

Silvie Kuráňová

Je možné si matematiku představit?

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 4, 216–224

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150533>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2010

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

JE MOŽNÉ SI MATEMATIKU PŘEDSTAVIT?

SILVIE KURÁŇOVÁ

1. Motivace

V rámci doktorského studia na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity se zaměřením na eLearning (elektronické učení), resp. blended learning (elektronická podpora výuky) v matematice, se již čtvrtým rokem věnuji nástrojům pro tvorbu výukových materiálů, které by měly doplnit a rozšířit stávající skripta a učební texty. Protože i já jsem se častokrát ptala „Co to vlastně počítám, co tyto pojmy znamenají, jak si je mám představit?“, je jedním z mých hlavních cílů vizualizovat a názorně vysvětlovat probíranou látku a tím pozitivně motivovat studenty ke studiu.

Nemyslím si, že křída a tabule jsou již historickou záležitostí, a že elektronické učení by mohlo plnohodnotně nahradit interakci učitel–žák. Přesto se však domnívám, že je dobré reagovat na stále větší oblibu počítačů v řadách studentů a začít využívat počítačové technologie také ve výuce a tím přirozeně sledovat současný trend. Je dobré si také uvědomit, že elektronický dokument může využívat poměrně zajímavé nástroje a tím významně zvyšovat svou názornost a interaktivitu. Podobného efektu jen těžko dosahujeme s využitím „klasického“ přístupu tužka–papír.

V následujícím textu bych Vám ráda přiblížila jeden z takových elektronických nástrojů – interaktivní 3D grafiku obsaženou přímo v PDF dokumentu, pro jejíž korektní prohlížení stačí pouze volně šiřitelný Adobe Reader verze 8.1 a vyšší. Protože v tištěné verzi tohoto článku je ukázka 3D grafiky ve statické podobě, nabízím čtenáři k prohlédnutí také elektronickou verzi na adrese <http://www.math.muni.cz/~xkuranov/publikace/ucitel-MA-09.pdf>.

„Prostorové obrázky“ jsme nejdříve s kolegou Vondrou vytvářeli jako ilustrační grafiku k řešeným a testovým příkladům pro

sbíрку z diferenciálního počtu funkcí více proměnných [3]¹. Během tvorby jsme si však uvědomili, jak názorná tato grafika je a že by byla škoda nevyužít ji šířeji. S nadcházejícím semestrem jsme se rozhodli 3D grafiku prezentovat přímo na přednáškách. Vznikla tak sada tří řešených demonstračních příkladů vysvětlujících některé pojmy z diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

2. Jak PDF dokument k 3D grafice přišel

Formát PDF (přenosný formát dokumentu) je pro akademické účely vhodný z několika důvodů. Jedná se o pravděpodobně nejrozšířenější formát akceptovaný většinou operačních systémů, které se v dnešní době používají. Zároveň je spolehlivý, tj. zaručuje, že dokumenty budou mít za všech okolností původní vzhled, včetně použitých písem, grafiky a rozvržení stránky. Lze jej vytvořit zdarma volně šiřitelným softwarem (např. pdfL^AT_EXem²). V neposlední řadě díky neustálému vývoji přináší mnohá vylepšení a nové možnosti.

Začlenění Acrobat JavaScriptu do PDF bylo klíčovým krokem na cestě ke zvýšení interaktivity v něm vytvářených dokumentů. Poslední verze PDF dokonce podporuje multimédia (audio/video), 3D objekty, flash animace aj.

S ohledem na tyto nové možnosti PDF dokumentu jsme ve své tvorbě [1,3] využili ilustrativní 3D grafiku pro doplnění řešených příkladů a formulářové prvky pro tvorbu interaktivních testů s okamžitou zpětnou vazbou. O testech více viz [3,4].

3D grafy jsme nejdříve kreslili v systému Maple. Abychom je mohli začlenit do PDF, potřebovali jsme obrázky vyexportovat do formátu U3D³. Protože stávající verze Maplu (používali jsme verzi 11) přímý export do U3D nepodporuje, využili jsem export do formátu VRML⁴ a jeho následný převod do U3D pomocí komerčního programu Deep Exploration od společnosti Right Hemisphere [7].

¹Podpořeno grantem FRVŠ 1411/2008.

²L^AT_EX (čti [latech]) je software pro sazbu dokumentů ve velmi vysoké typografické kvalitě.

³Universal 3D (U3D) je formát pro trojrozměrná grafická data.

