Jaroslav Zhouf; Václav Sýkora

Uzavřené úlohy do státní maturitní zkoušky z matematiky

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 3, 164–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150544

UZAVŘENÉ ÚLOHY DO STÁTNÍ MATURITNÍ ZKOUŠKY Z MATEMATIKY

JAROSLAV ZHOUF, VÁCLAV SÝKORA

Tento článek je psán v únoru 2002 a navazuje na článek stejných autorů z minulého čísla. Informaci o době jeho vzniku uvádíme z toho důvodu, že v současné době stále probíhají diskuse o definitivní podobě maturitní zkoušky. Jak se zdá, může být její obsah i organizační uspořádání odlišné od pojetí, které je uvedeno v *Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky v roce 2004* (Cermat, MŠMT, Praha 2000). Přesto jsme se rozhodli příspěvek uveřejnit. Považujeme za potřebné, aby učitelská veřejnost byla podrobně seznamována s úvahami vedoucími k nové podobě maturity, nezávisle na tom, že z různých stran slyšíme hlasy vyjadřující domněnky, že maturita z matematiky bude omezena jen na základní úroveň, nebo že maturita z matematiky bude jen povinně volitelná, nebo dokonce že bude vytvořena zcela nová struktura maturitní zkoušky apod.

Musíme proto zdůraznit, že další část tohoto příspěvku vychází z diskusí v kruzích odborníků (učitelů a didaktiků matematiky nebo matematiků), především pak z práce kolektivu, který byl v předcházejícím období pověřen zpracováním koncepce tzv. *nové maturity* z matematiky. Jeho složení je podrobněji popsáno v článku z minulého čísla. Předpokládáme, že v budoucím uspořádání maturitní zkoušky z matematiky bude zachováno začlenění tzv. *uzavřených úloh* do písemné části zkoušky. O problematice těchto úloh jsme již hovořili v předcházejícím příspěvku. V následujícím textu budeme analyzovat tuto problematiku na konkrétních příkladech. Podobné příklady jsou uveřejněny ve sbírkách již vydaných nebo připravovaných k novému pojetí maturity z matematiky. Bibliografické údaje uvádíme v odkazech na literaturu.

Podle dosavadních úvah týkajících se koncepce nové maturity z matematiky má státní část tvořit písemná zkouška obsahující jednak tzv. *úlohy uzavřené*, jednak tzv. *úlohy otevřené*.

Uzavřenou úlohou se rozumí úloha, v níž je žákovi nabídnuto několik odpovědí a ten z nich má vybrat jedinou správnou (úlohy tohoto typu jsou také známy pod názvem *multiplechoice*). V zadání úlohy je většinou popsán jednodušší, monotematický problém, na jehož řešení není třeba mnoho času (3-5 minut). Nehodnotí se postup řešení, který student použil, hodnocena je jen správnost výsledku.

Otevřenou úlohou se rozumí úloha, jejíž zápis řešení obsahuje i podrobný postup, jehož pomocí dospěl žák k výsledku. Tím se rozumí především příslušný algoritmus, jehož zápis si žák osvojil v hodinách vyučování matematice. V případě úloh řešených vhledem, u nichž je obtížné formalizovat algoritmus řešení běžným středoškolským matematickým aparátem, se předpokládá, že žák uvede podrobný komentář, v němž se pokusí popsat svůj postup alespoň verbálně. Hodnotitel tedy analyzuje celý postup žákova řešení, nezabývá se výlučně výsledkem řešení, ale může brát v úvahu i takové faktory, jako je racionalita řešení, grafický projev, užitá terminologie a symbolika apod. Většinou jde o komplexnější, časově náročnější úlohy, integrující poznatky a dovednosti různých oblastí matematiky. Pro jejich řešení se pracovně předpokládá časový interval 15-20 minut.

Podle *Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky v roce 2004* má písemná společná část obsahovat problémy z těchto devíti oblastí středoškolské matematiky: Číselné množiny, Algebraické výrazy, Rovnice a nerovnice, Funkce, Posloupnosti, Planimetrie, Stereometrie, Analytická geometrie, Kombinatorika/Pravděpodobnost/Statistika.

