Učitel matematiky

Ladislav Beran; Milan Trch

Egyptské zápisy zlomků III. Součty vhodných dělitelů

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 3, 137–144

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150509`

EGYPTSKÉ ZÁPISY ZLOMKŮ III

(Součty vhodných dělitelů)

LADISLAV BERAN, MILAN TRCH

V článcích [6] a [7] o egyptských zápisech zlomků je ukázáno, že každé racionální číslo $0 < r < 1$ lze zapsat součtem konečného počtu po dvou různých kmenových zlomků. Metoda založená na postupném řešení neurčitých rovnic zaručuje, že pro každé přirozené číslo k existuje pouze konečný počet zápisů daného zlomku součtem k kmenových zlomků. Další metodu, kterou je možné využít ke hledání egyptských zápisů zlomků, ukážeme v tomto článku. Metoda, která se opírá o znalost (alespoň některých) dělitelů jmenovatele daného zlomku, umožňuje najít egyptské zápisy zlomků pouze v případech, kdy se podaří čitatele daného zlomku vyjádřit součtem vhodně vybraných, po dvou různých dělitelů jeho jmenovatele.

Součty dělitelů jmenovatele a egyptské zápisy zlomku.

Předpokládejme nejprve, že q je přirozené číslo a $d_1, d_2, \dots, d_k$ je libovolná skupina k navzájem různých kladných dělitelů čísla q. Potom existuje k přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ takových že platí $q = a_l \cdot d_1 = a_2 \cdot d_2 = \dots = a_k \cdot d_k$. Jsou-li čísla d_1, d_2, $\dots$, d_k navzájem různá, pak jsou také navzájem různá čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$. Pokud bude pro přirozené číslo p platit rovnost $p = d_1 + d_2 + \dots +$ $+ d_k$, potom ze sčítání a krácení zlomků ihned vyplývá rovnost: $\frac{p}{q} = \frac{d_1 + \dots + d_k}{q} = \frac{d_1}{a_1 \cdot d_1} + \dots + \frac{d_k}{a_1 \cdot d_k}$. Odtud po zkrácení příslušnými děliteli dostáváme

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}.$$

Bude-li navíc pro přirozená čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ platit $a_1 < a_2 < < \dots < a_k$, bude pro čísla $d_1, d_2, \dots, d_k$ platit $d_1 > d_2 > \dots > d_k$. Pak uspořádaná k-tice $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ vybraných dělitelů čísla q jednoznačně určuje egyptské vyjádření $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ zlomku $\frac{p}{q}$. Proto platí následující věta:

Věta 1. *Je-li číslo p součtem k po dvou různých kladných dělitelů $d_1, d_2, \dots, d_k$ přirozeného čísla q, pak lze zlomek $\frac{p}{q}$ vyjádřit součtem k po dvou různých kmenových zlomků.*

Následující příklad ukazuje, jak lze tuto skutečnost využít při řešení úloh.

Příklad 1. *Ukažte, že zlomek $\frac{13}{315}$ lze vyjádřit součtem kmenových zlomků.*

Řešení: Číslo 315 je součinem čísel 1, 5, 7 a 9. Protože jmenovatel zlomku má pouze liché dělitele, nemůže být součet dvou dělitelů čísla 315 nikdy roven číslu 13.

Číslo 13 je však možné dvěma způsoby zapsat součtem tří různých dělitelů buď ve tvaru $1+5+7$, anebo ve tvaru $1+3+9$. Proto platí: $\frac{13}{315} = \frac{1+3+9}{315} = \frac{1}{35} + \frac{1}{105} + \frac{1}{315}$ a $\frac{13}{315} = \frac{1+5+7}{315} = \frac{1}{45} + \frac{1}{63} + \frac{1}{315}$. Existují tedy dva zápisy zlomku $\frac{13}{315}$, které obsahují kmenový zlomek $\frac{1}{315}$. Jako úspornější se jeví druhý z obou zápisů, protože má menší součet jmenovatelů zlomků obsažených v zápise tohoto zlomku.

