Učitel matematiky

Milada Kočandrlová
Kresba mapy a rektifikace kružnicového oblouku

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 4, 200–207

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150532`

KRESBA MAPY A REKTIFIKACE KRUŽNICOVÉHO OBLOUKU

Milada Kočandrlová

Budeme se věnovat mapám, při jejichž kreslení se využívají vlastnosti kolmého nebo středového promítání nebo jednoduché geometrické pojmy. K tomu účelu si Zemi představíme jako kouli, nazývá se *referenční koule*, o poloměru $R = 6\,371$ km. Referenční kouli budeme zobrazovat na rovinu kolmou k její ose. Taková zobrazení se nazývají *normální* (také polární) *azimutální zobrazení.* Azimutální zobrazení se nejčastěji používá k zobrazování polárních oblastí. Zobrazení využívající vlastnosti promítání se nazývají *projekce.* Z ortogonálního promítání je odvozena *ortografická projekce.* Ze středového promítání jsou odvozeny *stereografická* a *gnómonická* projekce.

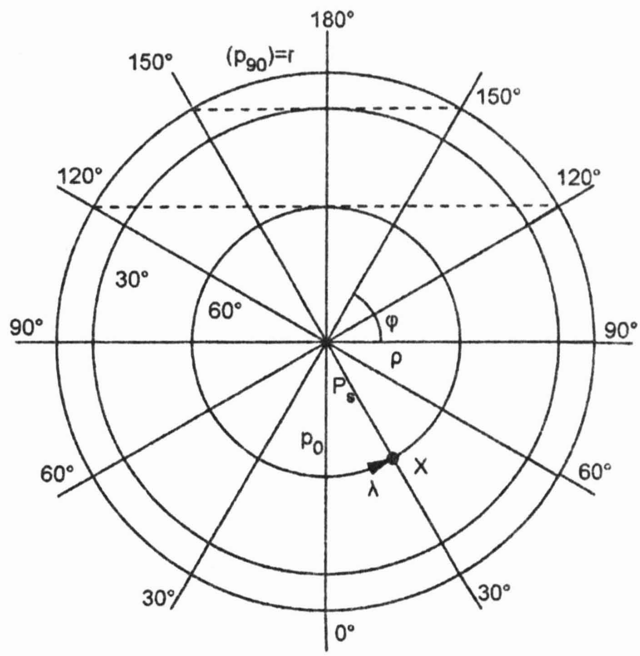
Mapa se sestrojuje ve zvoleném měřítku. Z toho a z poloměru referenční koule vypočítáme poloměr mapy. Např. pro měřítko 1:130 000 000 je poloměr mapy

$$R' = 6\,371/130\,000\,000 \text{ km} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Geografickou síť na mapě tvoří obrazy poledníků a rovnoběžek. V azimutálních zobrazeních se poledníky zobrazují do svazku přímek o středu v obraze pólu. Tento střed je zároveň středem soustředných kružnic, obrazů rovnoběžek.

1. Ortografická projekce normální

Rovník v ortografické projekci se promítá do kružnice o středu v obraze pólu P_s a poloměru R'. Od zvoleného nultého poledníku p_0 rozdělíme rovník např. po třiceti stupních vpravo – východní délka a vlevo – západní délka, obr. 1. Dělicí body a pól určují obrazy poledníků. Obrazy rovnoběžek jsou soustředné kružnice o středu v pólu P_s. Abychom je sestrojili, sklopíme rovinu libovolného poledníku, např. 90. stupně, do průmětny. Sklopený poledník (p_{90}) rozdělíme opět po třiceti stupních zeměpisné šířky od nuly do devadesáti stupňů. Sklopené rovnoběžky jsou úsečky kolmé na sklopenou osu, totožnou s p_0. Jejich délky jsou průměry průmětů rovnoběžek.