V tomto článku se budeme zabývat uzavřenými úlohami, které by měly být zařazeny do státní písemné maturitní zkoušky. Vybrali jsme devět úloh, po jedné z každé výše citované oblasti. Úlohy nebyly vybrány zcela náhodně, ale na základě specifických charakteristik, kterými se uzavřené úlohy vyznačují. Nejde nám o řešení těchto úloh, nehledíme ani na to, zda se jedná o úlohu pro základní, či vyšší úroveň; cílem příspěvku je poukázat na zmíněné specifické charakteristiky, jimiž se vybrané uzavřené úlohy vyznačují a odlišují.

Soubor uzavřených úloh:

1. Domy čtyř kamarádů, Adély, Barbory, Cyrila a Dominika, stojí v tomto pořadí v jedné ulici. Jestliže jde Adéla k Cyrilovi, ujde třikrát větší vzdálenost než při cestě k Barboře. Vyrazí-li Cyril k Barboře, ujde čtyřikrát větší vzdálenost než při cestě k Dominikovi. Jde-li Adéla k Barboře a Cyril k Dominikovi, pak:
   A/ urazí Adéla třikrát větší vzdálenost než Cyril
   B/ urazí Adéla třikrát menší vzdálenost než Cyril
   C/ urazí Adéla dvakrát menší vzdálenost než Cyril
   D/ urazí Adéla dvakrát větší vzdálenost než Cyril
   E/ urazí oba stejnou vzdálenost

2. Je dáno pět výrazů:
   I. druhá mocnina dvojnásobku součtu libovolných reálných čísel a a b
   II. dvojnásobek druhé mocniny součtu libovolných reálných čísel a a b
   III. součet dvojnásobků druhých mocnin libovolných reálných čísel a a b
   IV. součet druhých mocnin dvojnásobků libovolných reálných čísel a a b
   V. druhá mocnina součtu dvojnásobků libovolných reálných čísel a a b

   Z nich se rovnají:

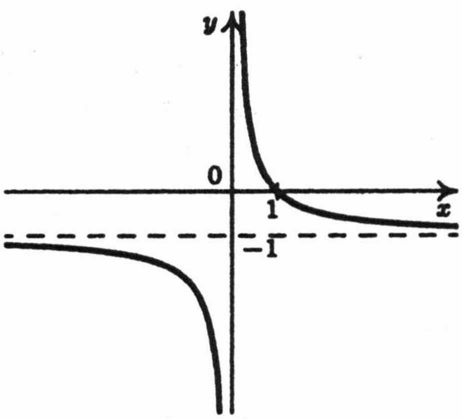
   A/ první a druhý výraz B/ první a pátý výraz
   C/ druhý a čtvrtý výraz D/ třetí a čtvrtý výraz
   E/ třetí a pátý výraz

3. Jarda ujel na kole vzdálenost 45 km. Kdyby zvýšil svou průměrnou rychlost o 5 km/h, byla by jeho jízda o 45 minut kratší. Doba, po kterou Jarda skutečně cestoval, je rovna:

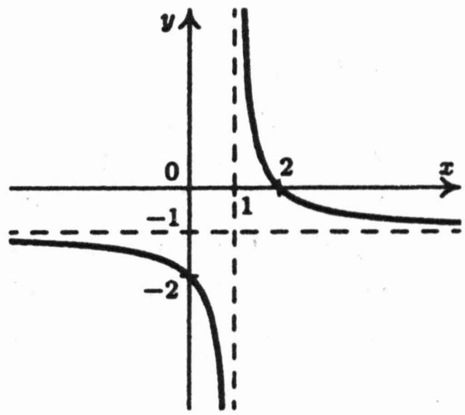
A/ 2 hodiny B/ 2 hodiny 15 minut
C/ 2 hodiny 30 minut D/ 2 hodiny 45 minut
E/ jiné hodnotě než v bodech A – D

