Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 4, 240–252

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150555`

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 7. – 10. 4. 2002 se v Litomyšli uskutečnilo celostátní kolo 51. ročníku Matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 2002–2003.

Úlohy celostátního kola 51. ročníku matematické olympiády

Litomyšl 7.–10. dubna 2002

1. V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$(4x)_5 + 7y = 14,$$
$$(2y)_5 - (3x)_7 = 74,$$

kde $(n)_k$ značí násobek čísla k nejbližší číslu n.

(P. Černek)

Řešení. Z první rovnice dané soustavy plyne, že číslo $7y - 14 = 7(y-2)$ je dělitelné pěti, takže $y = 5s + 2$ pro vhodné celé s. Potom platí $2y = 10s + 4$, a proto $(2y)_5 = 10s + 5$. Po dosazení do soustavy dostaneme dvojici rovnic $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Odečteme-li od dvojnásobku první rovnice sedminásobek druhé rovnice, vyloučíme neznámou s a pro neznámou x tak dostaneme rovnici $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Protože funkce $F(t) = 2(4t)_5 + 7(3t)_7$ je v celočíselné proměnné t neklesající a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naše rovnice $F(x) = -483$ jediné řešení $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5 + 35s = 0$ pak plyne $s = 2$, takže $y = 12$. Zkoušku pro dvojici $(x, y) = (-17, 12)$ provedeme snadno dosazením.

Daná soustava má jediné řešení $(x, y) = (-17, 12)$.

Jiné řešení. Pro každé celé číslo t zřejmě platí nerovnosti $t - 2 \le (t)_5 \le t + 2$ a $t - 3 \le (t)_7 \le t + 3$. Podle nich dostaneme z dané soustavy rovnic soustavu nerovnic

$$12 \le 4x + 7y \le 16,$$
$$69 \le 2y - 3x \le 79.$$

Z této soustavy vyloučíme například neznámou x: pro výraz $3(4x+$ $+ 7y) + 4(2y - 3x)$, který se rovná $29y$, tak dostaneme odhady

$$29y \le 3 \cdot 16 + 4 \cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \ge 3 \cdot 12 + 4 \cdot 69 = 312.$$

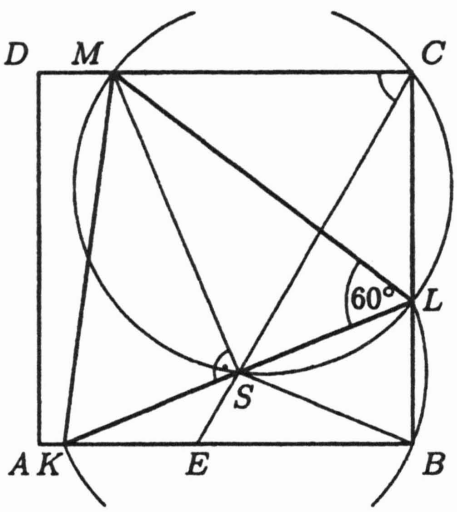
Z nerovností $312 \le 29y \le 364$ ovšem plyne $y \in \{11, 12\}$. Z první rovnice původní soustavy pro $y = 11$ vychází $(4x)_5 = -63$, což není násobek pěti, zatímco pro $y = 12$ vychází $(4x)_5 = -70$, odkud $-72 \le 4x \le -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutně tedy platí $y = 12$; po dosazení do druhé rovnice soustavy zjistíme, že tato rovnice je splněna pro $x = -17$, ne však pro $x = -18$. Jediným řešením je tedy dvojice $(x, y) = (-17, 12)$.

2. Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník KLM, jehož vrcholy K, L a M leží po řadě na stranách AB, BC a CD daného čtverce $ABCD$. Najděte množinu středů stran KL všech takových trojúhelníků KLM. *(J. Zhouf)*

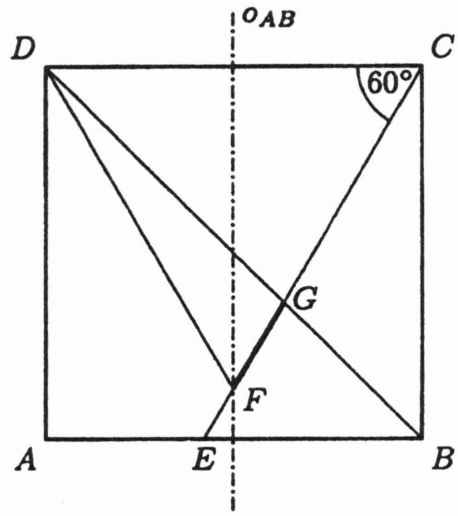
Řešení. Označme S střed strany KL libovolného z uvažovaných trojúhelníků KLM (obr. 1). Protože oba úhly LCM a LSM jsou pravé, je čtyřúhelník $CMSL$ tětivový, a proto platí $|\sphericalangle MCS| =$ $= |\sphericalangle MLS| = 60°$. Bod S tudíž leží na fixní úsečce CE, jejíž krajní bod $E \in AB$ je dán rovností $|\sphericalangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hledanou množinou všech středů S je jistá úsečka mezi body C a E, která je určena podmínkami $S \in CE$,

