

Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (2): Příběh druhý. Bleší cirkus

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 3, 129–135

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150540>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY (2)

Příběh druhý — BLEŠÍ CIRKUS

M. HEJNÝ, M. TICHÁ

Děti ze třetí třídy se každou středu scházejí v kroužku ochránců přírody. Jejich vedoucí, Matějova spolužačka, jednou nemohla přijít. Poprosila proto Matěje, aby ji zastoupil. Matěj souhlasil; aspoň s Filipem vyzkoušejí některou z pohádek, které Filip přivezl z matematického tábora. Moc se na to těšil.

Na schůzku přišlo šest dětí a všechny s nadšením přivítaly návrh společně si zahrát pohádku.

„Já budu princezna“ nabídla se Lucka.

„Nebudeš, protože v naší pohádce žádná princezna nevystupuje“, zklamal ji Matěj a začal vyprávět.

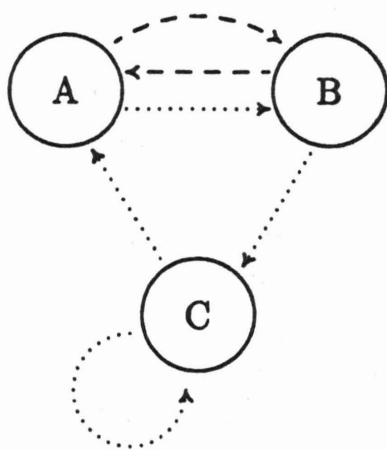
„To, co vám budu povídat, vlastně ani není pohádka, ale je to pravda pravdoucí. Je to příhoda, kterou jsem zažil, když jsem byl u babičky a dědečka na prázdninách. Ve stodole jsem si hrával na parašutistu. Z výšky jsem skákal do sena. Do té stodoly si kromě mně chodilo hrát také šest kamarádek – blešek. Tři byly domácí a tři z dolního konce vesnice. Scházely se pravidelně a hrávaly si na starém rozviklaném dubovém stole. Jednou, když už mě omrzelo skákání do sena, seděl jsem nahoře na žebříku a pozoroval blešky, jak si hrají na schovávanou a potom na slepou bábu. Když byla hra v nejlepším, jedna z blešek vykřikla „Konec hry, holky, jede nám autobus!“ Ke stodole se blížil pes Brok, který bydlel na dolním konci vesnice. Když procházel kolem stolu, naskočily si tři blešky do huňatého kožichu a zamávaly na pozdrav přítelkyním. Tři osiřelé blešky zůstaly na stole smutně stát a nejmenší z nich se rozplakala. Slitoval jsem se nad nimi a povzbudivě jsem je oslovil:

„Jestli chcete, naučím vás hru na bleší cirkus.“

¹Příspěvek byl připraven za podpory grantu GAČR 406/02/0829. Upraveno podle stejnojmenného příběhu knížky M. Hejný, L. Niepel: Šestnást matematických příběhů, SPN Bratislava, 1983

„Chceme, chceme,“ volaly blešky, když se po chvílce ticha vzpamatovaly z překvapení.

Slezl jsem ze žebříku, vyndal starou čtvrtku, pastelky a nakreslil tento obrázek“ (původně červené šipky jsou zde kresleny tečkovaně a modré čárkovaně).



„Pak jsem bleškám vysvětlil pravidla hry. Každá si skočí do jednoho ze tří nakreslených kroužků. V každém kroužku bude právě jedna bleška. Já potom zavelím a prásknu bičem. Například zakřičím *červená* a prásknu. Na tento povel každá bleška přeskočí do kroužku, ke kterému vede červená šipka. Bleška z kroužku *A* přeskočí do kroužku *B*, bleška z kroužku *B* přeskočí do kroužku *C* a bleška z kroužku *C* přeskočí do kroužku *A*. Kdo je první na správném místě zvítězí. Kdo to poplete, vypadává ze hry. Podobně na povel *modrá* přeskočí každá bleška do toho kroužku, ke kterému vede modrá šipka. Tak bleška z *A* skáče do *B*, bleška z *B* skáče do *A* a bleška z *C* si jen poskočí na místě“.

„Já bych si chtěla hrát. Pojdme si hrát na blešky!“ žebroula malá Jana. Žadonily i ostatní děti.

„Prosím,“ řekl Matěj a poprosil Filipa, aby na podlahu nakreslil křídou hřiště. Přesně takové, jaké měly blešky. Jakmile bylo hřiště nakreslené, všechny děti se do něj natlačily. „Počkejte, ne všichni najednou,“ rázně řekl Filip. „Věra, Jana a Honza se postaví na kroužky *A*, *B* a *C* a ostatní si zatím sednou na lavici. Potom se vystřídáte.“

Děti udělaly, co jim řekl. Filip pak odkudsi vyhrabal hůlku s dlouhým provázkem a na ukázkou tímto bičem dvakrát prásknul. „Tak pozor, začínáme. Je vám všechno jasné?“ zeptal se ještě Filip.

„Ano, je to jasné!“ řekly blešky – třetíci. Filip tedy zavelel *červená* a prásknul bičem. Blešky přeběhly bez chyby. Filip ještě dvakrát zopakoval povel *červená* a blešky ho správně vyplnily. Po třech povelích *červená* se dostaly do původní pozice. Teď Filip zavelel *modrá* a prásknul bičem. Věra s Janou si navzájem vyměnily místa, Honza svůj kroužek oběhl a vrátil se zpět.

„Výborně,“ pochválil blešky Matěj. „Vidím, že jste hru pochopili. A ty, Honzo, nemusíš běhat kolem svého kroužku – zůstaň stát.“

„Ticho, soustředte se“ – přikázal Filip. „Přijde těžký povel *červená, modrá*.“

Děti se na sebe chvíli bezradně dívaly, potom se Jana rozběhla podle modré, Honza podle červené a srazili se v kroužku *A*.

„Tak moment, blešky, vraťte se na místa a poslouchejte. Když velím *červená, modrá*, tak každý utíká nejprve po červené a potom po modré. Tedy ty, Honzo, běžíš nejprve z *C* po červené do *A*, potom po modré do *B*. Nemusíš však přebíhat. Stačí, když se nejprve zamyslíš a pak poběžíš s rovnou do *B*. Ty, Věro, máš běžet po červené z *A* do *B* a potom po modré zpět do *A*. Tedy, když budeš chytrá, zůstaneš stát na *A* a ani se nepohneš.“

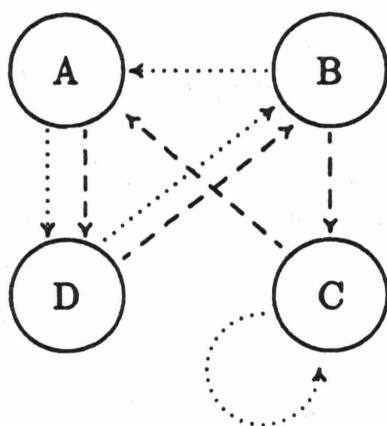
„A já bych běžela z *B* do *C*,“ řekla Jana, „červená mi přikazuje běžet do *C* a modrá mi přikazuje zůstat na místě.“

„Přesně tak. Vidím, že už to chápete,“ pochválil děti Filip a zavelel *červená, modrá, červená* a prásknul bičem. Bylo vidět jak děti uvažují, kdo kam poběží. Jako první vyběhla Jana z *B* do *A*, Honza si jenom poskočil na kroužku *C* a Věra přeběhla z *A* do *B*.

„Teď poslouchejte pokračování pohádky,“ řekl Matěj. „Pes Brok si vzpomněl, že na horním konci vesnice zapomněl pozdravit psa Azora a rozhodl se vrátit. Když šel kolem stolu, kde jsme si hráli na cirkus, vyskočily tři blešky z jeho kožichu nahoru na stůl a zapojily se do hry.“

Děti, které dosud seděly na lavici, radostně vyskočily a přiběhly ke hřišti.

„Vítáme další blešky. Když je nás víc, můžeme hřiště trochu zvětšit,“ řekl Filip a nakreslil nové hřiště.



„Blešky Jana a Věra se budou chvíli dívat a kontrolovat, zda ostatní blešky nic nepopletou. Honza a blešky, které přijely na Brokovi, se rozestaví na hřišti. Připravte se a pozor: *červená, modrá,*“ zazněl první povel a Filip prásknul bičem.

