Radka Smýkalová

Z historie goniometrických funkcí - Ptolemaiovy výpočty

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 2, 66–80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150574

Z HISTORIE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

PTOLEMAIOVY VÝPOČTY

RADKA SMÝKALOVÁ

Goniometrie (z řeckého gonon = úhel a metro = měřit) je oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi. Její součástí, významnou z pohledu elementární matematiky, je také trigonometrie (z řeckého trigonon = tři úhly a metro = měřit), jež se zabývá užitím goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících.

Trigonometrie jako věda se objevila, jak už to bývá, při řešení konkrétních praktických úloh. První kroky rozvoje trigonometrie byly spojeny s potřebami starověké astronomie. Velký vliv na rozvoj astronomie a s ní úzce spojené trigonometrie mělo rozvíjející se mořeplavectví závislé na správném určení směru plavby lodí na otevřeném moři podle polohy hvězd. Velký význam pro rozvoj trigonometrie měla také potřeba zhotovit hodnověrné zeměpisné mapy, a to znamenalo spočítat přesně řadu vzdáleností na zemském povrchu.

Nejdůležitější pro rozvoj trigonometrie v moderním slova smyslu byly práce starověkého řeckého astronoma, který pocházel z Nikaie v Bitýnii, Hipparcha (asi 190-120 př. n. l.). Z toho, co Hipparchos napsal, se nám do dnešní doby téměř nic nedochovalo. O jeho díle si můžeme udělat pouze představu, a to prostřednictvím knihy Klaudia Ptolemaia s názvem *Almagest.* Pro své astronomické výpočty potřeboval Hipparchos tabulku trigonometrických poměrů. Avšak neměl se kam obrátit, žádná taková tabulka dosud neexistovala. Vzal tedy v úvahu libovolný trojúhelník vepsaný do kruhu, čímž se každá z jeho tří stran stala tětivou kružnice, jež kruh omezovala. K výpočtu velikostí různých prvků trojúhelníka bylo potřeba stanovit délku tětivy příslušné danému středovému úhlu. To se stalo hlavním úkolem trigonometrie pro mnohá následující

Obrázek 1: Hipparchos

staletí. Hipparchos sestavil tabulky tětiv pro různé středové úhly kružnice při stálém poloměru. Byly to vlastně tabulky dvojnásobných sinů poloviny středového úhlu. Sám Hipparchos napsal dvanáct knih o počítání délek tětiv v kruhu, ale všechny tyto knihy byly s koncem antické epochy ztraceny.

Klaudios Ptolemaios (asi 85-165 n. l.) byl řecký geograf, astronom a astrolog, který pravděpodobně žil a pracoval v egyptské Alexandrii. Jeho největším dílem je *Syntaxis megale (Velká*

Obrázek 2: Klaudios Ptolemaios

soustava). Tento astronomický spis byl vydán okolo roku 140 a v 8. století byl přeložen do arabštiny pod názvem *Almagest.* Byl založen na domněnce, že nehybná Země je umístěna ve středu vesmíru a nebeská tělesa kolem ní obíhají po předepsaných drahách. Našemu zájmu se těší Ptolemaiova tabulka tětiv, která je předmětem kapitoly 10 a 11 první knihy Almagestu. Tato tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který ji vymezuje. Středový úhel, k němuž se délky vztahují, postupuje po 0,5° na intervalu od 0° do 180°. Z našeho hlediska jde vlastně o tabulku sinů úhlů od 0° do 90°, postupujících po čtvrtině stupně. Když totiž označíme poloměr kruhu r, středový úhel řeckým písmenem α a délku tětivy $\mathrm{tet}(\alpha)$, obdržíme vztah