⁴VRML (Virtual Reality Modeling Language) je grafický formát zalo-

K převodu existuje také nekomerční cesta, ta je však zatím popsána pouze v diskusním fóru [8]. Výsledný PDF dokument pak již snadno vysázíme např. pdfL^AT_EXem a s využitím balíčku movie15. Celý postup je podrobně popsán např. v [5,6].

3. Využití ve výuce – demonstrační příklady

Pro jednodušší orientaci v materiálech pro podporu výuky funkcí dvou proměnných jsme připravili v informačním systému Masarykovy univerzity interaktivní osnovu [1], která kromě demonstrací obsahuje řadu procvičovacích testů a další podklady k samostudiu.

3D grafiku jsme využili k ilustraci těchto základních pojmů: parciální derivace (3 řešené příklady), diferenciál (2 řešené příklady) a extrémy (3 řešené příklady) a vytvořili tak tři prezentace, které vždy shrnují teoretické znalosti potřebné k výpočtu, popisují geometrický význam daného pojmu a vše následně demonstřují v řešených příkladech. Prostorové obrázky jsou vždy doplněny komentářem, jehož hlavním cílem je zopakovat a ilustrovat geometrický význam probíraného pojmu.

K ovládání 3D modelů slouží pravé tlačítko myši nebo panel, který může vypadat například⁵ takto:




Nástroje panelu jsou svislými čarami rozděleny na tři části:

1. Tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu.
2. Tlačítko se symbolem domečku umožňuje návrat k výchozímu pohledu (default view) a tlačítko „strom modelu“ zobrazí/schová výběrové menu (stromovou strukturu) všech objektů (částí) prostorového obrázku.

žený na programovacím jazyce, který popisuje trojrozměrnou scénu například v aplikacích virtuální reality.

⁵Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v angličtině.

3. Tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravoúhlým promítáním, volba režimu vykreslení modelu (velmi zajímavý je např. drátěný model), volba osvětlení a poslední volbou je barva pozadí.

Právě přepínač „strom modelu“  je klíčovým ve využití našich demonstrací. Po zobrazení stromové struktury zobrazíme (resp. schováme) jistý objekt prostorového obrázku zaškrtnutím (resp. odškrtnutím) jeho jména v tomto výběrovém menu. Takto můžeme při výkladu postupně odkrývat či opět schovávat jednotlivé objekty.

3.1 Ukázka

Tato ukázka představuje první z řešených příkladů v demonstraci pojmu diferenciál funkce dvou proměnných, která ilustruje určení přibližné funkční hodnoty pomocí diferenciálu a chybu, které se při tom dopustíme. Zde uvádím pouze zadání příkladu a následně vysvětlení geometrického významu probíraného pojmu (řešení úlohy viz příslušná demonstrace v [1]).

Zadání Nechť je dána funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. V bodě $[1, 2]$ určete

- rovnici tečné roviny ke grafu funkce z .
- diferenciál funkce z s přírůstky $dx = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{1}{2}$.

Geometrický význam

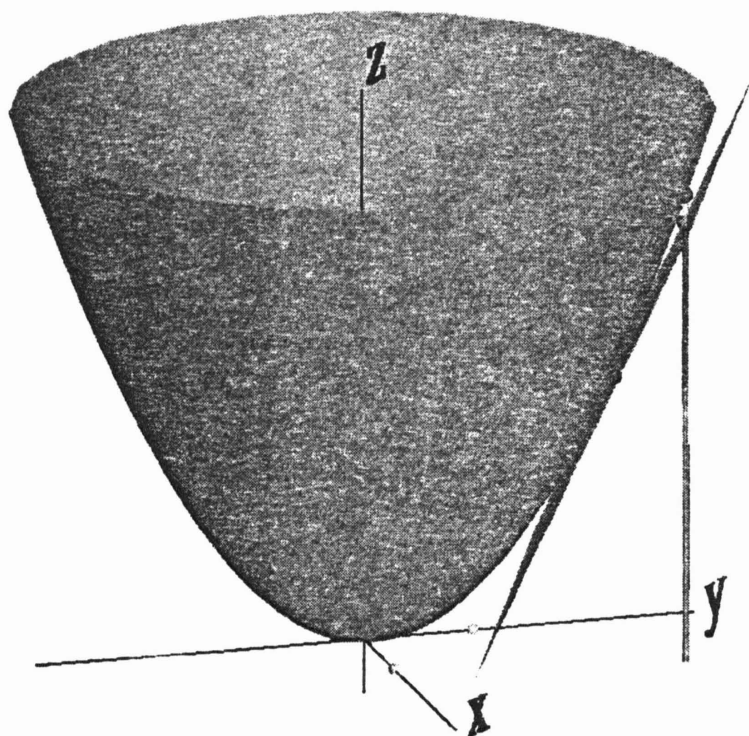
Skutečná funkční hodnota v bodě $[x_0 + dx, y_0 + dy]$ je