Děti se rozběhly. Trochu zmatku nadělala Lucka, která z *B* utíkala do *C*, ale potom se opravila a postavila se správně do *D*. Honza správně přeběhl z *A* do *B*, Eva z *C* do *A* a David z *D* do *C*. Další povel byl velmi náročný: *modrá, modrá, červená, modrá*. Tentokrát bleškám dost dlouho trvalo, než si každá uvědomila, jak má běžet. Ale nakonec to zvládly. Eva skočila z *A* do *D*, Honza zůstal v *B*, David v *C* a Lucka přeběhla z *D* do *A*.

Hra na blešky děti zaujala. Vydržely si hrát víc než hodinu. Když se rozcházely, Jana s Věrkou ještě prosily Matěje a Filipa, aby i příští středu přišli vyprávět nějakou pohádku, ve které budou moci vystupovat.

Matěj s Filipem měli radost, že si děti zahrály a něčemu novému se naučily. A nejen děti. I oni. Při hře je totiž začaly napaadat další zcela nové úlohy. Například: Jaký je třeba dát povel, aby blešky předvedly toto přestavení: blešky z *A* a *C* zůstanou na místě a blešky z *D* a *B* se navzájem vymění? Kolik různých programů se dá předvést na hřišti pro čtyři blešky? Je možné jeden a týž program velet různými povelými?

K otázkám, které Filipa a Matěje napadly, se vrátíme v úlohách. Nyní si něco povíme o tom, co z našeho blešího cirkusu patří do matematiky.

Podstatou hry jsou zobrazení (program blešek) a jejich vzájemné skládání. Matematická disciplína, která tyto situace studuje, se jmenuje *teorie grup*. Objevili ji, zcela nezávisle, v první polovině minulého století dva mladí matematikové – Francouz E. Galois a Nor N. Abel. Později poznatky teorie grup využil německý matematik F. Klein a jejich pomocí sjednotil různorodé geometrické teorie. Mimochodem, také mnohé hlavolamy, jako Hra 15, nebo maďarská Rubikova čarovná kostka jsou založeny na teorii grup. Tyto hry se podobají naší hře s bleškami, ale jsou náročnější.

Při řešení následujících úloh se tedy budete učit základům jedné z nejdůležitějších částí moderní algebry – teorie grup. Nesmí vás to však odradit ani poplést! Hlavní je, aby se vám podařilo některé z bleších úloh vyřešit. Jestliže si s bleškami trochu pohrajete, zjistíte, že tytéž programy je možné provést na základě (pomocí) různých povelů. Abychom se vyhnuli příliš dlouhým povelům, které by mohly blešky poplést, budeme při řešení úloh hledat povely co nejkratší. Počet slov v povelu nazveme jeho délkou a kvůli stručnosti nahradíme slova *červená* a *modrá* písmeny c , m . Výpověď *na povel* (c) *skočí bleška z A na C, bleška z B na A a bleška C na B* budeme v dalším stručně zapisovat $(c) : (A, B, C) \rightarrow (C, A, B)$. Podobně pro další případy.

ÚLOHY

Úloha 1. Na jaký povel, skládající se ze dvou slov, předvedou blešky na obrázku 1 program

- a) $(A, B, C) \rightarrow (C, A, B)$
(tedy: A běží na C , B na A a C na B),
- b) $(A, B, C) \rightarrow (A, C, B)$,
- c) $(A, B, C) \rightarrow (C, B, A)$.

Úloha 2. Najděte povel, skládající se z pěti slov, na který každá bleška na obrázku 1 zůstane stát na místě.

Úloha 3. Jaký program předvedou blešky na hřišti z obrázku 2 na povel

- a) (c, c, c) , b) (c, m) , c) (m, c) ,
 d) (m, c, m, c) , e) (m, c, m, c, m, c) ?

Úloha 4. Na jaký povel předvedou blešky na obrázku 2 program

- a) $(A, B, C, D) \rightarrow (B, A, D, C)$,
 b) $(A, B, C, D) \rightarrow (C, B, D, A)$,
 c) $(A, B, C, D) \rightarrow (D, B, A, C)$,
 d) $(A, B, C, D) \rightarrow (C, D, A, B)$?

Úloha 5. Červené šipky na hřišti pro 4 blešky, jsou nakresleny tak, že na povel (c) předvedou program $(A, B, C, D) \rightarrow (B, C, D, A)$. Dokreslete modré šipky tak, aby byla splněna podmínka: *program na povel (m, c) bude stejný jako na povel (c, m)* . Najděte všechna řešení. Ukažte, že povel (m) lze ve všech nalezených případech vyjádřit pomocí opakování povelu (c) .

Úloha 6. Kolik různých programů existuje pro hřiště se a) třemi, b) čtyřmi, c) pěti kroužky?

Úloha 7. Na hřišti pro 5 blešek platí $(c) : (A, B, C, D, E) \rightarrow (B, C, D, E, A)$ a $(m) : (A, B, C, D, E) \rightarrow (B, A, C, D, E)$.

Ukažte, že na tomto hřišti lze uskutečnit program v němž pětice (A, B, C, D, E) přejde do pětice

- a) (A, C, B, D, E) , b) (A, B, D, C, E) ,
 c) (A, B, C, E, D) , d) (E, B, C, D, A) .

Úloha 8. V situaci popsané v předchozí úloze vidíme, že pomocí povelů (c) a (m) lze přestavit kterékoli dvě sousední blešky přičemž další tři blešky zůstanou na místě. Pomocí tohoto poznání lze najít povel pro program

- a) $(A, B, C, D, E) \rightarrow (C, B, A, D, E)$,
 b) $(A, B, C, D, E) \rightarrow (A, D, C, A, E)$.

Řešení úloh

Úloha 1: a) (c, c) , b) (c, m) , c) (m, c) .

Úloha 2: Například (b, b, c, c, c) nebo (c, b, b, c, c) .

Úloha 3: a) Každá bleška zůstane na místě. Program (na jakémkoli hřišti), u kterého každá bleška zůstává na místě, i příslušný povel, nazýváme *identita*;

b) $(A, B, C, D) \rightarrow (B, D, A, C)$; c) $(A, B, C, D) \rightarrow (B, C, D, A)$;

d) $(A, B, C, D) \rightarrow (C, D, A, B)$; e) $(A, B, C, D) \rightarrow (D, A, B, C)$.

Úloha 4: a) (m, m) ; b) (c, m, m) , c) (m, m, c, c) , d) (m, c, m, c) .

Úloha 5: Úloha má čtyři řešení. Na povel (m) přejde čtveřice (A, B, C, D) do některé ze čtveřic (B, C, D, A) , (C, D, A, B) , (D, A, B, C) , (A, B, C, D) . U posledního případu se jedná o identitu – každá bleška zůstává na místě. Každý ze čtyř uvedených povelů (c) je možné vyjádřit pomocí povelu (m) takto: v případě čtveřice (B, C, D, A) je $(c) = (m)$, v případě čtveřice (C, D, A, B) je $(c) = (m, m)$, v případě čtveřice (D, A, B, C) je $(c) = (m, m, m)$ a v případě identity je $(c) = (m, m, m, m)$.

Úloha 6: a) 6; b) 24; c) 120. Pro hřiště s n kroužky je počet různých programů roven číslu $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Toto číslo se nazývá *n faktoriál*. Číslo n vyjadřuje počet různých způsobů jak postavit n blešek na n kroužků tak, aby v každém kroužku byla právě jedna bleška.

Úloha 7: Jeden z možných povelů pro daný program je a) (c, c, c, c, m, c) ; b) (c, c, c, m, c, c) ; c) (c, c, m, c, c, c) ; d) (c, m, c, c, c, c) .

Úloha 8: a) Nejprve přestavíme blešky v kruzích A, B – to uděláme povelom (m) , pak blešky v kruzích B, C – to uděláme povelom (c, c, c, c, m, c) . Výsledný povel tedy bude (m, c, c, c, c, m, c) . b) Postupujeme podobně. Uděláme přestavení $B \leftrightarrow C$ a pak přestavení $C \leftrightarrow D$. Příslušný povel bude složen až z tuctu písmen: $(c, c, c, c, m, c, c, c, c, m, c, c)$.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha

M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1

e-mail: Milan.Hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá, CSc.

Matematický ústav AV ČR

Žitná 25, 115 67 Praha 1

e-mail: ticha@math.cas.cz