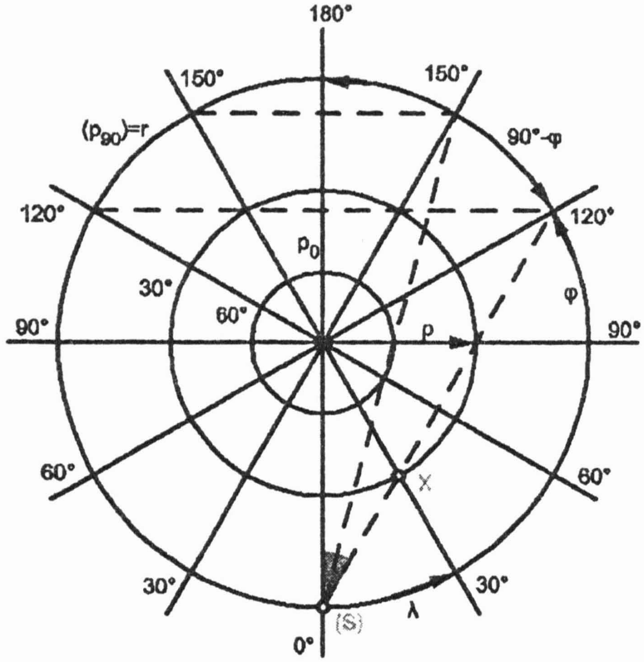
Obr. 1. Geografická síť ortografické projekce normální

Zvolíme polární soustavu souřadnic pólem P_s a polární osou p_0. Polární úhel bodu na mapě je jeho zeměpisná délka λ. Polární poloměr $\varrho = R' \cos\varphi$, kde φ je zeměpisná šířka bodu.

2. Stereografická projekce normální

Střed promítání stereografické projekce volíme v jednom z pólů a rovinu rovníku za průmětnu. Průmět rovníku rozdělíme opět rovnoměrně po třiceti stupních a sestrojíme obrazy poledníků, obr. 2. Obrazy rovnoběžek jsou kruhové řezy průmětnou rotačních kuželů s vrcholem ve středu promítání. Abychom je sestrojili, sklopíme rovinu libovolného poledníku – osové řezy kuželů – do průmětny. Sklopený poledník (p_{90}) rozdělíme po třiceti stupních zeměpisné šířky od nuly do devadesáti stupňů. Sklopené rovnoběžky jsou úsečky kolmé na průmět nultého poledníku p_0 (otočenou osu).

Úsečky promítneme ze sklopeného středu (S) na rovinu rovníku, kde určují poloměry průmětů rovnoběžek.



Obr. 2. Geografická síť stereografické projekce normální

Zvolíme polární soustavu souřadnic pólem P a polární osou p_0. Polární úhel bodu na mapě je jeho zeměpisná délka λ. Polární poloměr ϱ je protilehlý obvodovému úhlu $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ o vrcholu (S), tj.

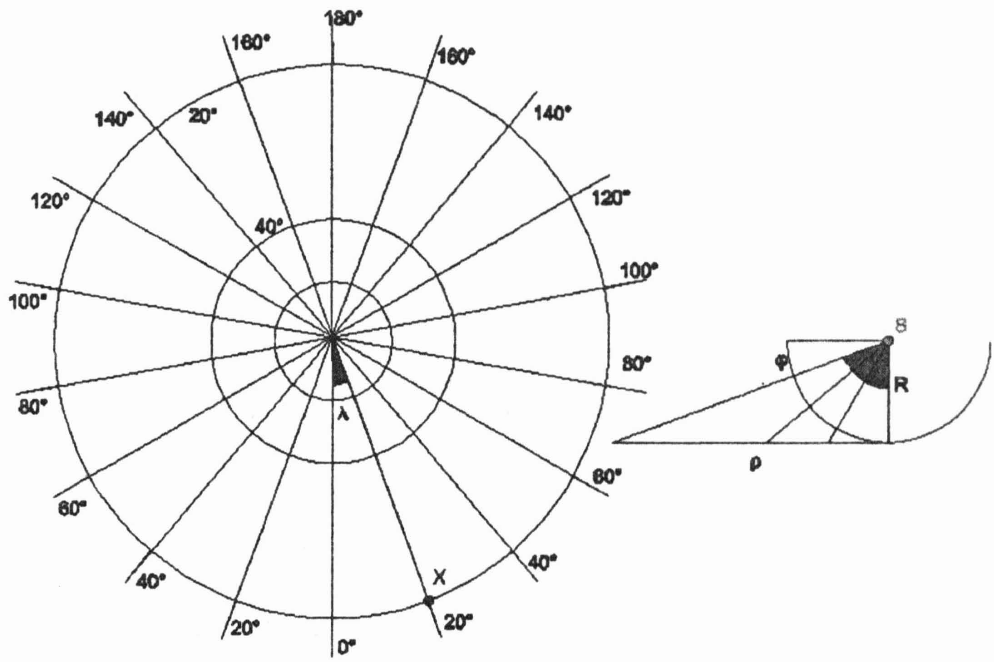
$$\varrho = R' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

3. Gnómonická projekce normální

V gnómonické projekci je střed promítání S středem referenční koule a její tečná rovina v pólu je průmětnou. Poledníky se promítají do svazku přímek o středu v obraze pólu, obr. 3. Obrazy rovnoběžek jsou řezy průmětnou rotačních kuželů s vrcholem ve středu promítání S. Poloměry obrazů rovnoběžek zjistíme z osových řezů promítacích kuželů. Tyto poloměry – polární poloměry – jsou protilehlé doplňkového úhlu k zeměpisné šířce φ, tj.

$$\varrho = R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Polární úhlem je zeměpisná délka λ.



Obr. 3. Geografická síť gnómonické projekce normální

4. Azimutální zobrazení Lambertovo

Německý kartograf Johan Heindrich Lambert (1728–1777) navrhl takové azimutální zobrazení referenční koule na rovinu, aby vzor a obraz oblasti, v daném měřítku, měly stejný obsah. Rovnice zobrazení jsou odvozené z jednoduché geometrické podmínky: obsah vrchlíku referenční koule, ohraničeného rovnoběžkou, je roven obsahu kruhu, ohraničeného obrazem této rovnoběžky.

Pro obsah vrchlíku o výšce v na kouli poloměru R a obsah kruhu o poloměru ϱ platí

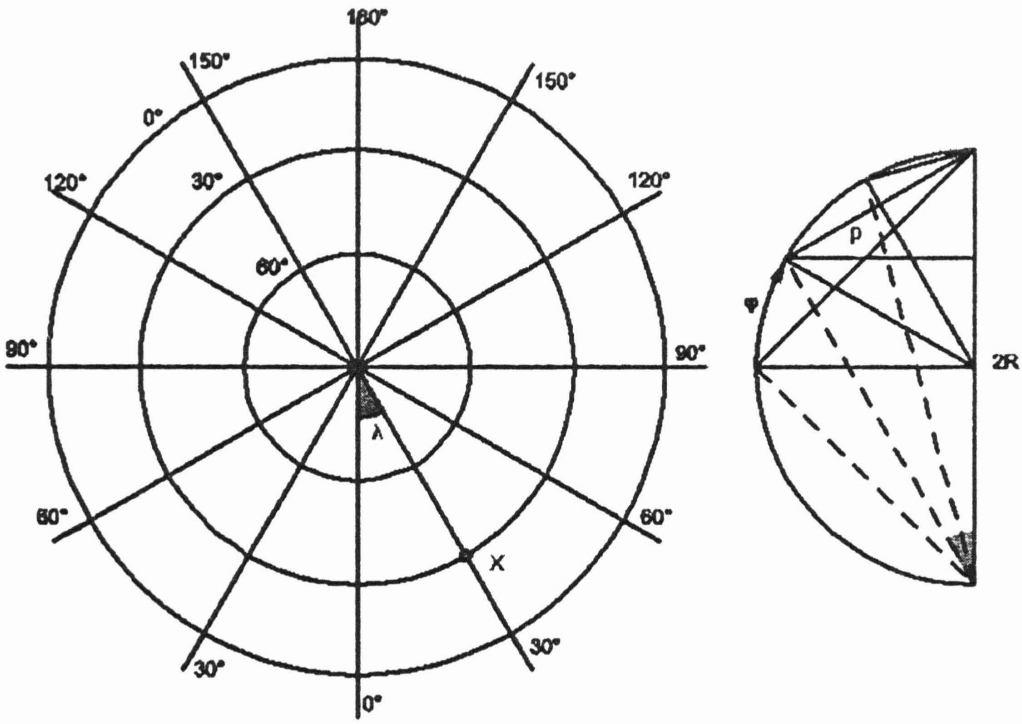
$$2\pi R v = \pi \varrho^2, \quad \text{tj.} \quad \varrho^2 = 2Rv.$$

Výšku v vrchlíku vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami $R - v$, $R\cos\varphi$, obr. 4, tj. $(R - v)^2 = R^2 - R^2\cos^2\varphi$, tj. $(R - v)^2 = R^2\sin^2\varphi$. Odtud pro výšku postupně dostáváme

$$v = R(1 - \sin\varphi) = R\left(1 - \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)\right) = 2R\sin^2\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\varphi}{2}\right).$$

Potom poloměr rovnoběžky je

$$\varrho = 2R \sin\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\varphi}{2}\right).$$



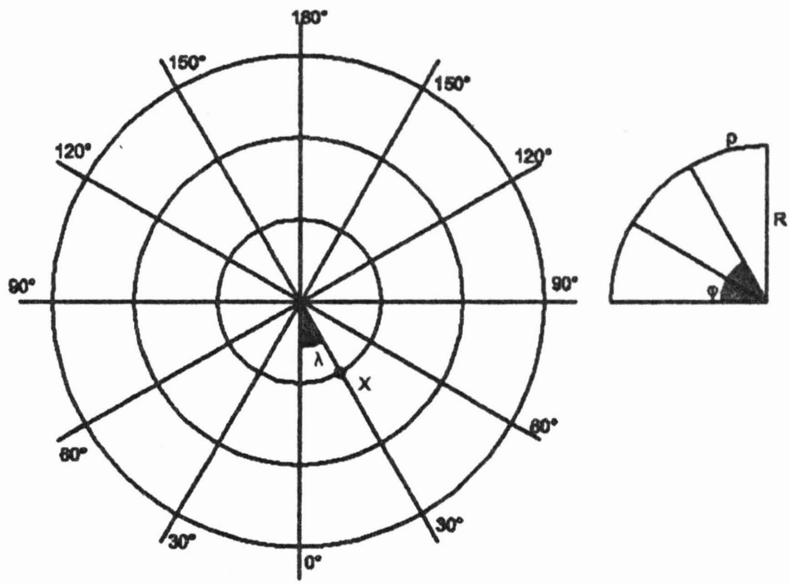
Obr. 4. Geografická síť azimutálního zobrazení Lambertova

Poloměr ϱ je protilehlá odvěsna úhlu $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, obvodovému ke středovému úhlu $\frac{\pi}{2} - \varphi$, který je doplňkovým úhlem k zeměpisné šířce φ. Tak z pravoúhlého trojúhelníka s přeponou $2R$ můžeme sestrojovat obrazy rovnoběžek, obr. 4.

5. Postelovo azimutální zobrazení

Francouzský kartograf Guillaume Postel (1510–1581) navrhl azimutální zobrazení, které zachovává délky na polednících. Délka na poledníku, tj. poloměr rovnoběžky na mapě (v daném měřítku) je

$$\varrho = R\left(\tfrac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

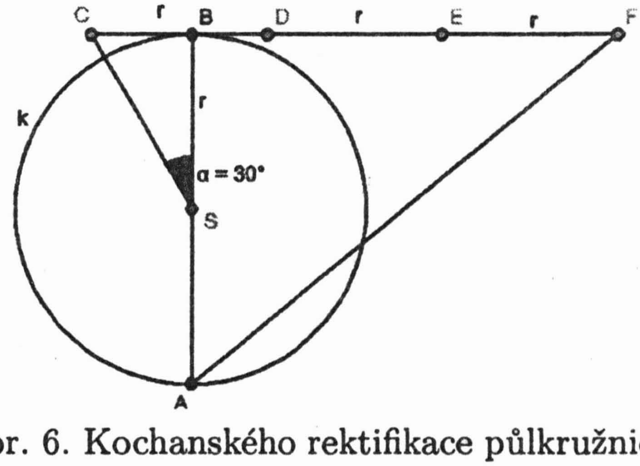


Obr. 5. Geografická síť Postelova azimutálního zobrazení

Poloměr rovníku je délka oblouku odpovídající pravému úhlu. Pro konstrukci tohoto poloměru můžeme využít rektifikaci kružnicového oblouku, tj. určení úsečky, jejíž délka odpovídá délce kružnicového oblouku, obr. 5. Takových konstrukcí existuje mnoho. Uvedeme některé z nich.