$$\mathrm{tet}(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

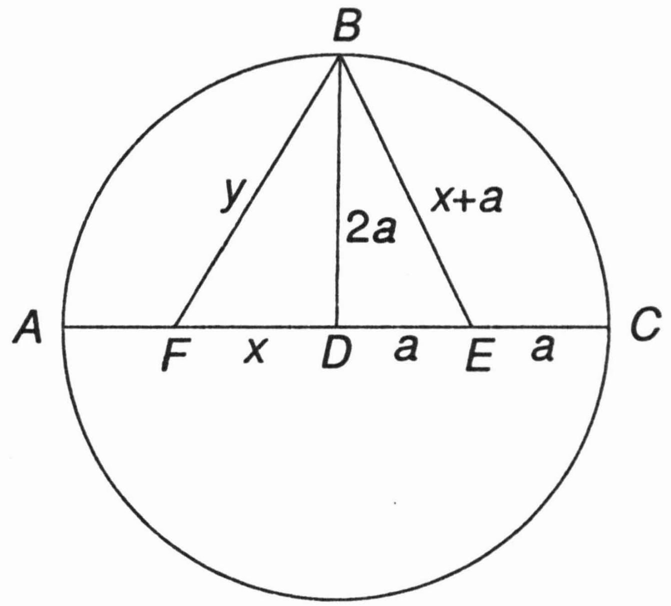
Ptolemaios rozdělil průměr kruhu na 120 stejných jednotkových dílů (délky 1^d), tedy poloměru r přiřazoval délku 60 dílů ($r = 60^d$). Jeho tabulka udává délky tětiv s přesností na dvě šedesátinná místa, tedy s chybou řádu 60^{-2}.

Uvedením jednotlivých metod, jak Ptolemaios postupně zmíněnou tabulku doplňoval, vytvoříme pro funkci $\mathrm{tet}(\alpha)$ malou, avšak obsažnou teorii, kterou Ptolemaios ke svým výpočtům potřeboval. Stejně jako on budeme pracovat s poloměrem délky $r = 60^d$.

1. Funkce $\mathrm{tet}(\alpha)$ je definovaná pro $\alpha \in \langle 0; 180°\rangle$ a platí $0^d \leq$ $\leq \mathrm{tet}(\alpha) \leq 120^d$.

2. Hodnoty $\mathrm{tet}(0°) = 0^d$, $\mathrm{tet}(60°) = 60^d$ a $\mathrm{tet}(180°) = 120^d$ jsou zřejmé. Ze znalosti Pythagorovy věty Ptolemaios vypočítal $\mathrm{tet}(90°) = 84^d 51'10''$, kde $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^d$ a $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^d$. (Všechny Ptolemaiovy hodnoty $\mathrm{tet}(\alpha)$ budeme uvádět rovnítkem, správněji bychom měli psát $\doteq$.)

3. Pro výpočet hodnot $\mathrm{tet}(\alpha)$, kde $\alpha \in \{36°; 72°; 108°; 144°\}$, musel nejdříve Ptolemaios dokázat, že délka $|DF|$ části ramene EF rovnoramenného trojúhelníka EFB z obr. 3 je rovna délce strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kruhu s průměrem AC a že délka $|BF|$ je délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do téhož kruhu. Díky



Obrázek 3

těmto výsledkům lze určit délky tětiv příslušných úhlů následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
|DE|^2 + |DB|^2 &= |BE|^2,\\
(30^d)^2 + (60^d)^2 &= |BE|^2,\\
|BE| &= 67^d4'55'' = |EF|,\\
|DF| &= |EF| - |DE| = 67^d4'55'' - 30^d,\\
|DF| &= 37^d4'55'',\\
\mathrm{tet}(36^\circ) &= 37^d4'55''.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|DF|^2 + |DB|^2 &= |BF|^2,\\
(37^d4'55'')^2 + (60^d)^2 &= |BF|^2,\\
|BF| &= 70^d32'3'',\\
\mathrm{tet}(72^\circ) &= 70^d32'3''.
\end{aligned}
$$

Jakmile byly všechny výše zmíněné hodnoty $\mathrm{tet}(\alpha)$ určeny, mohl Ptolemaios ukázat, jak vypočítat délky dalších tětiv na základě toho, že do kruhu vepsaný úhel, který leží proti průměru, je pravý. Proto užitím Pythagorovy věty ve tvaru

$$(\mathrm{tet}(\alpha))^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = (120^d)^2,$$

který mimochodem odpovídá dnešnímu vztahu pro goniometrickou jedničku

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

Ptolemaios určil hodnoty $\mathrm{tet}(108^\circ) = 97^d4'56''$ a $\mathrm{tet}(144^\circ) = 114^d7'37''$. Podobně z hodnoty $\mathrm{tet}(60^\circ) = 60^d$ vypočítal $\mathrm{tet}(120^\circ) = 103^d55'23''$.

4. Dosud popsané metody vedou pouze k určení několika málo jednotlivých hodnot funkce $\mathrm{tet}(\alpha)$. Pro výpočet všech dalších hodnot funkce $\mathrm{tet}(\alpha)$ potřeboval Ptolemaios nový matematický nástroj. Tím se stala významná planimetrická věta, která dnes nese Řekovo jméno.

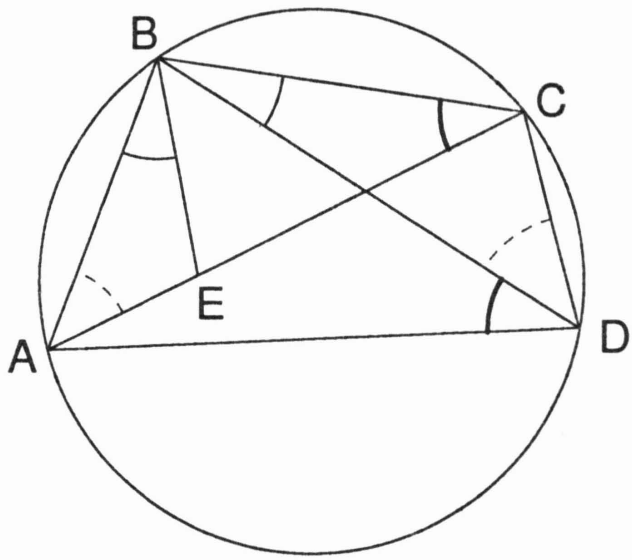
Ptolemaiova věta. *V každém tětivovém čtyřúhelníku platí: Součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.*

Při označení podle obr. 4 lze větu vyjádřit rovností

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Důkaz. Sestrojme bod E na úhlopříčce AC tak, aby úhly ABE a DBC byly shodné, viz obr. 4, na kterém jsou rovněž vyznačeny dvě dvojice shodných obvodových úhlů. Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

- $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle EBC| \quad (|\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle DBC|),$



Obrázek 4: K Ptolemaiově větě

- $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BCE|$ (obvodové úhly),
- $\dfrac{|BC|}{|CE|} = \dfrac{|BD|}{|DA|}$ $(\triangle ABD \sim \triangle EBC)$,
- $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DBC|$ (dáno konstrukcí bodu E),
- $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BDC|$ (obvodové úhly),
- $\dfrac{|BA|}{|AE|} = \dfrac{|BD|}{|DC|}$ $(\triangle ABE \sim \triangle DBC)$,
- $|BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |CE|$ (přepsána třetí rovnost),
- $|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AE|$ (přepsána šestá rovnost).

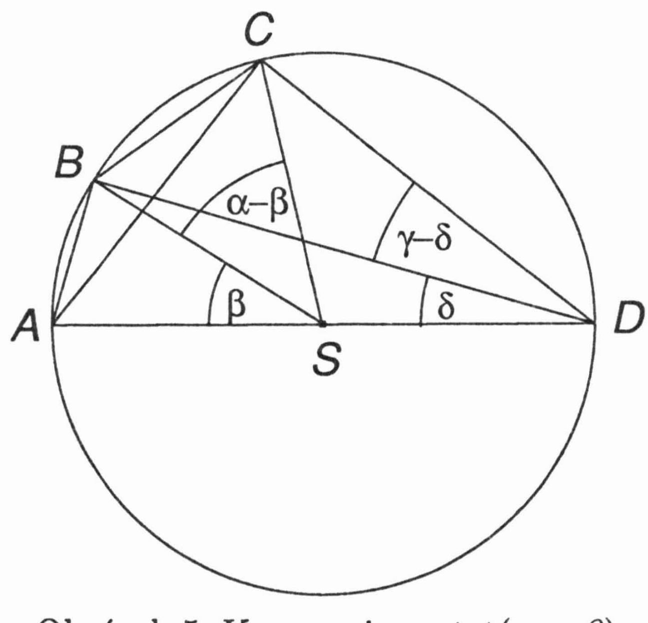
Nyní poslední dvě rovnosti sečteme a součet upravíme:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AE| + |BD| \cdot |CE|,$$
$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot (|AE| + |CE|),$$
$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Důkaz je hotov. Ještě poznamenejme, že ve speciálním případě, kdy tětivový čtyřúhelník je obdélníkem, získáme uvedeným postupem důkaz Pythagorovy věty pro obecný pravoúhlý trojúhelník ABC, který nejprve doplníme na obdélník $ABCD$ (bod E z obr. 4 bude patou výšky z vrcholu B na přeponu AC). □

5. Díky dokázané větě našel Ptolemaios odpověď na dvě důležité otázky:

(a) *Jak z hodnot* tet(α), tet(β) *vypočítat hodnotu* tet($\alpha-\beta$)*?* Pro dané úhly α, β, kde $0° < \beta < \alpha < 180°$, uvážíme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do půlkruhu s průměrem AD tak, že $|\sphericalangle ASB| = \beta$ a $|\sphericalangle ASC| = \alpha$ (obr. 5). Pak $|AB| = \text{tet}(\beta)$, $|AC| = \text{tet}(\alpha)$ a $|BC| = \text{tet}(\alpha - \beta)$. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že $|\sphericalangle ADC| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle ADB| = \delta = \frac{\beta}{2}$. Následujme jeho postup:



Obrázek 5: Ke vzorci pro tet($\alpha - \beta$)

- $|CD| = \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}$
(Pythagorova věta),
- $|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2}$
(Pythagorova věta),
- $|BC| =$
$= \dfrac{|AC|\sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} - |AB|\sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}}{|AD|}$
(Ptolemaiova věta),
- $\text{tet}(\alpha - \beta) =$
$= \dfrac{\text{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2} - \text{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}}{120^d}$
(dosazení).

Poznamenejme, že když rovnost z Ptolemaiovy věty vydělíme výrazem $|AD|^2$, získáme

$$\frac{|AB|}{|AD|} \cdot \frac{|CD|}{|AD|} + \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|},$$

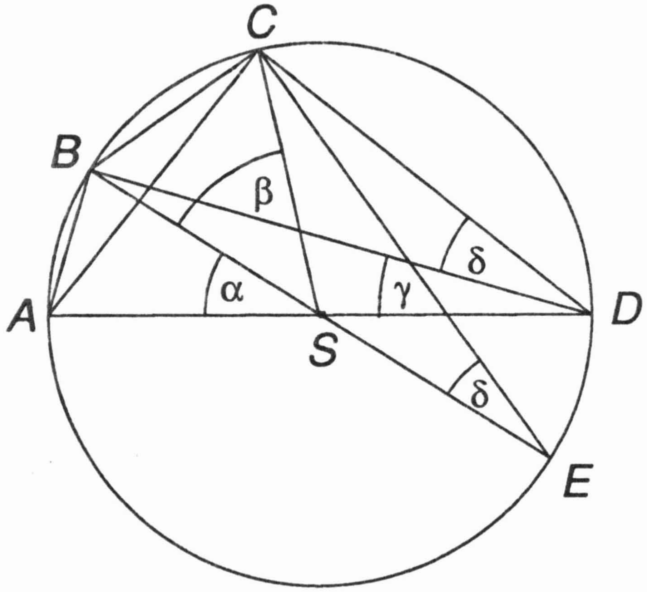
což se dá v situaci z obr. 5 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu přepsat na tvar známého rozdílového vzorce

$$\sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta.$$

V tomto okamžiku mohl Ptolemaios díky znalosti všech dosavadních hodnot $\text{tet}(\alpha)$ vypočítat délky tětiv pro všechny úhly o velikosti $k \cdot 6°$, kde $k \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\begin{aligned}
\text{tet}(18°) &= \text{tet}(90° - 72°) = 18^d 46' 19'', \\
\text{tet}(12°) &= \text{tet}(72° - 60°) = 12^d 32' 36'', \\
\text{tet}(6°) &= \text{tet}(18° - 12°) = 6^d 16' 50'', \\
\text{tet}(24°) &= \text{tet}(60° - 36°) = \ldots, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(b) *Jak z hodnot* tet(α), tet(β) *vypočítat hodnotu* tet($\alpha+\beta$)*?* Pro dané úhly α, β, kde $0° < \alpha, \beta < 180°$ a $\alpha + \beta < 180°$, uvážíme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do půlkruhu s průměrem AD tak, že $|\sphericalangle ASB| = \alpha$ a $|\sphericalangle BSC| = \beta$ (obr. 6). Pak $|AB| = \text{tet}(\alpha)$, $|BC| = \text{tet}(\beta)$ a $|AC| = \text{tet}(\alpha + \beta)$. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že $|\sphericalangle ADB| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle BDC| = \delta = \frac{\beta}{2}$. Pro následující odvození je nutná konstrukce pomocného bodu E – úsečka BE je průměr kruhu. Tentokrát užijeme Ptolemaiovu větu dvakrát – pro čtyřúhelníky $ABCD$ a $BCDE$.



Obrázek 6: Ke vzorci pro tet($\alpha + \beta$)

- $|AD| = |BE| = 120^d$

(průměry kruhu),

- $|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}$

(Pythagorova věta),

- $|CE| = \sqrt{|BE|^2 - |BC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2}$

(Pythagorova věta),

- $|DE| = |AB| = \mathrm{tet}(\alpha)$
($\triangle DES \cong \triangle ABS$),
- $|BC| \cdot |DE| + |CD| \cdot |BE| = |BD| \cdot |CE|$
(Ptolemaiova věta),
- $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$
(Ptolemaiova věta).

V posledních dvou rovnostech vystupují neznámé hodnoty $|AC|$ a $|CD|$. Druhou z nich eliminujeme, když rovnice vhodně vynásobíme (první vynásobíme $-|AB|$ a druhou $|AD|$) a následně je sečteme. Ještě než tak učiníme, přepíšeme $|DE|$ hodnotou $|AB|$ a $|BE|$ hodnotou $|AD|$. Tudíž

$$-|AB| \cdot (|BC| \cdot |AB| + |CD| \cdot |AD|) = -|AB| \cdot (|BD| \cdot |CE|),$$
$$|AD| \cdot (|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|) = |AD| \cdot (|AC| \cdot |BD|).$$

Po sečtení a úpravách obdržíme rovnost

$$|BC| \cdot (|AD|^2 - |AB|^2) = |BD| \cdot (|AC| \cdot |AD| - |CE| \cdot |AB|), \tag{$*$}$$

která je po dosazení ekvivalentní s rovností

$$\mathrm{tet}(\beta) \cdot \left((120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2\right) = \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathrm{tet}(\alpha + \beta) \cdot 120^d - \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\beta))^2} \cdot \mathrm{tet}(\alpha)\right).$$

Vyjádřením členu $\mathrm{tet}(\alpha + \beta)$ tak Ptolemaios získal kýžený vzorec

$$\mathrm{tet}(\alpha + \beta) =$$
$$= \frac{\mathrm{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\beta))^2} + \mathrm{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2}}{120^d}.$$

Poznamenejme, že když rovnost ($*$) vydělíme výrazem $|AD|^3$, získáme

$$\frac{|BC|}{|AD|} \cdot \left(1 - \frac{|AB|^2}{|AD|^2}\right) = \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \left(\frac{|AC|}{|AD|} - \frac{|CE|}{|AD|} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}\right),$$

což se dá v situaci z obr. 6 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu s přihlédnutím k rovnosti $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BDC| = \delta$ přepsat na tvar

$$\sin\delta(1-\sin^2\gamma) = \cos\gamma\,(\sin(\gamma+\delta) - \sin\gamma\cos\delta)\,.$$

Odtud po dělení hodnotou $\cos\gamma \neq 0$ získáme známý tvar součtového vzorce

$$\sin(\gamma+\delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta.$$

Díky odvozenému vzorci pro $\text{tet}(\alpha+\beta)$ obdržel Ptolemaios pro případ $\alpha = \beta$ aparát na výpočet hodnot $\text{tet}(3°)$, $\text{tet}(1{,}5°)$ a $\text{tet}(0{,}75°)$ z hodnoty $\text{tet}(6°)$, kterou již znal:

$$\begin{aligned}
\text{tet}(6°) &= \text{tet}(3° + 3°) = \\
&= \frac{2\cdot\text{tet}(3°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(3°))^2}}{120^d},\\
6^d16'50'' &= \frac{2\cdot\text{tet}(3°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(3°))^2}}{120^d},\\
&\;\vdots\\
\text{tet}(3°) &= 3^d8'28''.\\
\text{tet}(3°) &= \frac{2\cdot\text{tet}(1{,}5°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(1{,}5°))^2}}{120^d},\\
3^d8'28'' &= \frac{2\cdot\text{tet}(1{,}5°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(1{,}5°))^2}}{120^d},\\
&\;\vdots\\
\text{tet}(1{,}5°) &= 1^d34'15''.\\
\text{tet}(1{,}5°) &= \frac{2\cdot\text{tet}(0{,}75°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(0{,}75°))^2}}{120^d},\\
1^d34'15'' &= \frac{2\cdot\text{tet}(0{,}75°)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(0{,}75°))^2}}{120^d},\\
&\;\vdots\\
\text{tet}(0{,}75°) &= 0^d47'8''.
\end{aligned}$$

6. Aby mohl Ptolemaios sestavit tabulku délek tětiv s krokem 0,5°, potřeboval ještě vypočítat hodnotu tet(1°) jako hodnotu ležící mezi tet(0,75°) a tet(1,5°). Použil k tomu duchaplnou metodu interpolace, která byla známa již astronomu Aristarchovi (asi 320 – 250 př. n. l.) a která je pro délky tětiv založena na této vlastnosti: Splňují-li úhly α, β nerovnosti $0° < \alpha < \beta < 180°$, pak platí

$$1 < \frac{\operatorname{tet}(\beta)}{\operatorname{tet}(\alpha)} < \frac{\beta}{\alpha},$$

viz obr. 7, na kterém poměr $\beta : \alpha$ je poměrem délek vyznačených oblouků BC a AB, zatímco $\operatorname{tet}(\beta) : \operatorname{tet}(\alpha)$ je poměrem $|BC| : |AB|$ příslušných tětiv. (V dnešní terminologii jde o implikaci $0° < \gamma < \delta < 90° \Rightarrow 1 < \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} < \frac{\delta}{\gamma}$, která plyne z toho, že funkce sinus je na intervalu $\langle 0°, 90°\rangle$ rostoucí a konkávní.) Původní geometrický důkaz zde uvádět nebudeme, lze ho však nalézt v [4] nebo [5]. Následujme Ptolemaiův postup, který Aristarchovu nerovnost využil hned dvakrát:

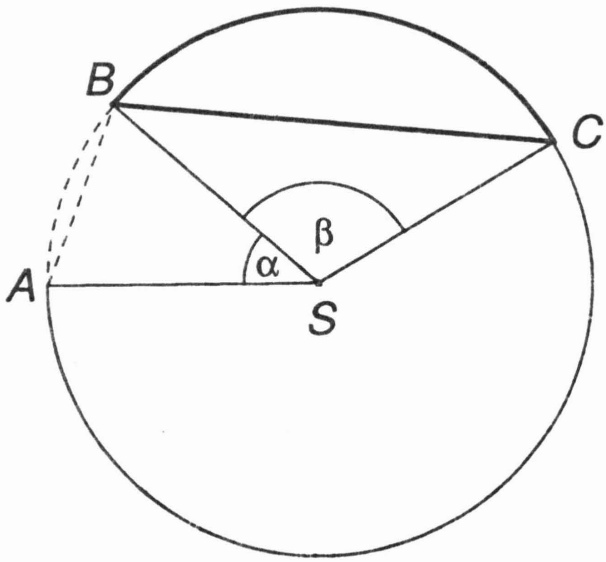
$$\frac{\operatorname{tet}(1°)}{\operatorname{tet}(0{,}75°)} < \frac{1}{0{,}75} \qquad \text{a} \qquad \frac{\operatorname{tet}(1{,}5°)}{\operatorname{tet}(1°)} < \frac{1{,}5}{1}.$$

Po dosazení hodnot tet(0,75°) a tet(1,5°) dospěl Ptolemaios k odhadům

$$\operatorname{tet}(1°) < 1^d2'50'' \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tet}(1°) > 1^d2'50''.$$

Jelikož je hodnota tet(1°) zároveň menší a větší jak délka $1^d2'50''$ (vyšlo to tak, protože hodnoty tet(0,75°) a tet(1,5°) byly přibližné), mohl Ptolemaios zapsat poslední hodnotu, díky níž již byl schopen vyplnit celou tabulku délek tětiv – $\operatorname{tet}(1°) = 1^d2'50''$.

Nyní vylíčíme, jak mohl Ptolemaios pomocí své tabulky vyřešit jakýkoliv rovinný trojúhelník. Po vzoru Hipparcha budeme uvažovat trojúhelník vepsaný do kruhu. Popíšeme nyní pouze nejjednodušší případ, kdy zkoumaný trojúhelník ABC bude pravoúhlý.