4. Graf funkce $f : y = \dfrac{1}{x-1} - 1$ je na obrázku:

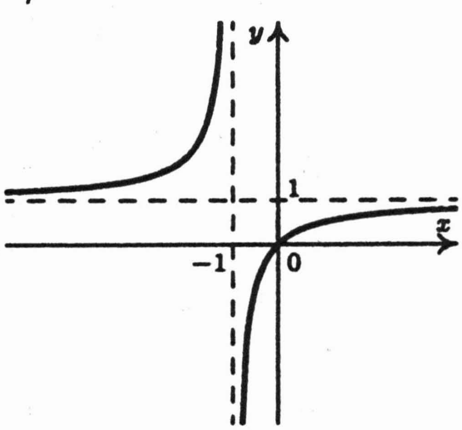
A/



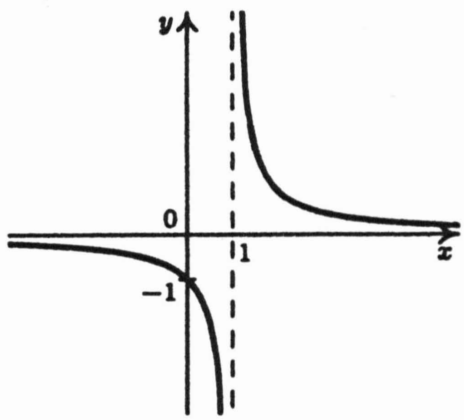
B/



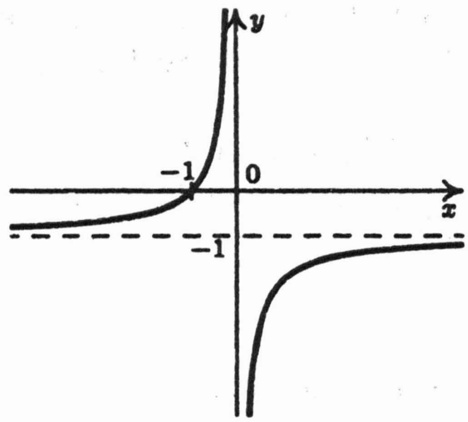
C/



D/

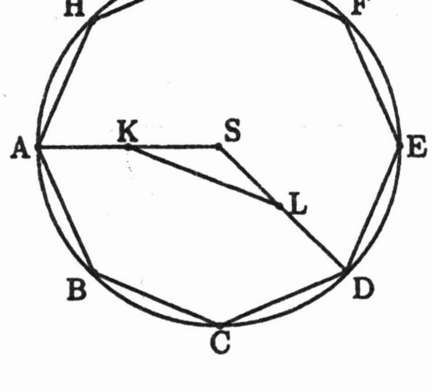


E/



5. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která má n-tý člen $a_n = 3n + 2$, a posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, která má rekurentní vyjádření $b_{n+1} = 3b_n + 2$, $b_1 = 5$. Z těchto posloupností:
A/ jsou aritmetické obě
B/ je aritmetická jen první
C/ je aritmetická jen druhá
D/ není aritmetická ani jedna

6. Pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ je vepsán do kružnice se středem S a poloměrem r. Body K a L jsou po řadě středy úseček AS a DS (viz obrázek). Délka úsečky KL je:
A/ r
B/ $\sqrt{2} \cdot r$
C/ $\sqrt{3} \cdot r$
D/ $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot r$
E/ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot r$



7. Jsou vyslovena čtyři tvrzení o pravidelném čtyřstěnu:
I. Mimoběžné hrany jsou navzájem kolmé.
II. Rovinným řezem může být čtverec.
III. Pata výšky tělesa spuštěná z vrcholu je těžištěm protilehlé trojúhelníkové stěny.
IV. Odchylka hrany od stěny, v níž hrana neleží, je menší než odchylka dvou stěn.
Z nich počet nepravdivých tvrzení je roven:
A/ 0   B/ 1   C/ 2   D/ 3   E/ 4

8. Rovnicí $x^2 - 2bx - y + a = 0$ je určena parabola s vrcholem $V = [2, -3]$, je-li:

A/ $a = 4$, $b = 2$ B/ $a = -3$, $b = -2$ C/ $a = -2$, $b = 2$
D/ $a = 1$, $b = 2$ E/ $a = 0$, $b = -2$

9. Ve třídě se vyučuje 10 předmětů. Podmínkou pro sestavení rozvrhu je zařazení matematiky na první, nebo druhou vyučovací hodinu. Jaký je počet způsobů sestavení rozvrhu na jeden den se 6 vyučovacími hodinami, na něž připadá 6 různých vyučovacích předmětů včetně matematiky?

A/ 36 580   B/ 32 400   C/ 30 240
D/ 24 200   E/ 16 820

(Správná řešení: 1.D, 2.B, 3.E, 4.B, 5.D, 6.D, 7.A, 8.D, 9.C)

Autory úloh jsou v tomto pořadí S. Krčková, J. Houska, J. Herman – J. Šimša, S. Krčková, J. Zhouf, J. Zhouf, J. Houska, J. Černý, V. Sýkora.

Úloha 1 je z tématu *Číselné množiny*. Jde o úlohu poměrně jednoduchou, její obtížnost je hlavně v tom, že v textu popisujícím danou situaci není explicite stanovena instrukce, jejíž splnění (vyřešení problému) by umožnilo vybrat z nabídnutých odpovědí jednoznačně správný výsledek. K tomu je nutné vzít v úvahu i nabízené odpovědi, z nichž žák pozná, jak má předem rozmyšlené řešení dokončit. Nakonec vybere z nabízených odpovědí tu správnou.

Úloha 2 je z tématu *Algebraické výrazy*. Tato úloha se podobá úloze 1, žák musí řešit více (pět) různých dílčích úloh. Odlišnost od předcházející úlohy je v tom, že dílčí úlohy řeší už po přečtení úvodního textu (formalizace daného verbálního textu algebraickou symbolikou a transformace znakových reprezentací určitého vztahu mezi proměnnými). Na základě výsledku potom vybere správnou odpověď z pěti nabídnutých možností. Zkušenosti ukazují, že pro žáky je řešení takové úlohy jednodušší v porovnání s úlohou 1.

Úloha 3 je z tématu *Rovnice a nerovnice*. Její specifikum spočívá v tom, že text odpovědi E je formálně logicky odlišný od odpovědí A – D. Ty mají totiž tu vlastnost, že text zadání doplňují na klasický výrok s konstantními údaji, jehož pravdivostní hodnotu žák určí správně nebo chybně. Odpověď E doplňuje text zadání úlohy z logického hlediska rovněž na klasický výrok, v žácích však vyvolává představu proměnné. „Jiná“ hodnota navozuje pojem „neznámé“, měla by tedy vést k matematizaci rovnicí, tedy výrokovou formou. Struktura nabízených odpovědí představuje v tomto smyslu určitý kvalitativní skok, který nutí žáka k přechodu na jinou „úroveň“ myšlení. Navíc je v této úloze odpověď E správná. V jiných úlohách s podobnou odpovědí samozřejmě tato možnost nemusí nastat.

Úloha 4 je z tématu *Funkce*. Patří do skupiny nejčastěji formulovaných úloh, tj. vyřeší se po přečtení úvodního textu a z nabídnutých odpovědí se vybere ta správná. Možná rychlejší řešení spočívá v analýze jednotlivých nabídnutých odpovědí a zpětném porovnání se zadáním v úvodním textu úlohy. V tom se tato úloha podobá úloze 1, rozdíl je ale v tom, že žák neanalyzuje text, ale grafickou podobu zadání matematické úlohy. Specifikem je tedy znaková reprezentace; místo verbálního popisu problémové situace má žák k dispozici grafické (ikonické) znázornění závislostí formalizovaných terminologií a symbolikou z tématu o funkcích. Připomeňme důležitost transformace znakových reprezentací pro ontogenezi pojmů. Stejně jako v úloze 2 jsme se zabývali osvojením žákovy dovednosti přecházet od verbální reprezentace ke znakové reprezentaci využívající formální algebraickou symboliku, je také vizualizace problémových situací prostřednictvím ikonických reprezentací důležitá pro osvojení pojmu funkce. Didaktici matematiky tvrdí, že žák by měl být schopen pracovat s každým matematickým pojmem nebo poznatkem v několika různých znakových reprezentacích.

Úloha 5 je z tématu *Posloupnosti.* V uzavřených úlohách obvykle uvádíme čtyři, či pět nabídnutých odpovědí. V této úloze jsou nabídnuty jen čtyři odpovědi oproti obvyklejším pěti. Variabilita počtu nabízených odpovědí závisí při formulaci uzavřených úloh na různých faktorech. Například u úloh, kde přichází v úvahu to, že žák vybere správnou odpověď na základě dosazení nabízených výsledků, se budeme snažit jejich počet zvýšit. Existují situace, kdy je zjevně umělé, nebo dokonce nemožné snažit se o dodržení počtu pěti nabízených odpovědí. Právě takovou situaci představuje uvedená úloha týkající se různých možností výroků o aritmetické posloupnosti, takže jsou zde logicky možné jen čtyři odpovědi.

Úloha 6 je z tématu *Planimetrie.* Její zvláštností je zařazení obrázku do textu zadání úlohy úlohy. S touto formou se setkáváme nejvíce v geometrických úlohách. Obrázek usnadňuje analýzu textu úlohy a odstraňuje případné nejednoznačnosti související s polohou geometrických útvarů. Jeho hlavním cílem je však urychlení procesu řešení úlohy. Pokud bychom trvali na tom, aby obrázek kreslil sám žák, řešení úlohy by se neúměrně prodloužilo.

Úloha 7 je z tématu *Stereometrie.* Je hlavně odlišná v tom, že oproti většině úloh v testu pokládá otázku v negativní podobě. Neptáme se na to, co platí, nýbrž odpovídáme na otázku, co neplatí. Ze zkušenosti víme, že uchopení textu zadání úlohy je pro žáka v takovém případě značně obtížnější.

Úloha 8 je z tématu *Analytická geometrie.* Poskytuje možnost řešení volbou mezi dvěma způsoby. Jednak je možné úlohu vyřešit obecně a pak z nabídnutých odpovědí vybrat tu správnou. Druhá možnost řešení spočívá v prostém dosazením hodnot obsažených v každé z nabídnutých odpovědí do textu úlohy a následné vyřešení úlohy s konkrétními hodnotami. Žák provádí vlastně jen zkoušku. Mnohdy se tato druhá možnost řešení jeví jako rychlejší a dokonce jako jediná v případě, že žák neumí provést obecné řešení.

Úloha 9 je z tématu *Kombinatorika/Pravděpodobnost/Statistika*. U všech předchozích osmi úloh jsou vždy nabídnuté odpovědi součástí poslední věty textu, tj. poslední věta textu končí až posledním slovem odpovědi. V této úloze je odlišným způsobem ukončena otázka úlohy. Končí otazníkem v poslední větě hlavního textu, odpovědi jsou pak izolovaně vyslovené informace.

Výše popsané charakteristiky jednotlivých uzavřených úloh jsou samozřejmě jen malou ukázkou velké pestrosti forem těchto matematických úloh. Jednak jsme analyzovali málo úloh, jednak není vůbec možné žádnou vyčerpávající klasifikaci forem provést, protože jednotlivé matematické úlohy jsou svojí podstatou zvláštní a vyžadují také zvláštní zpracování textu. Je také jasné, že formu textu ovlivňuje matematický obsah úlohy a že naopak matematický obsah ovlivňuje forma, která je pro textaci úlohy použita. Do testu je pak vhodné vybrat takové uzavřené úlohy, jejichž text tvoří po formální stránce co nejširší spektrum a v nichž jsou také v co největší šíři zastoupena jednotlivá matematická témata. Problematika tvorby testu jako celku však tvoří samostatnou kapitolu, které se v tomto článku už věnovat nebudeme.

Literatura

[1] Sýkora, V. a kol., *Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky v roce 2004*, Cermat, MŠMT, Praha, 2000.

[2] Sýkora, V. a kol., *Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky z matematiky, základní obtížnost*, Tauris, Praha, 2001

[3] Sýkora, V. a kol., *Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky z matematiky, vyšší obtížnost*, Tauris, Praha, 2001

[4] Zhouf, J. a kol., *Sbírka úloh z matematiky pro státní část maturitní zkoušky*, Prometheus, Praha, v tisku.

RNDr. Václav Sýkora, CSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha
M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1
e-mail: Vaclav.Sykora@pedf.cuni.cz

RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha
M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1
e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz