Emil Calda
Problém obrazové galerie

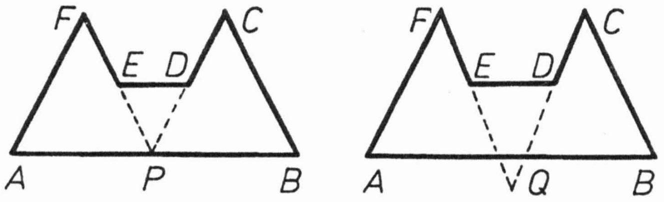
Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 3, 182–186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150545

PROBLÉM OBRAZOVÉ GALERIE

EMIL CALDA

Jako problém obrazové galerie se označuje úloha určit nejmenší počet zřízenců, kteří se ve výstavním prostoru, jehož půdorys je n-úhelník (nemusí být konvexní), dají rozmístit tak, že každý obraz je pod přímým dohledem aspoň jednoho z nich. Předpokládá se přitom, že každý z těchto zřízenců má pod vizuální kontrolou i všechny obrazy na stěnách, jejichž rovina prochází jeho stanovištěm.



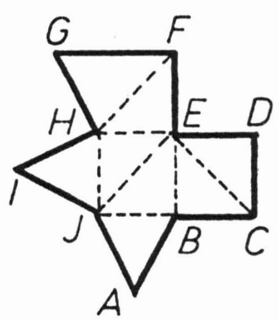
Obr. 1a Obr. 1b

Záludnost tohoto problému spočívá v tom, že sice známe počet stran zmíněného n-úhelníku, tj. číslo n, ale nevíme nic o tom, jaký má tvar. Pro ilustraci jsou na obr. 1a,b znázorněny výstavní prostory dvou galerií – obě mají tvar šestiúhelníku, ale na obr. 1a se přímky CD a EF protínají v bodě P na přímce AB, zatímco na obr. 1b se protínají v bodě Q vně šestiúhelníku $ABCDEF$. Je vidět, že pro galerii na obr. 1a stačí jediný dozorce – stojí-li v bodě P, jsou pod jeho dohledem obrazy na všech stěnách. Pro galerii na obr. 1b však jeden nestačí – ať se postaví kamkoli, vždy na některé obrazy ze svého místa vidět nebude. V tomto případě je tedy nutno vzít zřízenců více – z obr. 1b je patrné, že dva už stačí; zaujmou-li svá postavení např. v bodech E a D, bude každý obraz pozorovatelný aspoň jedním. (Úlohou určit množinu bodů na hranici šestiúhelníku na obr. 1b, z níž lze vybrat dva tak, aby každý obraz bylo vidět aspoň z jednoho, se zdržovat nebudeme – přenecháváme ji těm, které zaujme.)

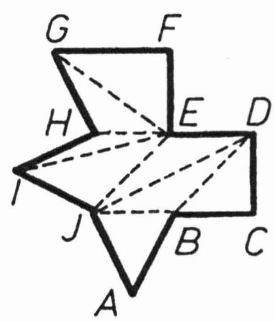
Ještě než se do řešení problému obrazové galerie pustíme, připomeňme si, že celá část reálného čísla x (píšeme $[x]$) je největší celé číslo, které není větší než x; $[x]$ je tedy celé číslo, pro něž platí: $[x] \leq x < [x] + 1$. Tento pojem se vyskytuje v následujícím tvrzení, které budeme při řešení našeho problému potřebovat:

Mezi třemi barvami, kterými je libovolně obarveno n bodů, existuje aspoň jedna, kterou je obarveno nejvýše $[\frac{n}{3}]$ bodů.

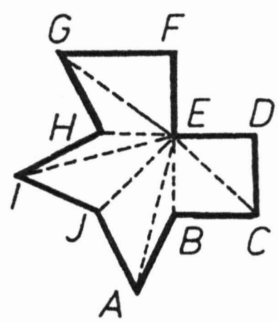
Kdyby totiž taková barva mezi n body neexistovala, bylo by každou obarveno aspoň $[\frac{n}{3}] + 1$ bodů, takže všemi třemi barvami by bylo obarveno $3[\frac{n}{3}] + 3$ bodů. To však není možné, neboť bodů bodů je pouze n, zatímco $3[\frac{n}{3}] + 3$ je větší než n; plyne to z nerovnosti $\frac{n}{3} < [\frac{n}{3}] + 1$.



Obr. 2a



Obr. 2b

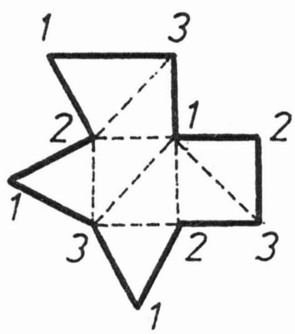


Obr. 2c

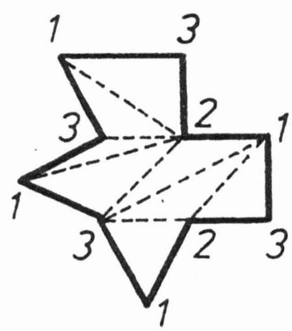
Poslední věta, kterou k vyřešení galerijního problému využijeme, se týká obarvení vrcholů mnohoúhelníku, v němž byla provedena triangulace. Provést triangulaci mnohoúhelníku znamená spojit některé jeho vrcholy úsečkami, které spolu se všemi stranami tohoto mnohoúhelníku vytvářejí soustavu nepřekrývajících se trojúhelníků zcela pokrývajících daný mnohoúhelník; na obr. 2a,b,c jsou pro ilustraci sestrojeny tři triangulace desetiúhelníku $ABCDEFGHIJ$. (O n-úhelníku, v němž byla provedena triangulace, budeme pro stručnost mluvit jako o n-úhelníku triangulovaném.) Zmíněná věta, kterou dokážeme indukcí, praví:

Vrcholy každého triangulovaného n-úhelníku lze obarvit třemi barvami tak, že každé dva, které patří témuž trojúhelníku triangulační sítě, mají různou barvu.

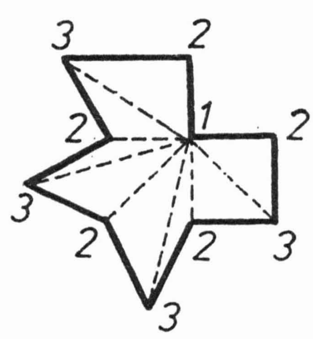
(Pro ilustraci jsou na obr. 3a,b,c obarveny barvami 1, 2, 3 vrcholy triangulovaných desetiúhelníků z obr. 2a,b,c.)



Obr. 3a



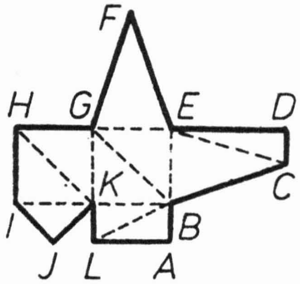
Obr. 3b



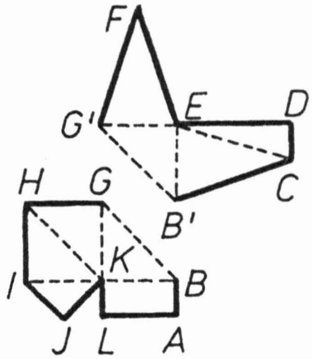
Obr. 3c

Pro $n = 3$ je toto tvrzení na první (a jakýkoli další) pohled evidentně pravdivé.

Předpokládejme dále, že uvedeným způsobem lze obarvit vrcholy každého triangulovaného n-úhelníku, kde $n >= 3$, a uvažujme triangulovaný $(n+1)$-úhelník. Protože má aspoň čtyři vrcholy, existuje v něm aspoň jeden trojúhelník triangulační sítě, jehož aspoň jedna strana není stranou tohoto $(n+1)$-úhelníku.



Obr. 4a



Obr. 4b

(Na obr. 4a je to např. úsečka BG.) Tato úsečka rozdělí uvažovaný $(n+1)$-úhelník na dva triangulované mnohoúhelníky, které – když si je představíme oddělené (podle obr. 4b) – mají nejvýše po n vrcholech, takže je lze podle indukčního předpokladu požadovaným způsobem obarvit. Zařídíme-li toto obarvení tak, aby vrcholy, které se „rozdvojily" (na obr. 4b to jsou vrcholy B, B' a G, G'), měly stejnou barvu (B, B' třeba červenou a G, G' modrou), dostaneme spojením obou mnohoúhelníků triangulovaný $(n+1)$-úhelník, jehož vrcholy jsou obarveny požadovaným způsobem. Tím je daná věta dokázána. – Všimněme si, že v termínech teorie grafů tato věta říká: *Chromatické číslo grafu, jehož uzly jsou vrcholy n-úhelníku a jehož hrany jsou stranami všech trojúhelníků tvořících jeho triangulaci, je rovno třem.*

Výsledky, k nimž jsme dospěli, umožňují dokázat větu, která problém obrazové galerie řeší:

Nejmenší počet zřízenců, který zaručuje, že při vhodném rozmístění v n-úhelníkovém půdorysu obrazové galerie budou pod vizuální kontrolou všechny její stěny, je

nejvýše $[\frac{n}{3}]$.

K důkazu této věty zvolíme libovolný n-úhelníkový půdorys, provedeme jeho triangulaci a všechny vrcholy tohoto n-úhelníku obarvíme třemi barvami tak, aby každé dva, které patří témuž trojúhelníku triangulační sítě, měly různou barvu; jak víme, je to možno provést vždycky. Zvolíme nyní barvu, kterou je obarven nejmenší počet vrcholů, a do každého z těchto vrcholů postavíme jednoho zřízence; tito zřízenci budou mít pod dohledem strany všech trojúhelníků, v jejichž vrcholech stojí. A protože stojí ve vrcholech každého trojúhelníku, mají pod dohledem strany všech trojúhelníků triangulační sítě, mezi nimiž jsou i všechny strany uvažovaného n-úhelníku. Vzhledem k tomu, že jsme v daném n-úhelníku zvolili nejmenší počet vrcholů obarvených stejnou barvou a že víme, že tento nejmenší počet je nejvýše $[\frac{n}{3}]$, je nejmenší počet dozírajících zřízenců také nejvýše roven $[\frac{n}{3}]$.

Všimněme si ještě, že při důkazu této věty jsme hned na začátku provedli triangulaci daného n-úhelníku. Protože ji však můžeme provést různými způsoby, vzniká otázka, zda pro každou dostaneme tentýž nejmenší počet zřízenců. Obrázky 3a,b,c ukazují, že nikoli: v obr. 3a vystačíme se třemi dozorci (nejmenší počet vrcholů obarvených stejnou barvou je roven třem), v obr. 3b se dvěma a v obr. 3c dokonce s jediným. To však s dokázanou větou není v rozporu – nejmenší počet zřízenců je ve všech třech případech nejvýše roven číslu $[\frac{n}{3}] = 3$.

A tak když nás jmenují ředitelem obrazové galerie v N., řeknou nám jen to, že její stěny tvoří n-úhelník, a budou chtít do půl hodiny vědět, kolik „obrazových dozorců“ budeme potřebovat, neuvede nás to do rozpaků. Počet $[\frac{n}{3}]$ určitě stačí a v případě, že jich bude potřebí méně, můžeme ty přebývající pověřit dozorem nad zbývajícími.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: calda@karlin.mff.cuni.cz