Ivan Saxl; Milena Kvaszová

What we do not teach and we should (and what we teach though maybe we should not)

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 2, 89–96

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150517`

CO NEUČÍME, A MĚLI BYCHOM

(a co učíme, ač bychom možná nemuseli)

† Ivan Saxl[1], Milena Kvaszová

Tento příspěvek byl přednesen na IX. semináři z historie matematiky pro vyučující na středních školách, který se konal 17.–20. srpna 2009 v Jevíčku.

1. Úvod

Klasicismus XVIII. a XIX. století přišel s myšlenkou neomezeného vědeckého poznání a kauzality spojující následek s příčinou, kterou třeba ještě neznáme, ale je pouze otázkou času, kdy ji objevíme. Svět se tak stal přehledným a v závislosti na vědeckém poznání stále jistějším. Klasicismus vedl také k rozvoji školství, jehož cílem bylo vychovat práceschopné poslušné občany využívající postupně se rozšiřující státem poskytované jistoty. Na těchto idejích vývoj společnosti a školství nerušeně pokračoval i ve století XX., navíc podporován různými občas protichůdnými politickými ideologiemi. Technický rozvoj však začal umožňovat experimenty, které jednoduché a přímočaré vědecké myšlení začaly narušovat a navíc začal vytvářet stále složitější a globálnější společenské a ekonomické vztahy a vazby. Jejich důsledkem byly ony jednoduché kauzální jistoty stále častěji oslabovány, docházelo k nepředvídaným a nezamýšleným vojenským střetům i k nekontrolovatelným ekonomickým a finančním krizím. Současné psychologické výzkumy vedou k závěru, že téměř všichni v neočekávané situaci začneme vymýšlet její *jednoduchou* příčinu, přičemž vycházíme

[1] Náš dlouholetý spolupracovník, dr. Ivan Saxl, DrSc., zemřel 23. 12. 2009. Jeho smrt je velikou ztrátou pro celou českou matematickou komunitu. (Pozn. red.)

z vlastních představ, které jsou pro danou, obvykle komplikovanou souhru okolností nepoužitelné.

V současné diskusi o školství a jeho reformách se daleko častěji mluví o tom, jak by se mělo učit a ne o tom, co by se mělo učit. Přitom v současném školství – a nejen u nás – je převážná část výuky o tom, co si přáli lidé v dobách minulých, dále tomu, co si zatíženi minulostí přejeme my a zcela zanedbatelná pozornost je věnována tomu, co skutečně je případně co skutečně bylo. Uvědomme si, že historii odedávna píší vítězové, a to, co v dějepise učíme, je jejich obrazem a nikoliv obrazem dob minulých. I historie vědních oborů je takto zkreslena.

V biologii např. učíme o systematickém, spojitém, darwinovsky zjednodušeném vývoji, jehož zásluhy v boji s kreacionismem jsou sice nesporné, ale jehož důsledné aplikace jsou více než sporné a déle než jedno století zpochybňovány.

Ve fyzice na různých stupních škol začínáme s řeckým atomismem, postupně jej rozvíjíme a komplikujeme, takže v průběhu školní výchovy se učí stále něco nového a i v nejvyšších vědeckých kruzích se teorie mění téměř ze dne na den; jako příklad uveďme piezoneutronový jev, při němž makroskopický lom materiálů je provázen emisí neutronů.

Jedním z nejméně proměnlivých předmětů je díky pomalému pohybu kontinentů zeměpis, ale běda, když začneme mluvit o počasí, které na nich panuje. Konečně jazykový vývoj vlivem technických vymožeností probíhá tak rychle, že jej osnovy ani při nejlepší vůli nestačí sledovat.

Nejhůře je na tom ovšem matematika, která s výjimkou elementárních počtů pojednává o neexistujícím světě nejrozmanitějších axiomů, výlučných a skutečnost zjednodušujících či extrapolujících výtvorů lidského myšlení navíc silně závislých na jazykové logice. Existuje však jeden její obor, který se snaží o zachycení toho, co skutečně je, s čím se v životě neustále všichni setkáváme a čemu jsme podrobeni, totiž statistika. Tu však do matematiky příliš nezahrnujeme a ze škol vyháníme nebo nepřípustně zjednodušujeme, podstrkujíce jí oblíbenou a vytouženou jednoduchou kauzalitu.

S přivřením oka do matematiky počítáme teorii pravděpodobnosti, ale učíme ji jen jako pomůcku pro chytřejší hráče a sázkaře bez zdůraznění spolehlivosti pouze jejich limitních vlastností za nutné podmínky neomezené opakovatelnosti náhodných jevů. Obou těchto oborů si neceníme, neučíme je rádi a jejich význam ve srovnání s rovinou geometrií a algebrou či analýzou považujeme za zanedbatelný.

