Leo Boček

Který čtyřúhelník má největší obsah?

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 1, 42–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150564

KTERÝ ČTYŘÚHELNÍK MÁ NEJVĚTŠÍ OBSAH?

Několik poznámek k článku Daga Hrubého v čísle 4(64)

LEO BOČEK

Příspěvek D. Hrubého ukazuje několik příkladů užití diferenciálního počtu při určení extrému v geometrických úlohách. Hned v první úloze se hledá trojúhelník s danými délkami a, b dvou jeho stran, který má maximální obsah. Jde vlastně o určení maxima funkce $sin\varphi$ na intervalu $(0, \pi)$. Z didaktických důvodů je samozřejmě možné ukázat, a to měl autor na mysli, jak lze úlohu řešit pomocí diferenciálního počtu. Avšak student, který se naučil derivovat goniometrické funkce, musí už o nich něco vědět. A jistě ví, že oborem hodnot funkce sinus je interval $\langle -1, 1\rangle$ a že maximum 1 dosáhne právě jen v bodě $\frac{\pi}{2}$, omezíme-li se na výše uvedený definiční obor. Další úloha měla být speciálním případem první úlohy. Protože však v textu vypadl předpoklad „s rameny dané délky a“, měla by správná odpověď znít: „Žádný rovnoramenný trojúhelník nemá maximální obsah, ke každému lze najít rovnoramenný trojúhelník s obsahem větším.“ Jistě si však každý čtenář vynechaný předpoklad doplnil. Velmi pěkné jsou další dvě úlohy, ke kterým se ještě vrátíme. Věnujme se zatím hlavní úloze článku, podle které je příspěvek nazván. Mezi všemi čtyřúhelníky s danými délkami jeho stran máme určit ten, který má maximální obsah. Pomocí derivace se velmi pěkně odvodí, že čtyřúhelník musí být nutně tětivový. Pouze v tomto případě je totiž první derivace obsahu S podle úhlu β rovna nule. Výpočet druhé derivace je poněkud složitější, tak je vynechán. Není to chyba, ale stejně jako v předcházejícím příkladě mělo být poznamenáno, že jde zatím o situaci podezřelou z extrému. Kdybychom si druhou derivaci opravdu vyjádřili, museli bychom ještě využít samozřejmého předpokladu, že každá strana čtyřúhelníku je menší než součet zbývajících, abychom ukázali že je záporná a že jde tedy skutečně o maximum. Pro maximální obsah S pak je pak uveden výsledek

$$2S = (ab + cd) \cdot \sin\beta.$$

Co je však třeba dosadit za $\sin\beta$? Tato hodnota by měla být vyjádřena pomocí daných délek a, b, c, d. Dostaneme ji tak, že z uvedených vztahů

$$c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \qquad \beta + \delta = \pi$$

vypočteme $\cos\beta$ a pak $\sin\beta$. Pro maximální obsah nám vyjde krásný vzorec

$$16 \cdot S^2 = (a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)\cdot(a-b+c+d)\cdot(-a+b+c+d),$$

který je obdobou Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku. Ten dostaneme mimochodem z tohoto vzorce, položíme-li $d = 0$.

Ukážeme si ještě, jak lze úlohy z článku D. Hrubého řešit bez diferenciálního počtu. V pěkně zvolené třetí úloze se hledá trojúhelník s maximálním obsahem, když je dána jedna jeho strana a a protější úhel α. Kdo zná něco o množině všech bodů z nichž je daná úsečka vidět pod daným úhlem, tak ihned vidí, že maximální obsah má ze všech trojúhelníků daných vlastností právě jen trojúhelník rovnoramenný. Jinak označíme β jeden další úhel trojúhelníku a úlohu převedeme na určení maxima funkce

$$S(\beta) = \frac{a^2}{2} \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

Použijeme-li vzorec $2 \cdot \sin x \cdot \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$, převedeme úlohu na určení maxima funkce $\cos\alpha - \cos(\alpha + 2\beta)$ proměnné, která při konstantní hodnotě α nabývá svého maxima $1 + \cos\alpha$ v případě $\alpha + 2\beta = \pi$, odkud pak plyne, že $\gamma = \beta$, trojúhelník je rovnoramenný.

Ve 4. úloze se hledá lichoběžník s maximálním obsahem mezi všemi rovnoramennými lichoběžníky s danou délkou b obou ramen i jedné základny. Označíme-li φ úhel při základně, je úloha převedena na určení maxima funkce

$$S(\varphi) = b^2 \cdot (1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi.$$

Ekvivalentně můžeme hledat maximum funkce

$$3 \cdot (1 + \cos\varphi)^2 \cdot \sin^2\varphi = (1 + \cos\varphi)^3 \cdot (3 - 3\cos\varphi).$$

Použijeme k tomu nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem čísel $1+\cos\varphi$, $1+\cos\varphi$, $1+\cos\varphi$, $3-3cos\varphi$. Funkce $S(\varphi)$ nabývá tedy svého maxima právě tehdy, když $1 + \cos\varphi = 3 - 3\cos\varphi$, tj. v případě $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Vraťme se k hlavní, páté úloze. Umocníme-li rovnosti

$$4S = 2ab \cdot \sin\beta + 2cd \cdot \sin\delta$$

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cdot \cos\beta + 2cd \cdot \cos\delta$$

na druhou a sečteme, dostaneme vztah

$$16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cdot \cos(\beta + \delta) - \left(c^2 + d^2 - a^2 - b^2\right)^2.$$

Ihned vidíme, že obsah S je právě tehdy maximální, když je $\cos(\beta + \delta) = -1$, čtyřúhelník je tětivový a pro maximální hodnotu S platí pak výše uvedený „Heronův" vzorec. Tím jsme stručně uvedli řešení úlohy A-P-1 z 29. ročníku matematické olympiády.

Chcete vědět, jak se sestrojí tětivový čtyřúhelník s danými délkami jeho stran, tedy čtyřúhelník s danými délkami stran a maximálním obsahem? Řešení najdete v ročence už prvního ročníku MO. Protože je však tato ročenka těžko dostupná, uvedeme velmi stručně tam uvedené řešení. Předpokládejme, že jsme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ se stranami a, b, c, d už sestrojili. Představme si čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný takový, aby byla jeho strana $A'B'$ shodná se stranou CD původního. Nový čtyřúhelník „přilepíme" k původnímu tak, aby se ztotožnily body A', C a také body B', D. Dostaneme tak čtyřúhelník $ABD'C'$, který je lichoběžníkem nebo rovnoběžníkem. Ten snadno sestrojíme a rozdělíme na tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a zbývající čtyřúhelník.

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8