6. Rektifikace kružnicového oblouku

Pro určení délky půlkružnice můžeme použít Kochanského konstrukci (Adam Adamandy Kochanski, 1631–1700, polský matematik a astronom). Na tečně kružnice $k = (S, r)$ v bodě B průmětu AB určíme bod C tak, že $|\sphericalangle BSC| = 30°$, obr. 6. Na polopřímce



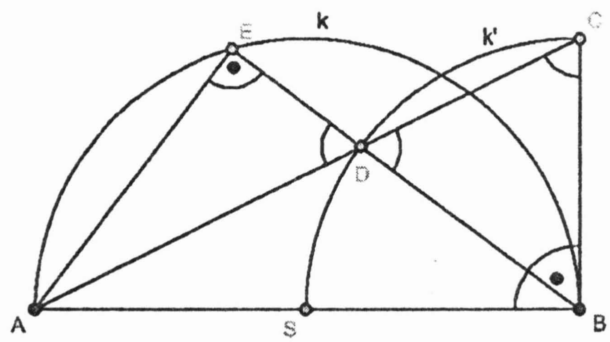
Obr. 6. Kochanského rektifikace půlkružnice.

CB určíme bod F tak, že $|CF| = 3r$. Potom úsečka AF aproximuje délku půlkružnice k. Délku úsečky AF vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníka ABF, je to asi 3.14153333 r. Chyba aproximace je přibližně $6 \cdot 10^{-5} r$.

V roce 1907 publikoval G. Peirce jinou jednoduchou přibližně stejně přesnou konstrukci délky půlkružnice jako je konstrukce Kochanského. V krajním bodě B průměru kružnice $k = (S, r)$ sestrojíme tečnu, na které určíme průsečík C s kružnicovým obloukem $k' = (B, |SB|)$, obr. 7. Úsečka AC protne oblouk k' v bodě D. Polopřímka BD protne kružnici k v bodě E. Součet stran trojúhelníka ADE aproximuje oblouk půlkružnice k s přesností $4{,}8 \cdot 10^{-5} r$.

Trojúhelník ADE je podobný trojúhelníku ACB. Koeficient κ podobnosti je řešením kvadratické rovnice $5\kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0$, tj. $\kappa = \frac{3}{5}$. Strany trojúhelníka ADE potom jsou $\frac{3}{5}r$, $\frac{6}{5}r$, $\frac{3\sqrt{5}}{5}r$. Jejich součet je

$$\frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} r \cong 3.141640786 r.$$

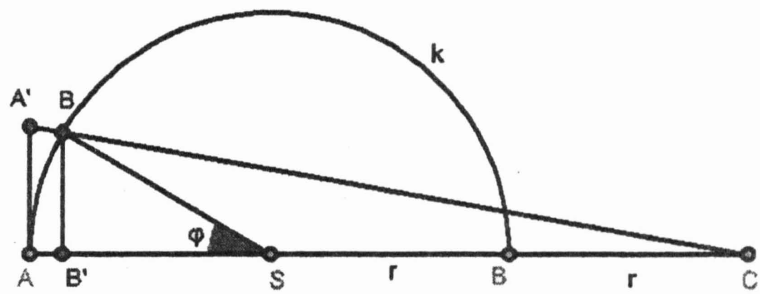


Obr. 7. Peircova rektifikace půlkružnice.

Pro oblouky, odpovídající úhlům menším než 30°, se používá Sobotkova konstrukce (Jan Sobotka, 1862–1931, český matematik). Průměr AB kružnice $k = (S, r)$ prodloužíme o r na úsečku AC. Na kružnici určíme bod B tak, že $|\sphericalangle ASB| \leq 30°$, obr. 8. Z bodu C promítneme bod B do bodu A' tečny kružnice v bodě A. Úsečka AA' aproximuje oblouk AB. Její délku vypočítáme z podobných trojúhelníků $CB'B$ a CAA',

$$|AA'| = \frac{3r \sin\varphi}{2 + \cos\varphi}, \qquad \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{6}\rangle.$$

Pro úhel 30° a poloměr jedna je $|AA'| = \frac{3}{4+\sqrt{3}} \cong 0.523373$, chyba aproximace je asi $2 \cdot 10^{-4}$.



Obr. 8. Sobotkova rektifikace kružnicového oblouku

Další konstrukce lze najít v článcích Dr. Ant. Pleskota v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky.

Literatura

[1] Mykšovský, M., *Kartografie pro 4. ročník studijního oboru Geodézie*, GKP, Praha, 1987.

[2] Černý, J., Kočandrlová, M., *Konstruktivní geometrie*, ČVUT, Praha, 2004.

[3] Směs. Nová přibližná rektifikace kružnice, *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* **36**(1907), č. 3, 341–342.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
ČVUT Fakulta stavební
katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: milada.kocandrlova@fs.cvut.cz