie v *Knize dokonalosti* astronoma Abul-Wafy (940 - 997), který v ní definoval (patrně historicky poprvé) všechny trigonometrické veličiny jednotně pomocí kružnice způsobem, který je nám dobře znám a který je pro ostrý úhel α znázorněn na obr. 6. Je na něm také krásně vidět původ termínů tangens a sekans, které pocházejí z latiny a které se objevily v Evropě až v 16. a 17. století. Výraz tangens totiž v doslovném překladu znamená „dotýkající se, tečný“ a termín sekans má české synonymum „protínající, sečný“.

S použitím trigonometrie se nesetkáváme u islámských autorů jen v oblasti astronomie, ale také v matematické geografii u perského kartografa a cestovatele al-Bírúního (973-1048). Jeho dílo o jedenácti knihách *Masúdovský kánón* zaujímá velmi důležité místo v historii trigonometrie. Je jí totiž věnována celá třetí kniha. Al-Bírúní zde nejdříve pro $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ spočítal délky stran pravidelných n-úhelníků vepsaných do kružnice o daném poloměru a následně při $n = 9$ pro tuto délku odvodil kubickou rovnici. Dále se věnoval důkazům vět o délkách tětiv, které jsou ekvivalentní větám o sinu součtu a rozdílu dvou úhlů, sinu dvojnásobku úhlu, sinu poloviny úhlu atd. Mimo jiné al-Bírúní také vyvinul nové me-



Obrázek 6 Trigonometrické veličiny na jednotkové kružnici

tody přibližných výpočtů hodnot jako je např. tet $1^\circ = 2\sin 0{,}5^\circ$, kterou využil k sestavení velmi přesných tabulek hodnot sinů a tangens, mimochodem jedněch z prvních, které jsou vypočteny pro poloměr $r = 1$. Tento výběr al-Bírúní komentuje přáním zbavit se neustálého dělení a násobení šedesáti. Poznamenejme, že v Evropě to ve 14. století byl Thomas Bradwardinus, který jako první doporučil brát délku poloměru $r = 1$.

Nejznámější orientální učenec v oblasti trigonometrie byl Nasír ad-Dín at-Túsí (1201-1274) se svým hlavním dílem o pěti knihách *Traktát o úplném čtyřstranu.* Je to první práce, ve které již trigonometrie nebyla pouhým pomocníkem astronomie, ale ve které se učení o řešení trojúhelníka považuje za samostatnou oblast matematiky. At-Túsí ve svém díle vybudoval první skutečně úplnou a celistvou soustavu rovinné i sférické trigonometrie od základních pojmů a vztahů až k algoritmům řešení všech typických úloh. O rovinné trigonometrii pojednává pouze třetí z pěti knih. Můžeme se v ní například setkat s úlohou vyjádřenou dvojicí rovnic

$$x \pm y = d \qquad \text{a} \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = p,$$

kde x a y jsou neznámé úhly, d daný úhel a p dané číslo.

Podívejme se nyní, jaké nové početní postupy vyvinuli arabští učenci pro sestavování tolik potřebných trigonometrických tabulek, které byly zahrnovány do tzv. „zídž", což bychom přeložili jako sbírky tabulek pro astronomy a geografy. Nejstarší dochované arabské trigonometrické tabulky z 9. století (jedny sestavené al-Chwárizmím, druhé al-Habašem) byly jako i u většiny pozdějších arabských autorů vyčísleny pro poloměr $r = 60$ a z hlediska metod i přesnosti byly srovnatelné s tabulkami Ptolemaia. Ten, jak jsme dříve podrobně popsali, klíčovou hodnotu $\operatorname{tet} 1°$ získal z hodnot $\operatorname{tet} 0{,}75°$ a $\operatorname{tet} 1{,}75°$ postupem, jehož meze přesnosti odpovídají tomu, že na intervalu $\langle 0{,}75°; 1{,}75° \rangle$ nahradíme funkci $\alpha \mapsto \operatorname{tet}\alpha$ funkcí lineární. S novátorstvím v tomto ohledu přišel až Abul-Wafá, který v již vzpomenuté *Knize dokonalosti* pro svou tabulku sinů s krokem 0,25° provedl výpočet klíčové hodnoty sin 0,5° nikoliv ze dvou, ale tří blízkých hodnot $\sin\alpha$, a to pro úhly α rovné ve stupních zlomkům $\frac{12}{32}$, $\frac{15}{32}$ a $\frac{18}{32}$. Tyto tři hodnoty sinů je možné určit ze vzorců pro sinus rozdílu a sinus polovičního úhlu a ze známých hodnot sinu, a to díky rovnostem $12 = 72 - 60, 15 = 45 - 30, 18 = 36 : 2$ a díky tomu, že platí $32 = 2^5$. Na základě pravidla

$$0° < \alpha < \beta < \beta+\delta < 90° \Rightarrow \sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha > \sin(\beta+\delta) - \sin\beta,$$

které je geometricky dokázáno v [4, str. 305] a které vyjadřuje, že funkce sinus je na intervalu $(0°; 90°)$ konkávní, pak Abul-Wafá získal odhady

$$\sin\alpha + \frac{\sin(\alpha+3\delta) - \sin\alpha}{3} < \sin(\alpha+\delta) < \sin\alpha + \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-3\delta)}{3},$$

které ho volbou $32\alpha = 15°$ a $32\delta = 1°$ po dlouhých a náročných výpočtech přivedly k hodnotě sin 0,5° s obdivuhodnou přesností (řádově 10^{-8}).

Zdůrazněme, že jak Ptolemaiův, tak i Abul-Wafův postup určování klíčové hodnoty ze dvou či tří vstupních hodnot má přesnostní bariéru: klíčovou hodnotu nemůžeme výpočtem dostat s libovolnou přesností (na které by mohla záviset délka výpočtů), i kdybychom měli vstupní hodnoty sebepřesnější. Je pozoruhodné, že později al-Bírúní v 11. století a Marjám Čelebí v 15. století popsali postupy, kterými lze tuto bariéru překonat. Popíšeme v samotném závěru tohoto odstavce podstatu výpočtu Marjáma Čelebího (metodu však vymyslel jeho dědeček al-Kaší, jehož dílo se však nedochovalo), protože je zajímavě spojena s úlohou o trisekci libovolného úhlu a numerickým řešením kubických rovnic.

Marjám Čelebí nejprve poměrně snadno vypočetl (jedinou!) vstupní hodnotu $v = \sin 3°$, kterou lze s libovolnou přesností určit z hodnot sin 72° a sin 60°. Klíčovou hodnotu $x = \sin 1°$ pak Čelebí počítal ze vztahu

$$4\sin^3 1° + \sin 3° = 3\sin 1°,$$

tedy cestou řešení kubické rovnice $4x^3 + v = 3x$ s parametrem v. K numerickému výpočtu kořenů podobných rovnic vymyslel al-Kaší jednoduchý iterační algoritmus se zaručenou konvergencí k hledanému kořenu ([4, str. 317–318]). Dnes je patrné, že uvedený vztah mezi hodnotami sin 3° a sin 1° je okamžitým důsledkem vzorce pro sinus trojnásobného úhlu

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

který ovšem takto trigonometricky patrně zapsal až F. Viète. Marján Čelebí ovšem získal vztah hodnot sin 3° a sin 1° z tzv. rovnice pro trisekci úhlů ([4, str. 314–316]), tedy rovnice pro slavnou antickou úlohu o rozdělení libovolného úhlu na tři menší shodné úhly, která byla známa v arabských zemích od 11. století. Konkrétním výpočtem dosáhl Čelebí hodnoty sin 1° s přesností 10^{-10}.

Stejně jako matematici islámských zemí převzali vše již objevené od Indů, Řeků, Syřanů a Babylóňanů, tak i učenci středověké

Evropy, než začali sami svými příspěvky obohacovat vědu, sáhli nejdříve po písemnostech předchozích kultur. Mohli tak začít stavět své výsledky na pevném základě.

Literatura

[1] Maor Eli. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[2] Červený Martin. *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích - diplomová práce*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.

[3] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana`.

[4] Juškevič Adolf P. *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1977.

[5] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html`.

[6] Boyer Carl B. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons, INC, New York, 1989.

[7] Katz Victor J. *A History of Mathematics*. Addison Wesley, Menlo Park, New York, 1998.

[8] Ivor Grattan-Guinness. *The Rainbow of Mathematics*. 1997.

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
e-mail: xsmykal@math.muni.cz