$$z(1,5; 2,5) = \frac{(1,5)^2 + (2,5)^2}{2} = \frac{8,5}{2} = 4,25.$$

Funkční hodnotu v bodě $[x_0 + dx, y_0 + dy]$ můžeme vyjádřit také pomocí diferenciálu jako

$$f(1,5; 2,5) \doteq f(1, 2) + df(1, 2) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4, \text{ kde}$$

$f(1, 2)$ je funkční hodnota v bodě $[x_0, y_0]$, v grafu reprezentována zelenou úsečkou,



Obrázek 1: Funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, její diferenciál v bodě $[1, 2]$ s přírůstky $dx = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{1}{2}$.
(Barevný obrázek viz [1]. Pozn. redakce)

$df(1, 2)$ je diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ s přírůstky dx , dy , který je v grafu zobrazen jako červená úsečka.

Náš výpočet pak můžeme geometricky interpretovat takto: vezmeme hodnotu funkce v zadaném bodě $[x_0, y_0]$ a připočteme přírůstek na tečné rovině (tj. diferenciál).

Z výpočtu je také patrné (a na obrázku 1 se o tom můžeme přesvědčit), že při aproximaci funkce z diferenciálem se dopouštíme jisté chyby (v grafu vyznačena žlutou úsečkou), která je ale poměrně malá. V našem případě


$$\text{chyba} = 4,25 - 4 = 0,25.$$

Všechny výše uvedené úsečky a důležité body jsou ve 3D obrázku 1

zavedeny jako samostatné objekty, které jsme pojmenovali následujícím způsobem:

objekt	název objektu	znázornění
$f(1, 2)$	GZ ³ funkční hodnoty v bodě $[1, 2]$	zelená úsečka
$df(1, 2)$	GZ přírůstku na tečné rovině	červená úsečka
chyba	GZ chyby	žlutá úsečka
$[1; 2; 2,5]$	bod grafu ⁴	modré kuličky
$[1,5; 2,5; 4,25]$	hodnota funkce v bodě $[1,5; 2,5]$	
$[1,5; 2,5; 4]$	hodnota na tečné rovině v bodě $[1,5; 2,5]$	

3.2 Prezentace na přednášce

1. Přepínačem „strom modelu“  jsme rozbalili stromovou strukturu všech objektů 3D obrázku, která se zobrazila v levé části dokumentu.
2. Kliknutím na první čtvereček ve stromové struktuře jsme vypnuli zobrazení všech objektů.
3. Nastavili jsme základní pohled, tj. zaškrtnutím jsme zviditelnili ty objekty, které měli studenti vidět na začátku prezentace⁸.
4. Další objekty jsme odkrývali či opět vypínali postupně během výkladu.

Demonstrace pojmu diferenciál

Jako základní pohled jsme volili osy, jejich pojmenování a jednotky, graf funkce a objekt s názvem „bod grafu“, tj. bod, kterým má procházet tečná rovina a ve kterém počítáme diferenciál.

³Grafické znázornění.

⁴Tímto bodem prochází tečná rovina a počítáme v něm diferenciál.

⁸Pokud nám vyhovuje výchozí pohled (default view), kroky 2 a 3 můžeme přeskočit.

Během výkladu jsme nejprve zobrazili tečnou rovinu a začali objasňovat geometrický význam pojmu diferenciál. Na závěr jsme se věnovali chybě, které se dopouštíme při aproximaci funkce diferenciálem. Protože žlutá úsečka reprezentující chybu je hodně malá a tedy hůř viditelná, vypnuli jsme v tuto chvíli zobrazování tečné roviny (opětovným kliknutím na čtvereček u objektu „tečná rovina“).

Vyučující, který se rozhodne použít již hotové demonstrace, by si měl zkusit, jak se jednotlivé objekty zapínají a vypínají, a hlavně jak je autor pojmenoval. Dále je třeba vyzkoušet projektor, zvýšit jas a kontrast. Jinak se může stát, že prezentace bude hodně tmavá a studenti tak těžko rozliší jednotlivé barvy a v důsledku toho i samotné objekty. Z podobných důvodů je vhodné seznámit se s přepínáním osvětlení a barvy pozadí. Nám se nejvíce osvědčila volba osvětlení „Světla optimalizovaná pro CAD“ (v našich dokumentech nastavena jako implicitní) a v některých případech jsme kontrast promítané grafiky zvýšili žlutým pozadím.