2. Statistická gramotnost

Klasická statistika číselně popisuje to, co skutečně je. V rámci pravděpodobnostních úvah se zabýváme opakujícími se náhodnými jevy a pro statistiku je pravděpodobnost užitečná především při práci s velmi početnými soubory jevů. Oba obory jsou zde odedávna. Obecně známými příklady státní statistiky jsou sčítání lidu v římské říši za císaře Oktaviána Augusta (zmiňované v Bibli v souvislosti s Kristovým narozením) a sčítání lidu a majetku nařízené Vilémem Dobyvatelem po dobytí Anglie roku 1086. Je známé pod jménem Doomsday (též Domesday, tj. soudný den) a jeho výsledky se zachovaly a jsou postupně zpřístupňovány a rozebírány na internetu (`www.domesdaybook.co.uk/`).

Cílem obou historických i všech dalších sčítání byl především výpočet daňového zatížení občanů. Pravděpodobnostní úvahy jsou spojeny se samotnou existencí života. I rozhodování primitivních živočichů muselo být založeno na přizpůsobení rizikům, ovlivňujícím získávání potravy a na odhadu chování predátorů. Z těchto kořenů se postupně vyvinula tzv. *subjektivní* (v zásadě nečíselná) pravděpodobnost, podle níž řídíme své denní i dlouhodobé chování a která je založena na naší zkušenosti: *co bylo včera, bude i dnes.* Je však důležité připustit i možnost náhlé změny, jevu nikoliv běžného, ale možného. Stojí za to si uvědomit, že my všichni, kteří t. č. žijeme, jsme potomky dlouhé posloupnosti živých organismů, které alespoň do početí našich předků tuto disciplínu úspěšně ovládali (neboť přežili).

Druhým odvětvím pravděpodobnosti je její uplatnění ve společenstvích živých tvorů, které zajišťuje minimální konfliktnost jednotlivců konkrétního společenství. V lidské společnosti to bylo zpočátku především v soudnictví a zákonodárství, posléze v obchodu, pojišťovnictví, ekonomii atd.

Třetí oblastí je *matematická teorie pravděpodobnosti*, zabývající se podobně jako ostatní obory matematiky, jednoduchými opakovatelnými teoretickými modely. Ty se sice ve skutečnosti nevyskytují a jejich použití pro reálné děje může být na jedné straně při správném použití užitečné díky modelovým zjednodušením, ale někdy také velmi nebezpečné, jak předvádí současná světová krize vyvolaná aplikací matematických modelů na realitu.

Subjektivní rozhodování je do značné míry založeno na zkušenostech, které si jednak každý v podstatě od narození (!!) shromažďuje a subjektivně vyhodnocuje sám, jednak na statistických datech uváděných v mediích počínaje údaji o zločinnosti, nezaměstnanosti, nemocnosti, nehodovosti, přes lákání k nákupům, spoření, uzavírání půjček i pojištění a politickými preferencemi konče. Přitom mnohé z těchto údajů nejsou zdaleka nestranné, ale jsou motivovány nejrůznějšími snahami těch, kteří vedeni vlastními zájmy si je objednali a platí za jejich rozšiřování. Z této skutečnosti se zrodil termín *statistická gramotnost*, pod nímž se v první řadě rozumí pochopení povahy dat jako obrazu dějů s nejistým výsledkem, které se s různě silnou vzájemnou vazbou realizují v diskrétním nebo spojitém čase, což nás vede k potlačení našeho úzkostného lpění na kauzalitě příčina – následek, nespoléhání na štěstí a k nedůvěře v rady a doporučení těch, kterým naše jednání něco přinese. Náš svět je kauzální, ale ne zcela a ne vždy; podle známého výroku Benjamina Franklina *jisté jsou pouze daně a smrt*. A zcela nemožných dějů je také málo. Dále ke statistické gramotnosti patří znalost a porozumění metodám sběru dat, jejich úprav, vyvozování i testování závěrů a v neposlední řadě posouzení jejich interpretace. Ačkoliv se zdá, že výuka a výcvik statistické gramotnosti by měl být jedním z prvořadých úkolů školy na všech stupních, opak je pravdou a stojí za to si položit otázku, komu všemu se to hodí.

Připomeňme ještě rozdíl mezi klasickou (někdy se používá termín *státní*) a matematickou statistikou. V prvním případě analyzujeme vlastnosti každého prvku zvoleného souboru (tzv. populace) a výsledek analýzy (např. střední hodnota nebo zastoupení nějaké vlastnosti) je zcela přesný. V rámci matematické statistiky si ze souboru vhodným způsobem vybereme jen jeho část (tzv. výběrová populace nebo jenom výběr), tu prozkoumáme a přáli bychom si, aby její charakteristiky byly dobrými odhady charakteristik populace celé. Zda tomu tak skutečně je závisí pochopitelně v první řadě na provedení výběru.

3. Náhodné jevy

Které to nejsou? Počasí, paměť, zdravotní stav, přítomnost či nepřítomnost členů rodiny, učitelů, dětí ve škole, doprava, politické dění apod. Co jsme čekali, se nestalo, zato se stalo něco nepředvídaného. Děti se s takovými situacemi setkávají od nejútlejšího věku prostřednictvím nemocí, zaměstnanosti i nálad všech svých vychovatelů. Čím větší je město či stát, tím větší je dosah každé události. Představme si pražské metro s roční přepravní kapacitou přes 530 miliónů cestujících a hodinovou výluku jedné linky. Při čtrnácti hodinách s plným provozem každá linka přepraví v průměru 33 tisíc cestujících za hodinu. Předpokládejme, že nedodržení jejich časového plánu (neotevřou včas obchod, nedodrží úřední hodiny, nepřijdou včas na sjednanou schůzku, nevyzvednou dítě z jeslí atd.) v důsledku hodinového výpadku ovlivní dvě další osoby. Vběhnutí psa do tunelu metra a následné hodinové přerušení jeho provozu tedy pro zhruba 100 000 Pražanů představuje nepředvídaný náhodný jev, který musí řešit téměř desetina obyvatel města.

Na druhé straně existují celé kategorie jevů sice náhodných a navzájem různých, ale v jistém rozmezí podobných. Jsou to např. všechny rostlinné i živočišné třídy, řády, čeledi a rody konče druhem homo sapiens stejně jako všechny série výrobků s podobným účelem (auta, příbory, knihy). Žádní dva lidé, žádné dvě pampelišky, žádné dva výrobky nejsou stejné. Jejich existence je důsledkem složité souhry náhodných i pevně daných okolností. Lze je považovat za náhodné jevy a klasifikovat jejich rozdíly i shody. Tyto soubory jsou všude kolem nás; patří k nim rodiny, školy i školní třídy, spolupracovníci i spoluobčané v našich městech i vesnicích a občané států sousedních. Jejich hodnocení jsme nuceni provádět a na základě jeho výsledků volit způsob svého chování.

4. Kdy, jak a co učit

S výchovou k chápání rozmanitostí i podobností všeho a všech kolem nás je třeba začít v rodině i ve škole od nejútlejšího dětství. Děti se přestanou divit tomu, že jejich kamarádi, jejichž rodiče se liší od rodičů vlastních, mají různé povahy a zájmy, že jejich spolužáci jsou různě nadaní a že lišit se od sebe budou jednou i jejich děti. Také obrátíme jejich pozornost k nim samotným, aby když už jsou každý jiný, objevili, jací tedy jsou. Navíc je naučíme nespoléhat stoprocentně na kauzalitu a odolávat depresi z nezaslouženého neúspěchu.

V některých zemích „statistické hodnocení" provádějí již v mateřské školce. Dělají se čárky za chlapce a kolečka za děvčata, a zjišťuje se, který znak převažuje. Další témata jsou počet sourozenců, počet společně bydlících členů rodiny, porovnává se obutí (na šňůrku a na zapínání) atd., kdo umí počítat spočte, ostatní jen porovnávají prvky. Toho, aby se úlohy týkaly žáků, aby byly o nich, se držme co nejdéle. Protože takové úlohy je budou jednak bavit a jednak pochopí, že problematika není školní specialitou, která s životem nemá nic společného. Nedopusťme se té chyby, že podceníme znalosti, které už mají. Nevnucujme jim terminologii; snažme se použít, případně sjednotit jejich vlastní. Upozorněme děti na to, že s nejistotou jsou zvyklé denně zacházet. Pro nenumerické pravděpodobnosti mají stupnici vyjadřovanou slovy *určitě, asi ano, snad, asi ne, těžko, ještě nevím, nejspíš ne, určitě ne* atd., když mluví o tom, zda někam přijdou, zda je rodiče pustí ven, zda se budou dívat na televizi nebo raději učit, protože bude *skoro jistě* písemka apod.

Ukažme, že existují vlastnosti prvků, které nevyjadřujeme číselně: pohlaví, barvy očí a vlasů, oblíbená jídla a zájmy; u nich určujeme početní zastoupení. Srovnejme zastoupení jednotlivých charakteristik u chlapců a děvčat v celé třídě, v jiných třídách, jeho změny s věkem, na celé škole. Předveďme zjednodušení na dvě skupiny (barvy světlé a tmavé, jejich zastoupení u rodičů, vysvětleme výrazný rozdíl dědičnou dominancí tmavé barvy a od statistiky se dostaneme ke genetice). Porovnáním zájmů u děvčat a chlapců zvlášť dostaneme dětmi jistě vítanou genderovou studii odlišností. Takže dostáváme první dvě pravidla:

i) Čím dříve začneme učit, tím lépe, a vůbec to nemusí být souvislý blok látky, každá vyučovací hodina je náhodný proces příležitost k připomenutí problematiky.

ii) Předmětem učení pravděpodobnosti a statistiky musejí být především žáci sami.

Teprve po podobných úlohách začněme s hody mincí a kostkou jako *modely* reálných dělení jevů do skupin. Zaveďme číselné označení těchto vlastností (uveďme, že u kostky lze čísla nahradit vhodným obrázkem - kostky pro malé děti; čísla pouze označují, která strana kostky padla nebo padne). V žádném případě nezačínejme výuku hrami, statistika a pravděpodobnost jsou v první řadě o denním životě a hry jsou pouze hluboce zjednodušené modely. Tvrzení, že obě disciplíny vznikly v souvislosti s hrami, je naprosto nesprávné; nenumerická pravděpodobnost se vyskytovala v občanském a majetkovém právu, soudnictví, obchodu, a také ve filozofii a náboženství odedávna. Mince i kostky jsou ovšem vynikajícím prostředkem k předvedení toho, co ona numerická pravděpodobnost stejně možných jevů znamená v praxi. Protože máme dojem, že panna i orel by měly padat stejně často, zvolme si nějaký počet hodů - 10, 20 či 50, nechme všechny děti házet a podívejme se na výsledky jednotlivých dětí. Vyneseme-li je do grafu, můžeme pokračovat učením o zvonové křivce normálního rozdělení. Naprosto zásadní efekt tohoto postupu spočívá v tom, že křivku vytvořili žáci *vlastním úsilím*[2] a že uvidí, jak obtížné je dostat teoretické pravděpodobnosti $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{6}$ opakovaným pokusem. Takže třetí pravidlo

[2] Připomeňme, že křivku neodvodil C. F. Gauss, ale Abraham De Moivre (1667–1754) roku 1733 jako limitu pro náhodný děj typu opakované hody větším počtem mincí (podrobně např. [5]).

iii) Mince a kostky jsou výjimečně jednoduché modely náhodných jevů; děti to musejí poznat samy[3]; praktická cvičení v hodech kostkami a mincemi jsou *bezpodmínečnou* součástí hodin pravděpodobnosti na libovolném stupni.

Když ve vyšších třídách zavedeme standardní charakteristiky: střední hodnota, modus, medián (jiné nejsou zahrnuty v osnovách pro ZŠ), předvedeme žákům, že jsou nedostatečné u souborů tvořených prvky výrazně rozdílnými a u souborů vytvořených prvky několika typů (třeba průměrný věk členů rodiny). Aspoň přidáme rozsah (minimální a maximální hodnota u číselných), i když závisejí na počtu prvků a zdůrazníme nutnost uvádění jejich počtu, zvláště při převodech zastoupení (frekvencí) na procenta. Na gymnáziích se zaměříme na rozptyl, směrodatnou odchylku a koeficient variace a jejich význam jako charakteristik rozsahu zkoumané vlastnosti v závislosti na početnosti zkoumané populace. Vyhýbáme se termínu chyba, jedná se o charakteristiky datového souboru a nikoliv o chyby.

Dokončení příště

[3]Příkladem vhodné úlohy je házet kostkou tak dlouho, až poprvé padne zvolené číslo. V průměru by k tomu mělo dojít po méně než šesti hodech ($P(k) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$, k – pořadí hodu, v němž zvolené číslo poprvé padne). Jistě se při experimentu dostanete k číslům mezi 20 až 30 ($P(25) \cong 0{,}002 = 1 : 500$) a ani čísla daleko vyšší nejsou vyloučena (jeden z mých žáků se dostal k 78! – $P(78) \cong 0{,}000\,000\,13 = 1 : 7\,500\,000$). Praktická cvičení tohoto typu mají velkou šanci ubrat hernám zákazníky.