$$\text{(i)} \quad |AS| \ge |BS| \quad \text{a} \quad \text{(ii)} \quad |\sphericalangle CBS| \ge 45°.$$

Z těchto podmínek zřejmě plyne, že se jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojúhelníku CDF a G je ten bod strany CF, který leží na úhlopříčce BD, obr. 2. Z bodů úsečky CE totiž podmínku (i) splňují právě body úsečky CF, podmínku (ii) právě body úsečky EG.



Obr. 1



Obr. 2

Zmíněné tvrzení dokážeme tak, že uvnitř úsečky CE zvolíme libovolný bod S a pokusíme se rekonstruovat vyhovující trojúhelník KLM, jehož strana KL má střed ve zvoleném bodě S. Zjistíme, že takový trojúhelník KLM existuje, právě když bod S splňuje obě podmínky (i) a (ii). Vraťme se znovu k obr. 1. Protože úhel KBL je pravý, jsou podle Thaletovy věty všechny tři úsečky SK, SB a SL shodné. Proto podle bodu S lze body K, L určit jako průsečíky úseček AB resp. BC s kružnicí o středu S a poloměru $|SB|$. Takový průsečík K ($K \neq B$) existuje, právě když platí podmínka (i), průsečík L ($L \neq B$) existuje, právě když platí nerovnost $|BS| \leq |CS|$, neboli $|\sphericalangle BCS| \leq |\sphericalangle CBS|$. Protože však $|\sphericalangle BCS| = 30°$, je poslední nerovnost zaručena silnější podmínkou (ii), jejíž nutnost se vyjeví za chvíli. Známe-li již body K a L, můžeme určit bod M jako průsečík strany CD s osou úsečky KL. Předpokládejme, že takový průsečík M existuje; sestrojený rovnoramenný trojúhelník KLM je pak skutečně rovnostranný, neboť čtyřúhelník $CMSL$ je tětivový (úhly u vrcholů C a S jsou pravé), a proto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60°$. Zbývá proto posoudit, kdy existuje průsečík úsečky CD s osou úsečky KL, tedy kdy body C, D leží v opačných polorovinách určených zmíněnou osou, jež jsou popsány nerovnicemi $|KX| \leq |LX|$ a $|KX| \geq |LX|$.

Protože platí $|KC| \geq |BC|$ a $|BC| \geq |LC|$, tedy $|KC| \geq |LC|$, je naším úkolem zjistit, kdy je splněna nerovnost $|KD| \leq |LD|$. Z pravoúhlých trojúhelníků KDA a LDC usoudíme, že poslední nerovnost platí, právě když $|AK| \leq |LC|$, neboli $|KB| \geq |LB|$, neboli $|\sphericalangle BLK| \geq 45°$. Úhel BLK je ale shodný s úhlem CBS (víme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostáváme podmínku (ii). Důkaz je hotov.

3. Dokažte, že dané přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \ldots,\ (A+n)^2 - A$$

dělitelný číslem n. (*P. Kaňovský*)

Řešení. (i) Předpokládejme nejprve, že $A = d^2$ pro některé přirozené d. Pak pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $(A+j)^2 - A = (d^2 + j)^2 - d^2 = (d^2 - d + j)(d^2 + d + j)$; protože jedno z n po sobě jdoucích čísel $(d^2 - d + j)$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$, je dělitelné číslem n, je číslem n dělitelné i příslušné číslo $(A+j)^2 - A$.

(ii) Předpokládejme nyní, že číslo A není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. V rozkladu čísla A na prvočinitele se pak některé prvočíslo p vyskytuje v lichém počtu exemplářů, tedy $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pro vhodné přirozené k. Ukažme, že například číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnost z textu úlohy. Připusťme naopak, že pro některé $j = 1, 2, \ldots, p^{2k}$ je rozdíl $(A+j)^2 - A$ dělitelný číslem p^{2k}. Čísla $(A+j)^2$ a A pak dávají stejné zbytky při dělení číslem p^{2k}, a tedy i při dělení číslem p^{2k-1}. Protože číslo A je dělitelné číslem p^{2k-1}, ne však číslem p^{2k}, platí totéž i o čísle $(A+j)^2$. To je ale spor, neboť $(A+j)^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

4. Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro které má rovnice

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12. (*P. Černek*)

Řešení. Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $x^2 - 1$ (který je roven nule, právě když $x \in \{-1, 1\}$) a po převedení všech členů na jednu stranu dostaneme kubickou rovnici

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \tag{1}$$

Jak dobře víme, každá kubická rovnice s reálnými koeficienty má v oboru reálných čísel buď *jeden*, nebo *tři* kořeny (počítáme-li je s přihlédnutím k jejich násobnosti). Protože obě řešení původní rovnice jsou kořeny rovnice (1), musí mít tato rovnice *tři* reálné kořeny. Pro tato čísla x_1, x_2, x_3 a pro koeficienty rovnice (1) platí známé Viètovy vzorce

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Abychom se dále vyhnuli některým zkouškám, připomeňme známý fakt, že *každé* řešení soustavy rovnic (2) je tvořeno trojicí kořenů rovnice (1), všechna řešení (2) jsou tedy permutace téže trojice čísel.

Předpoklad o dvou řešeních původní rovnice znamená, že buď právě jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 patří do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatní dva kořeny jsou různé, nebo je jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žádný z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatří. Řešení původní rovnice lze proto označit s a $12 - s$ tak, že nastane jedna z následujících možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$, nebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$; vždy přitom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vyjmenované možnosti teď jednotlivě posoudíme.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12 - s).$$

Druhá rovnice má dva kořeny $s = 5$ a $s = 7$, kterým podle třetí rovnice odpovídá stejná hodnota $b = -35$. Dvojice $(a, b) = (11, -35)$ je řešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12 - s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 11$, které však patří k nepřípustným hodnotám s (viz výše).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12 - s).$$

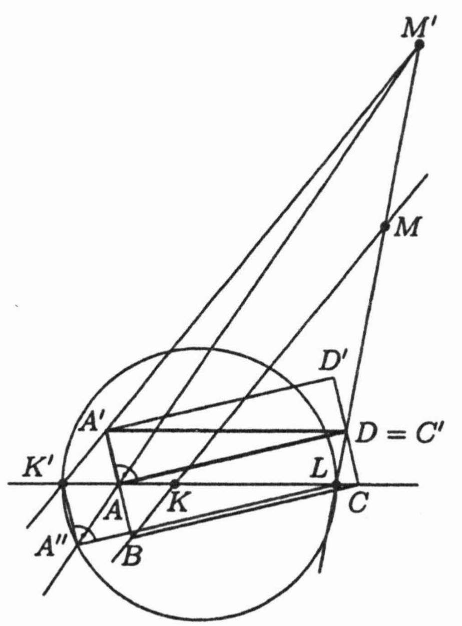
Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je nepřípustná, hodnotě $s = 23$ podle první a třetí rovnice odpovídají hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5\,819$. Dvojice $(a, b) = (35, -5\,819)$ je řešením úlohy.

Hledané dvojice (a, b) jsou dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5\,819)$.

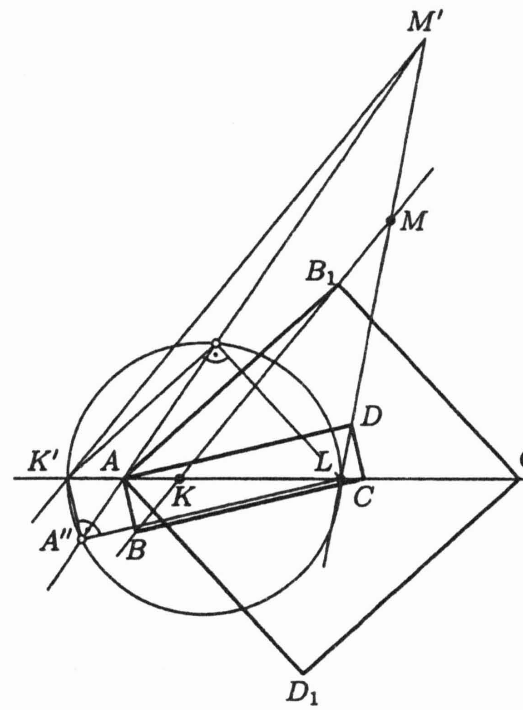
5. V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM.

(P. Calábek)

Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný pravoúhelník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\boldsymbol{BA}$ (obr. 3, $B' = A$). Bod A' leží na přímce souměrně sdružené s přímkou KM podle středu A — odpovídající průsečíky této přímky s přímkami LK a LM označme K' a M'. Protože úhlopříčka AC hledaného pravoúhelníku leží na přímce KL, je úhlopříčka $A'C'$ posunutého obdélníku $A'B'C'D'$ s KL rovnoběžná. Ve stejnolehlosti se středem M', která převádí bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L) odpovídá pravoúhlému trojúhelník-u $A'AC'$ trojúhelník-$K'A''L$. Bod A'' už dovedeme sestrojit, protože leží na Thaletově kružnici nad průměrem $K'L$ a na přímce $M'A$. Nyní již snadno sestrojíme hledaný pravoúhelník $ABCD$: nejprve určíme body A' a $C' = D$, které jsou obrazy bodů K' a L ve stejnolehlosti se středem M', jež převádí bod A'' do bodu A, a k nim doplníme vrcholy B a C jako obrazy bodů $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{AB}$.



Obr. 3



Obr. 4

Protože bod A leží uvnitř úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, protíná přímka $M'A$ Thaletovu kružnici nad průměrem $K'L$ vždy ve dvou bodech. Je-li A'' jeden z průsečíků uvedené Thaletovy kružnice s přímkou $M'A$ a $M' \neq A''$, určují body A, A'' hledanou stejnolehlost se středem M'. Pokud tedy bod M'' neleží na kružnici s průměrem $K'L$, má úloha dvě různá řešení $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 4). V opačném případě má úloha pouze jedno řešení.

6. Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

(*P. Kaňovský*)

Řešení. Dosadíme-li do dané rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnici

$$f\bigl(f(x)f(y)\bigr) = f\bigl(f(x)y\bigr) + f(x),$$

ze které vyjádříme $f(f(x)y) = f(f(x)f(y)) - f(x)$. Jiné vyjádření téhož výrazu $f(f(x)y)$ dostaneme, když v původní rovnici vyměníme navzájem hodnoty x a y; vyjde nám $f(f(x)y) = f(yx) + y$. Porovnáním obou vyjádření tak dostaneme rovnici

$$f(f(x)f(y)) = f(yx) + y + f(x),$$

jejíž levá strana se nezmění, vyměníme-li navzájem hodnoty x a y. Stejnou vlastnost musí proto mít i pravá strana této rovnice, takže musí platit

$$f(yx)+y+f(x) = f(xy)+x+f(y), \quad \text{neboli} \quad y+f(x) = x+f(y).$$

Další zřejmou úpravou dostáváme rovnici $f(x) - x = f(y) - y$, která musí být splněna pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkce $x \mapsto f(x) - x$ je na množině $\mathbb{R}^+$ konstantní, tedy hledaná funkce f musí být tvaru $f(x) = x + c$ pro vhodné číslo c. Po dosazení tohoto předpisu do obou stran původní rovnice

$$f(xf(y)) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c$$
$$f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c$$

zjišťujeme, že vyhovuje jedině $c = 1$. Hledaná funkce f je tudíž jediná a je určena vzorcem $f(x) = x + 1$.

Výsledková listina celostátního kola 51. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Jaroslav Hájek	4/4	GMK, Bílovec	7 7 7 3 6 7	37
2.	Jan Moláček	2/4	G J.K.Tyla, Hr. Králové	7 7 7 7 0 7	35
3.	Martin Tancer	4/4	G Zborovská, Praha	7 6 7 7 6 1	34
4.	Josef Cibulka	4/4	G Štěpánská, Praha	7 6 7 7 5 1	33
5.	Tomáš Protivínský	4/4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 7 7 0 4	32
6.	Vítězslav Kala	2/4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 2 7 1 7	31
7.	Ondřej Kurka	8/8	G Zborovská, Praha	7 6 2 7 0 1	23
8.–9.	Ondřej Čertík	7/8	G Zborovská, Praha	7 5 0 6 1 1	20
	Marek Krčál	3/4	G kpt. Jaroše, Brno	7 0 5 4 3 1	20
10.–11.	Pavel Čížek	7/8	G a OA Kralupy	7 5 2 4 0 1	19
	Pavel Kocourek	1/4	SPŠ Panská, Praha	6 0 2 7 3 1	19
12.	Libor Olšák	4/4	GMK, Bílovec	7 1 2 7 0 1	18

Další úspěšní řešitelé:

13.	Miroslav Hejna	7/8	G Rychnov n. Kněžnou	7 3 2 4 0 1	17
14.–15.	Jana Fabriková	2/4	G kpt. Jaroše, Brno	6 3 2 4 0 1	16
	Martin Klimeš	4/4	G Botičská, Praha 2	7 1 2 5 0 1	16
16.–18.	Lucia Jarešová	4/4	GJŠ Přerov	5 6 0 3 0 1	15
	Martin Káldy	3/4	G Zborovská, Praha	7 0 2 5 0 1	15
	Radek Mlada	6/8	G Jirsíkova, Pelhřimov	7 1 2 4 0 1	15
19.–22.	Tomáš Hanzák	4/4	G E. Beneše, Kladno	7 3 2 1 0 1	14
	Jaromír Kuben	4/8	G kpt. Jaroše, Brno	7 0 2 4 0 1	14
	Tomáš Ligurský	8/8	GJB, Přerov	6 0 0 7 0 1	14
	Alice Mašková	4/4	G Parléřova, Praha 6	7 0 2 4 0 1	14
23.–26.	Pavel Ludvík	3/4	GMK, Bílovec	1 4 2 4 0 2	13
	Josef Mládek	7/8	G Mikulášské nám., Plzeň	7 1 0 4 0 1	13
	Petr Sušil	7/8	G T. Novákové, Brno	7 1 2 2 0 1	13
	Ondřej Šedivý	7/7	G Jírovcova, Č. Budějovice	7 0 3 2 0 1	13

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2002–2003

Kategorie A

A-I-1. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ celých čísel s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje podmínku:

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének "+" a "-" pro libovolné $n > 1$, například $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1, \ldots$ Pro dané n určete všechny možné hodnoty x_n. (*J. Főldes*)

A-I-2. Na přímce p jsou dány různé body A, B, C v tomto pořadí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, které se dotýkají přímky p po řadě v bodech A, B, C. Kružnice k_A, k_B mají přitom vnější dotyk v bodě P a kružnice k_B, k_C vnější dotyk v bodě Q. Určete všechny hodnoty poloměru kružnice k_B pro něž je trojúhelník BPQ rovnoramenný. (*J. Zhouf*)

A-I-3. Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku.

(*P. Kaňovský*)

A-I-4. Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základě $z \geq 5$ platí následující kriterium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n, právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$. (*P. Černek*)

A-I-5. V rovině jsou dány tři různé body K, L, M, které v tomto pořadí leží na přímce. V této rovině najděte množinu všech vrcholů C čtverců $ABCD$ takových, že bod K leží na straně AB, bod L na úhlopříčce BD a bod M na straně CD. (*J. Šimša*)

A-I-6. Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi posune se figurka na pole s číslem o jedna menším, jinak na pole s číslem o jedna větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A? (*P. Černek*)

Kategorie B

B-I-1. Palindromem rozumíme přirozené číslo, které se čte zepředu i zezadu stejně, např. 16261. Najděte největší čtyřmístný palindrom, jehož druhá mocnina je také palindromem. (*E. Kováč*)

B-I-2. Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) vyhovující soustavě rovnic:

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3$$

(*J. Zhouf*)

B-I-3. Je dán trojúhelník se stranami délek a, b, c a obsahem S. Dokažte, že rovnost $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí, právě když existuje trojúhelník se stranami délek a, b, $2c$ a obsahem $2S$. (*P. Černek*)

B-I-4. *Krokem* budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel (p, q, r) trojicí $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k, k + 1, k + 2)$. (*P. Černek*)

B-I-5. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné. (*J. Švrček*)

B-I-6. V kartézské soustavě souřadnic $0uv$ znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice

$$|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$$

s neznámou x právě tři různá reálná řešení. (*J. Šimša*)

Kategorie C

C-I-1. Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby jejich součet byl co největší. (*J. Šimša*)

C-I-2. Je dán trojúhelník- ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží kolmici k přímce AB procházející bodem B. (*J. Švrček*)

C-I-3. Předpokládejme, že každá ze dvou bank A a B bude mít po následující dva roky stálou roční úrokovou míru. Kdybychom uložili 5/6 našich úspor u banky A a zbytek u banky B, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 67 000 Kč a po dvou letech na 74 900 Kč. Kdybychom však uložili 5/6 našich úspor u banky B a zbytek u banky A, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 71 000 Kč. Na jakou částku by se v takovém případě naše úspory zvýšily po dvou letech? (*J. Šimša*)

C-I-4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy. (*E. Kováč*)

C-I-5. K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n. (*J. Zhouf*)

C-I-6. V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, aby k byla kružnicí jemu vepsanou, její střed ležel ve čtvrtině jeho těžnice na stranu AB a aby vrchol C ležel na přímce p. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k. (*P. Černek*)