Příklad 2. *Ukažte že zlomek $\frac{3}{16}$ lze vyjádřit součtem kmenových zlomků alespoň čtyřmi různými způsoby.*

Řešení:

(1) Číslo 16 má právě pět různých přirozených dělitelů $1, 2, 4, 8$ a 16. Protože $3 = 2 + 1$, je $\frac{3}{16} = \frac{2+1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

(2) Racionální číslo $\frac{3}{16}$ je možné určit také zlomkem $\frac{9}{48}$. Jmenovatel tohoto zlomku má deset přirozených dělitelů 1, 2, 3, 4,

6, 8, 12, 16, 24 a 48.

Protože $9 = 8 + 1$, je $\frac{9}{48} = \frac{8+1}{48} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$. Protože $9 = 6 + 3$, je $\frac{9}{48} = \frac{6+3}{48} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

Existují tedy dvě různá vyjádření zlomku $\frac{3}{16}$ součtem dvou různých kmenových zlomků. Druhý z obou zápisů obsahuje kmenové zlomky, které mají menší součet jmenovatelů. Číslo 9 je však také součtem tří navzájem různých dělitelů čísla 48. Protože $9 = 6 + 2 + 1$, je $\frac{9}{48} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$. Protože $9 = 4 + 3 + 2$, je také $\frac{9}{48} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}$. Pomocí součtů vhodně vybraných dělitelů jmenovatele lze najít alespoň čtyři různé zápisy zlomku $\frac{3}{16}$.

Pro vlastního dělitele d přirozeného čísla q existuje přirozené číslo $1 < a < q$ takové, že platí $a \cdot d = q$. To znamená, že kmenový zlomek $\frac{1}{q}$ lze vyjádřit ve tvaru: $\frac{1}{q} = \frac{d+1}{q \cdot (d+1)} = \frac{d}{ad(d+1)} + \frac{1}{q(d+1)}$. Proto platí následující věta:

Věta 2. *Má-li přirozené číslo q alespoň jednoho vlastního dělitele d, potom existuje přirozené číslo a takové, že platí $a \cdot d = q$ a zároveň $\frac{1}{q} = \frac{1}{a(d+1)} + \frac{1}{q(d+1)}$.*

Skutečnosti, že pro každého vlastního dělitele d přirozeného čísla q lze kmenový zlomek $\frac{1}{q}$ vyjádřit součtem dvou různých kmenových zlomků, je možné s výhodou využít při řešení některých úloh.

Příklad 3. *Ukažte že zlomek $\frac{3}{16}$ lze vyjádřit alespoň dvaceti různými způsoby součtem tří navzájem různých kmenových zlomků.*

Řešeni:

(1) Protože $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$, lze v každém z těchto zápisů zlomku $\frac{3}{16}$ nahradit některý z kmenových zlomků součtem dvou kmenových zlomků. Protože $\frac{1}{6} = \frac{2+1}{18}$, lze zlomek $\frac{1}{6}$

vyjádřit ve tvaru $\frac{3}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$. Podobně je $\frac{4}{24} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$ a $\frac{7}{42} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$.

Existují tedy alespoň tři různé egyptské zápisy zlomku $\frac{3}{16}$ ve tvaru součtu tří kmenových zlomků: $\frac{3}{16} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{48}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$ a $\frac{3}{16} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{48}$.

(2) Pro $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ lze kmenový zlomek $\frac{1}{8}$ lze vyjádřit ve tvaru $\frac{3}{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$, $\frac{5}{40} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$ a $\frac{9}{72} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$. Proto existují další tři egyptské zápisy zlomku $\frac{3}{16}$ ve tvaru součtu tří kmenových zlomků: $\frac{3}{16} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{24}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{10} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{40}$ a $\frac{3}{16} = \frac{1}{9} + + \frac{1}{16}) + \frac{1}{72}$.

(3) Pro $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ lze zlomek $\frac{1}{16}$ vyjádřit součtem dvou kmenových zlomků čtyřmi různými způsoby ve tvaru $\frac{3}{48} = \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$, $\frac{5}{80} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80}$, $\frac{9}{144} = \frac{1}{18} + \frac{1}{144}$ a ve tvaru $\frac{17}{272} = \frac{1}{17} + \frac{1}{272}$. Protože číslo 16 má pět různých dělitelů 1, 2, 4, 8, 16, existují další čtyři možné zápisy zlomku $\frac{3}{16}$ součtem tří kmenových zlomků: $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{144}$, a $\frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{272}$.