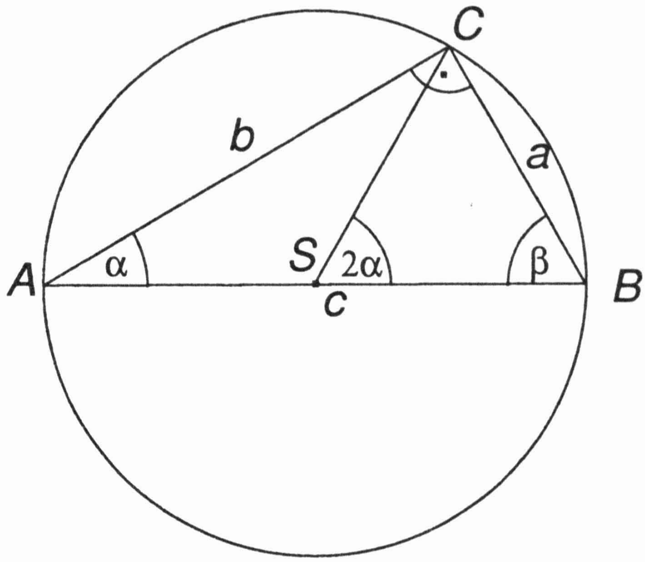
Obrázek 7

Nutno však poznamenat, že Ptolemaios si věděl rady i s obecnými trojúhelníky, a to výpočty ve dvou pravoúhlých trojúhelnících, které dostaneme, když původní trojúhelník rozdělíme některou jeho výškou na dvě části. Na tomto postupu se v pozdějších dobách budovala *novější trigonometrie* až do své současné podoby.

Z elementární geometrie víme, že přepona AB pravoúhlého trojúhelníku ABC z obr. 8 je průměrem opsaného kruhu a že $|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC|$. Předpokládejme, že velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a délka přepony $c = |AB|$ jsou dány. Nejdříve vypočítáme 2α a použijeme tabulku ke zjištění délky odpovídající tětivy BC. Jelikož Ptolemaiova tabulka předpokládá délku průměru $c = 120$, výsledek ještě musíme vynásobit zlomkem $\frac{c}{120}$. Tak dostaneme délku a odvěsny BC. Délku b druhé odvěsny AB pak spočítáme pomocí Pythagorovy věty a třetí úhel $\beta = |\sphericalangle ABC|$ snadno určíme z rovnosti $\beta = 90° - \alpha$. Kdyby naopak byly dány strany a a c, zlomek $\frac{a}{c}$ nejprve vynásobíme číslem 120. Teprve potom sáhneme po tabulce délek tětiv, kde budeme *obráceně* hledat velikost 2α, ze které pak po dělení dvěma určíme velikost α.

Ptolemaiův postup výpočtu můžeme zapsat ve tvaru vzorce

$$a = \frac{c}{120} \cdot \mathrm{tet}(2\alpha). \qquad (**)$$



Obrázek 8

To nás přivádí k zajímavému komentáři: násobení a dělení číslem 120 je v šedesátkové soustavě obdobné tomu, když násobíme a dělíme číslem 20 v desítkové soustavě. Provádíme to jednoduše tak, že po vynásobení nebo vydělení číslem 2 ještě posuneme desetinnou čárku o jedno místo doprava nebo doleva. Vzorec (∗∗) tudíž vyžaduje, abychom zdvojnásobili úhel, vyhledali ho v tabulce, délku odpovídající tětivy vydělili dvěma a nakonec posunuli šedesátinnou čárku. Bylo jen otázkou času, než někdo zkrátil tohle úmorné počítání sestavením jiné tabulky, která dvojnásobnému úhlu přiřazuje délku poloviční tětivy. Tento úkol, který dnes můžeme nazvat sestavením tabulky pro funkci sinus, splnili až učenci středověké Indie.

Dobytí Řecka Římem a řada jiných příčin postupně přivodily úpadek helénské kultury. Po Ptolemaiovi nevytvořili alexandrijští učenci v oblasti astronomie a trigonometrie – stejně jako v dalších vědních oborech – nic podstatného. Římská kultura také nebyla žádnou spásou, protože Římané nevymysleli v tomto období nového téměř nic, sami jen kopírovali to, co převzali od Řeků. Další rozvoj matematiky v oblasti trigonometrie je spojován teprve s národy Indů (od 5. stol. n. l.) a Arabů (od 7. stol. n. l.).

Literatura

[1] Kolman Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku.* Academia, Praha, 1968.

[2] Maor Eli. *Trigonometric Delights.* Princeton University Press, Princeton, 1998.

[3] Červený Martin. *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích – Diplomová práce.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.

[4] Heath Thomas. *A History of Greek Mathematics.* Clarendon Press, Oxford, 1921.

[5] `http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#table1`.

[6] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana`.

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
e-mail: xsmykal@math.muni.cz