4. Závěr

Na konci semestru jsem vytvořila anonymní elektronický dotazník, poslala studentům mailem prosbu o vyplnění a odkaz na tuto anketu umístila do osnovy předmětu [1]. Níže uvádím níže některé z odpovědí⁹ na jednu otázku z dotazníku: „**Na demonstracích se mi líbilo / nelíbilo:**“

1: Konečně jste nám umožnili představit si, k čemu se tohle všechno musíme učit.

2: ... že jsme si konečně udělali obraz, jak ty funkce vypadají v prostoru. Díky.

3: ... že mi pomohly představit si věci, které jsou velmi abstraktní a těžko uchopitelné.

4: Líbila se mi prezentace v hodině, kdy k tomu vyučující něco říkal, a bylo to pro mě hodně přínosné. Doma se mi s tím moc

⁹V odpovědích jsem pouze opravila překlepy, pravopisné chyby, případně doplnila českou diakritiku.

nechtělo pracovat, ale je skvělé vědět, že je možnost se na to podívat znovu.

5: Demonstrace na přednáškách byly skvěle okomentované, srozumitelné; pomohly mi, protože jsem konečně získala představu, co a proč vlastně mám počítat.

6: Demonstrace se mi líbily, nicméně si myslím, že většinou zaujmou spíše člověka, který má blíže k PC. Například já osobně považuji tyto demonstrace za dobrý nápad, ale pokud se mám rozhodnout mezi studiem ze skript nebo z PC, tak si vyberu ty skripta. Není to kritika vašeho přístupu, jen přiznání mé neschopnosti pracovat s počítačem.

7: Bohužel nejsem moc dobrý matematik, o to víc mi pomohly Vaše prezentace. Řekla bych hlavně v uplatnění a smyslu proč a co jak funguje. Za dva roky na vysoké jsem v podstatě nevěděla, co je, nebo spíš jak prakticky vypadá derivace a další základní věci v matematice. To jsem pochopila teprve z prezentace, dokonce nějaké triviální funkce v prostoru. Myslím si, že určitě má smysl 3D obrázky ve výuce používat, protože to matiku tak nějak přiblíží a už to nejsou jen čísla, která zapíšete v pořadí, jak se nazpaměť naučíte, ale najednou člověk ví, co vlastně dělá. Taky nemalou zásluhu na tom má Vaše nadšení, i paní prof. Došlé, to člověka hned víc baví učení, takže za ně moc děkuji.

Tyto výpovědi snad mohu shrnout tak, že z těch studentů, jež se aktivně účastnili přednášek, jich velká část přijímala naše demonstrační prezentace s 3D grafikou s povděkem a rozšířila si díky nim svou „matematickou představu“ o probírané látce.

Literatura

[1] Kuráňová, S., *M2010 Matematika II – elektronická podpora k výuce (rozcestník k demonstracím, testům a dalším materiálům)*, duben 2009.

<http://is.muni.cz/el/1431/jaro2009/M2010/index.qwarp>

[2] Kuráňová, S., Vondra, J., *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*,

Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, Plzeň, 2008, s. 199–203.

- [3] Kuráňová, S., Vondra, J., *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, duben 2009.

<http://www.math.muni.cz/~xkuranov/sbirka>

- [4] Kuráňová, S., *Interactive PDF Documents in Math Education, Focused on Tests for Differential Equations*, Sborník konference Models in Developing Mathematics Education, Drážďany, Německo, září 2009.

<http://www.math.muni.cz/~xkuranov/publikace/Dresden-09.pdf>

- [5] Plch R., Šarmanová P., *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*, Zpravodaj CSTUG, Konvoj Praha, 18, č. 1–2, 2008, s. 76–92.

- [6] Plch R., Šarmanová P., *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*, Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.

- [7] Deep Exploration, 2008.

<http://www.righthemisphere.com/products/dexp/>

- [8] Diskusní fórum, 2009.

<http://www.mapleprimes.com/forum/export-graphics-to-u3d>

Mgr. Silvie Kuráňová

Ústav matematiky a statistiky, PřF MU

Kotlářská 2, 611 37 Brno

e-mail: kuranova@mail.muni.cz