(4) Zlomek $\frac{1}{48}$ lze vyjádřit součtem dvou kmenových zlomků devíti dalšími způsoby, protože číslo 48 má deset různých dělitelů 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. To umožňuje pro zlomek $\frac{3}{16}$ sestavit devět dalších vyjádření daného zlomku součtem tří různých kmenových zlomků: $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{72} + \frac{1}{144}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{64} + \frac{1}{192}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{60} + \frac{1}{240}$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{56} + \frac{1}{336}\right)$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{54} + \frac{1}{432}\right)$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{624}\right)$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{816}\right)$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1\,200}\right)$, $\frac{3}{16} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{2\,352}\right)$.
Proto existuje alespoň devatenáct různých vyjádření zlomku $\frac{3}{16}$.

(5) Číslo 9 však je možné vyjádřit součtem tří navzájem různých dělitelů čísla 48 ve tvaru $9 = 4 + 3 + 2$. Proto platí $\frac{3}{16} = \frac{4+3+2}{48} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}$. To znamená, že existuje alespoň dvacet různých egyptských zápisů zlomku $\frac{3}{16}$.

Egyptské zápisy zlomků a součty dělitelů.

Podle [7] lze racionální číslo $0 < r < 1$ vyjádřit alespoň jedním způsobem součtem různých kmenových zlomků. Existují tedy přirozená čísla $k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ taková, že $k > 1$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ a zároveň je $r = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_k}$. Je-li n nejmenší společný násobek čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pak existují přirozená čísla $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tak, že $n = a_l \cdot d_1 = a_2 \cdot d_2 = \cdots = a_k \cdot d_k$. Po rozšíření každého ze sčítaných kmenových zlomků $\dfrac{1}{a_i}$ číslem d_i platí také rovnost

$$r = \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \cdots + \frac{d_k}{n} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{n}.$$

To znamená, že každé racionální číslo $0 < r < 1$ lze určit zlomkem $\dfrac{m}{n}$, ve kterém je čitatel $d_1+d_2+\cdots+d_k$ součtem vhodně vybraných dělitelů jeho jmenovatele.

Racionální číslo r se obvykle vyjadřuje zlomkem v základním tvaru. Označíme-li dále t největšího společného dělitele čísel m, n, pak existují nesoudělná přirozená čísla p, q taková že $m = p \cdot t$, $n = q \cdot t$ a $r = \dfrac{p}{q}$. Pokud je racionální číslo r určeno zlomkem $\dfrac{p}{q}$ v základním tvaru, musí existovat alespoň jedno přirozené číslo s takové, že čitatele $p \cdot s$ rozšířeného zlomku $\dfrac{p \cdot s}{q \cdot s}$ lze zapsat součtem konečného počtu navzájem různých vhodně vybraných dělitelů jmenovatele. Protože přirozená čísla jsou dobře uspořádána, existuje mezi všemi takovými čísly s nejmenší přirozené číslo s touto vlastností. Při hledání vhodného rozšíření zlomku $\dfrac{p}{q}$ v základním tvaru lze postupovat nahodilým experimenty, systematickým navyšováním hodnot čísel s či rozšiřováním zlomku čísly, která nabízí dostatečný počet dělitelů jmenovatele rozšířeného zlomku.

Příklad 4. *Pomocí součtů vhodných dělitelů najděte alespoň pět různých zápisů zlomku $\frac{2}{97}$ součtem po dvou různých kmenových zlomků.*

Řešeni:

(1) Protože $\frac{97}{2} = 48 + \frac{1}{2}$, je $2 \cdot 48 < 97 < 2 \cdot 49$. Po rozšíření zlomku $\frac{2}{97}$ číslem 49 má jmenovatel zlomku $\frac{98}{97 \cdot 98}$ šest různých dělitelů 1, 7, 49, 97, 679 a 4 537. Číslo 98 je součtem dělitelů 97 a 1, a proto lze zlomek $\frac{2}{97}$ vyjádřit součtem dvou různých kmenových zlomků ve tvaru $\frac{1}{49} + \frac{1}{4\,753}$.

(2) Protože $2^6 < 97 < 2^7$, lze po rozšíření zlomku $\frac{2}{97}$ číslem 64 vyjádřit čitatele zlomku $\frac{128}{97 \cdot 64}$ ve tvaru $128 = 97 + 31 = 97 + (16+8+4+2+1)$. Zlomek $\frac{2}{97}$ lze tedy zapsat součtem šesti kmenových zlomků ve tvaru $\frac{1}{64} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{776} + \frac{1}{1\,552}$.

(3) Číslo 12 má šest dělitelů 1, 2, 3, 4, 6 a 12. Po rozšíření zlomku $\frac{2}{97}$ číslem 6 má jmenovatel zlomku $\frac{12}{97 \cdot 6}$ větší počet dělitelů a čitatele rozšířeného zlomku $\frac{12}{97 \cdot 6}$ lze vyjádřit ve tvaru $12 = 6+3+2+1$. Proto lze zlomek $\frac{2}{97}$ zapsat součtem čtyř po dvou různých kmenových zlomků ve tvaru $\frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{291} + \frac{1}{672}$.

(4) Číslo 40 má celkem osm dělitelů 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 a 40. Po rozšíření zlomku $\frac{2}{97}$ číslem 20 vzroste počet dělitelů jeho jmenovatele. Čitatele rozšířeného zlomku $\frac{40}{97 \cdot 20}$ lze vyjádřit součtem dělitelů jeho jmenovatele ve tvaru $40 = 20+10+5+4+1$ nebo ve tvaru $40 = 20 + 8 + 5 + 4 + 2 + 1$.

Proto lze zlomek $\frac{2}{97}$ lze zapsat také součtem pěti kmenových zlomků ve tvaru $d\frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{776} + \frac{1}{970} + \frac{1}{3\,880}$, ale také součtem šesti kmenových zlomků ve tvaru $\frac{1}{194} + \frac{1}{485} + \frac{1}{776} + + \frac{1}{970} + \frac{1}{1\,940} + \frac{1}{3\,880}$.

(5) Číslo 56 má celkem osm dělitelů 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 a 56. Po rozšíření zlomku $\frac{2}{97}$ číslem 56 lze čitatele rozšířeného zlomku $\frac{112}{97 \cdot 42}$ vyjádřit ve tvaru $112 = 97 + 15$ nebo ve tvaru $112 = 97 + 8 + 7$. Proto lze zlomek $\frac{2}{97}$ zapsat součtem tří kmenových zlomků ve tvaru $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$. Tento zápis zlomku $\frac{2}{97}$ je zajímavý tím, že má ze všech výše uvedených zápisů nejmenší hodnotu součtu jmenovatelů kmenových zlomků, které se v příslušném vyjádření zlomku vyskytují. Právě tento zápis zlomku $\frac{2}{97}$ je uveden jako řešení jedné z historických úloh v [3].

Literatura

[1] Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, New York, 1990.

[2] Hejný, M., Zlomky, (Kapitola 20). In.: *Dvacet pět kapitol zdidaktiky matematiky*. Editoři: Hejný M., Novotná J., Stehlíková N., Univerzita Karlova - Pedagogická fakulta, Praha 2004, str. 343-356.

[3] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[4] Van Der Waerden, B.,L., *Probužďajuščajasa nauka*, (Matěmatika drevněvo Egypta, Vavilona i Greciji – ruský překlad), Gos. izd. fiz.-mat. litěratury, Moskva, 1959.

[5] Trch, M., Zapotilová, E., Graded set sof non-standard tasks in mathematic teaching, In.: *Proceeding ERCME 97*, eds. Hejný

M. and Novotná J., Poděbrady, Charles University, Faculty of Education, 1997, p. 165–167.

[6] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků I (Řešení neurčitých rovnic), *Učitel matematiky* **18**(2009), s. 28–35, JČMF Praha.

[7] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků II (Postupné redukce zlomku), *Učitel matematiky* **18**(2010), s. 78–85, JČMF Praha.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz