EGYPTSKÉ ZÁPISY ZLOMKŮ II

(Postupné redukce zlomku)

LADISLAV BERAN, MILAN TRCH

Z historie matematiky a z našeho článku o egyptských zápisech zlomků víme, že některé kladné zlomky je možné zapsat součtem po dvou různých kmenových zlomků. Tento článek bezprostředně navazuje na práci, která byla věnována egyptským zápisům zlomků a řešení neurčitých rovnic. Proto jsou používány stejné pojmy a označení jako v článku [5].

Cílem tohoto článku je především důkaz tvrzení, že každý kladný zlomek je vždy možné zapsat jako součet konečného počtu po dvou různých kmenových zlomků. Ukážeme však, že takové vyjádření racionálních čísel není jednoznačné. Na několika příkladech budou vysvětleny způsoby, kterými je možné některé z egyptských zápisů racionálních čísel získat.

Egyptské zápisy zlomků a racionální čísla

Každé kladné racionální číslo r, které není celé, lze zapsat jednoznačně ve tvaru $c + \frac{p}{q}$, kde c je nějaké nezáporné celé číslo a $0 < p < q$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Proto se dále omezíme pouze na takové zlomky $\frac{p}{q}$, pro které platí $0 < \frac{p}{q} < 1$. *Kmenovým zlomkem* je každé racionální číslo, které lze zapsat ve tvaru $\frac{1}{q}$, kde $q > 1$ je přirozené číslo. *Egyptským zápisem* zlomku $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, je každý součet k po dvou různých kmenových zlomků $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k}$, pro který platí rovnost:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}.$$

Dva egyptské zápisy zlomku $\frac{p}{q}$ pokládáme za různé tehdy, když alespoň jeden z obou zápisů obsahuje kmenový zlomek, který se ve druhém nevyskytuje. To zřejmě nastává vždy, když mají oba zápisy různý počet sčítanců. Mají-li dva různé egyptské zápisy nějakého zlomku $\frac{p}{q}$ stejný počet sčítanců, pak lze nahlédnout, že jeden z nich musí obsahovat alespoň dva kmenové zlomky, které nejsou obsaženy ve druhém z obou zápisů.

Redukce zlomku nejbližšími kmenovými zlomky

Je-li dán zlomek $0 < \frac{p}{q} < 1$, kde $1 < p < q$ jsou nějaká nesoudělná přirozená čísla, potom platí $1 < \frac{q}{p}$. Proto existuje jednoznačně určené přirozené číslo $n > 1$ takové, že platí $n - 1 < \frac{q}{p} \leq \leq n$. To znamená, že pro daný zlomek platí nerovnost $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q} < < \frac{1}{n-1}$. Proto zřejmě platí také podmínka $p \cdot (n-1) < q$. Pro rozdíl zlomků $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$ pak platí $0 \leq \frac{p}{q} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)} < 1$.

Zapíšeme-li rozdíl $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$ ve tvaru $\frac{pn-q}{nq}$, dostáváme redukovaný zlomek $\frac{r}{nq}$, pro který platí $0 \leq \frac{r}{nq} < 1$. Vzhledem k předpokladu $1 < p < q$ však v tomto případě nemůže na levé straně nastat rovnost. Pro čitatele redukovaného zlomku $\frac{r}{nq}$ platí vzhledem k podmínce $p \cdot (n-1) < q$ nerovnost:

$$r = (np - q) = [(n-1)p + p] - q \leq q + (p - q) = p.$$

Ta zaručuje, že čitatel redukovaného zlomku je vždy menší než čitatel neredukovaného zlomku. Proces redukce je možné stejným způsobem znovu opakovat pro redukovaný zlomek. Při každém redukčním kroku klesají hodnoty čitatelů postupně redukovaných zlomků. Protože před číslem $p > 1$ je pouze konečný počet menších přirozených čísel, je proces postupné redukce každého zlomku konečný. Při posledním redukčním kroku je nutně redukovaný zlomek zlomkem kmenovým, a proto platí následující tvrzení:

Věta 1. *Každý zlomek* $0 < \frac{p}{q} < 1$, *kde* $1 < p < q$, *lze vyjádřit součtem nanejvýše* p *po dvou různých kmenových zlomků.*

Tento poznatek nezaručuje jen existenci egyptských zápisů pro libovolně daný kladný zlomek. Nabízí zároveň způsob, kterým je možné vytvořit jeden z mnoha egyptských zápisů, který má každé kladné racionální číslo alespoň jeden.

Příklad 1. *Vyjádřete zlomek $\frac{10}{13}$ součtem kmenových zlomků postupnou redukcí zlomku zdola nejbližšími kmenovými zlomky.*

Řešení: Pro zlomek $\frac{10}{13}$ platí $\frac{1}{2} = \frac{10}{20} < \frac{10}{13} < \frac{10}{10} = 1$. Proto při prvním redukčním kroku dostáváme:

(i) $\frac{10}{13} - \frac{1}{2} = \frac{20-13}{26} = \frac{7}{26}$. Pro tento zlomek platí $\frac{1}{4} < \frac{7}{26} < \frac{1}{2}$. Proto při druhém redukčním kroku dostáváme zlomek:

(ii) $\frac{7}{26} - \frac{1}{4} = \frac{14-13}{52} = \frac{1}{52}$. Tím je proces postupné redukce zlomku dokončen. Zlomek $\frac{10}{13}$ lze tedy zapsat ve tvaru $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{52}$.

Dvojková soustava a vyjadřování zlomků kmenovými zlomky

Každé přirozené číslo p lze zapsat ve dvojkové soustavě. To znamená, že existují přirozené číslo m a číslice $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ takové, že platí:

$$p = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_m \cdot 2^m.$$

Bude-li platit $p < 2^n$, lze čitatele p libovolného zlomku $0 < \frac{p}{2^n q} < 1$ vyjádřit součtem mocnin čísla 2. Proto je možné takový zlomek $\frac{p}{2^n q}$ zapsat součtem nejvýše n zlomků typu $\frac{2^k}{2^n q}$, kde $k < n$. Protože v každém ze zlomků je $k < n$, dostáváme po zkrácení každého ze sčítanců číslem 2^k vyjádření zlomku $\frac{p}{2^n q}$ součtem nejvýše n kmenových zlomků. Tím jsme dokázali následující větu:

Věta 2. *Každý zlomek $0 < \frac{p}{2^n q} < 1$, kde $p < 2^n$, lze vyjádřit součtem po dvou různých kmenových zlomků.*

Každé kladné reálné číslo lze v poziční soustavě o základu 2 zapsat (obecně neukončeným) *dyadickým rozvojem.* Pro každé přirozené číslo m a pro každý zlomek $0 < \frac{p}{q} < 1$ existují číslice $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \{0, 1\}$ takové, že platí:

$$\frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_m}{2^m} \leq \frac{p}{q} < (\frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_m}{2^m}) + \frac{1}{2^m}.$$

Číslo $\frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_m}{2^m}$ se nazývá nejbližší *dolní* (dyadický) *odhad* m-tého řádu zlomku $\frac{p}{q}$. Pokud by v tomto zápise nastala rovnost, pak příslušný dolní odhad čísla $\frac{p}{q}$ představuje zároveň jeden z možných zápisů racionálního čísla r součtem po dvou různých kmenových zlomků. Předpokládejme proto, že v zápise pro dané přirozené číslo m rovnost nenastává.

Bude-li přirozené číslo m voleno tak, že platí $2^m < q < 2^{m+1}$, pak musí být zřejmě rozdíl čísel $\frac{p}{q}$ a $(\frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_m}{2^m})$ menší než $\frac{1}{2^m}$.

Vyjádříme-li (po převedení rozdílu zlomků na společného jmenovatele) tento rozdíl čísel ve tvaru $\frac{s}{2^m q}$, pak dostáváme rovnost

$$\frac{s}{2^m q} = \frac{2^m p - q \cdot (b_1 \cdot 2^{m-1} + b_2 \cdot 2^{m-2} + \cdots + b_m)}{2^m q}.$$

Je-li zlomek $\frac{s}{2^m q}$ menší než $\frac{1}{2^m}$, musí být jeho čitatel s menší než číslo q. Protože však platí $q < \frac{1}{2^{m+1}}$, je možné čitatele s upraveného zlomku vyjádřit ve dvojkové soustavě ve tvaru $s = c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + \cdots + c_k \cdot 2^k$, kde $k < m + 1$ a $c_i \in \{0, 1\}$ pro každé $1 < i < k < m$. Pak je zlomek $\frac{(c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + \cdots + c_k \cdot 2^k)}{2^m q}$ součtem nejvýše k zlomků $\frac{c_i \cdot 2^i}{2^m q}$, kde $c_i \in \{0, 1\}$ a $1 \leq i \leq k$. Po zkrácení každého zlomku $\frac{c_i \cdot 2^i}{2^m q}$ mocninou 2^i lze proto zlomek $\frac{s}{2^m q}$ vyjádřit součtem kmenových zlomků $\frac{c_i}{2^{m-i}}$, kde $c_i \in 0, 1$ a $1 \leq i \leq k$.

To znamená, že pro každý zlomek $0 < \frac{p}{q} < 1$ existují přirozená čísla k, m taková, že platí:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_m}{2^m}\right) +$$
$$+ \left(\frac{c_k}{2^{m-k}} + \frac{c_{k-1}}{2^{m-k+1}} + \cdots + \frac{c_1}{2^{m-1}} + \frac{c_0}{2^m}\right) \cdot \frac{1}{q}.$$

Také tento vztah nezaručuje pouze existenci vyjádření zlomku součtem po dvou různých kmenových zlomků (v zápisu stačí vynechat všechny sčítance, které mají nulového čitatele). Naznačený postup dává další návod, jak některý z existujících egyptských zápisů daného zlomku určit. Stačí totiž od zadaného zlomku postupně odečítat zdola nejbližší kmenové zlomky typu $\frac{1}{2^k}$ tak dlouho, dokud nebude čitatel redukovaného zlomku dostatečně malý.

Příklad 2. *Zapište zlomek $\frac{5}{13}$ součtem po dvou různých kmenových zlomků.*

Řešení:

(i) Pro daný zlomek platí následující nerovnosti $\frac{1}{4} < \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$. Pro redukovaný zlomek platí $\frac{r}{4\cdot 13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4\cdot 13}$. Protože je $7 = 1 + 2 + 2^2$, platí také následující rovnost $\frac{7}{4\cdot 13} =$ $= \frac{1+2+4}{4\cdot 13} = \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$.
To znamená, že $\frac{5}{13} = \frac{1}{4} + (\frac{1}{13} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52})$ a daný zlomek lze zapsat součtem čtyř po dvou různých kmenových zlomků.

(ii) Protože pro již jednou redukovaný zlomek $\frac{7}{52}$ platí nerovnost $\frac{1}{8} < \frac{7}{52} < \frac{1}{4}$, dostáváme po opakované redukci rovnost $\frac{7}{52} - \frac{1}{8} = \frac{14}{8\cdot 13} - \frac{13}{8.\cdot 13} = \frac{1}{104}$. Ukazuje se, že daný zlomek je možné zapsat také součtem tří po dvou různých kmenových zlomků ve tvaru $\frac{5}{13} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{104}$.

Příklad 3. *Vyjádřete zlomek $\frac{47}{29}$ součtem kmenových zlomků jak postupnou redukcí zlomku pomocí zdola nejbližších kmenových* *zlomků, tak pomocí redukce ve dvojkové soustavě a porovnejte náročnost obou metod.*

Řešení:

(1) Protože $1 < \frac{47}{29}$, je $\frac{47}{29} = 1 + \frac{18}{29}$. Proto budeme postupně redukovat zlomek $\frac{18}{29}$.

(i) Protože platí $\frac{1}{2} < \frac{18}{29} < 1$, dostáváme po první redukci zlomek $\frac{18}{29} - \frac{1}{2} = \frac{5}{58}$. Proto platí rovnost $\frac{47}{29} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{58}$.

(ii) Protože platí $\frac{1}{12} < \frac{5}{29} < \frac{1}{11}$, dostáváme po druhé redukci zlomek $\frac{5}{29} - \frac{1}{12} = \frac{30-29}{12 \cdot 29} = \frac{1}{348}$. Proto platí rovnost $\frac{47}{29} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{348}$. To znamená, že zlomek lze zapsat alespoň jedním způsobem jako součet čtyř po dvou různých kmenových zlomků.

(2) Podobně jako v předcházejícím případě platí $1 < \frac{47}{29}$, a tedy je $\frac{47}{29} = 1 + \frac{18}{29}$. Proto budeme postupně redukovat zlomek $\frac{18}{29}$ kmenovými zlomky typu $\frac{1}{2^k}$.

(i) Protože platí $\frac{1}{2} < \frac{18}{29} < 1$, dostáváme po první redukci zlomek $\frac{18}{29} - \frac{1}{2} = \frac{5}{58}$.

(ii) Protože $\frac{1}{16} < \frac{5}{58} < \frac{1}{8}$, dostáváme po druhé redukci zlomek $\frac{5}{58} - \frac{1}{16} = \frac{80-58}{16 \cdot 29} = \frac{22}{464} = \frac{11}{8 \cdot 29}$. Protože je $8 < 11$, lze zlomek $\frac{11}{8 \cdot 29}$ znovu redukovat.

(iii) Protože $\frac{1}{32} < \frac{11}{8 \cdot 29} < \frac{1}{16}$, dostáváme po třetí redukci zlomek $\frac{11}{8 \cdot 29} - \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{44-29}{32 \cdot 29} = \frac{15}{32 \cdot 29}$. V tomto okamžiku je $15 < 32$, a to znamená, že čitatel redukovaného zlomku je menší než příslušná mocnina čísla 2 ve jmenovateli. Proto lze proces postupné redukce ukončit.

Protože $15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$, je

$$\frac{15}{32 \cdot 29} = \frac{1+2+4+8}{32 \cdot 29} = \frac{1}{116} + \frac{1}{232} + \frac{1}{464} + \frac{1}{928}.$$

Zlomek je tedy možné vyjádřit také součtem sedmi po dvou různých kmenových zlomků:

$$\frac{47}{29} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{116} + \frac{1}{232} + \frac{1}{464} + \frac{1}{928}\right).$$

(3) Pozorný čtenář si možná všiml, že ve druhém případě by bylo možné poněkud zdlouhavý výpočet urychlit, protože platí $11 = 2^0 + 2^1 + 2^3$. Pomocí dvojkové soustavy lze tedy vyjádřit již zlomek $\frac{11}{8 \cdot 29}$. Platí-li $\frac{1+2+8}{8 \cdot 29} = \frac{1}{29} + \frac{1}{116} + \frac{1}{232}$, potom je možné daný zlomek vyjádřit také součtem šesti kmenových zlomků ve tvaru: $\frac{47}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{29} + \frac{1}{116} + \frac{1}{232}$.

Shrnutí

Proces postupné redukce zlomku $\frac{p}{q}$ se při každém redukčním kroku opírá o nalezení horního a dolního odhadu redukovaného zlomku vhodnými kmenovými zlomky a následný výpočet rozdílu příslušné dvojice zlomků. Je zřejmé, že s rostoucími hodnotami přirozených čísel p, q může rychle narůstat počet redukčních kroků. Současně s tím však bude také narůstat složitost numerických výpočtů. Přesto, že obě redukční metody lze použít pro libovolný kladný zlomek $\frac{p}{q}$, jsou výpočty proveditelné jen pro zlomky s menšími hodnotami čísel p, q.

Literatura

[1] Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, New York, 1990.

[2] Hejný, M., Zlomky, *In: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, editoři: Hejný M., Novotná J., Stehlíková N., Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, Praha 2004, s. 343-356.

[3] Konforovič, A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[4] Van Der Waerden, B. L., *Probužďajuščajasa nauka*, (Matěmatika drevněvo Egypta, Vavilona i Greciji – ruský překlad), Gos. izd. fiz.-mat. litěratury, Moskva, 1959.

[5] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků I., *Učitel matematiky* **73**(2009), str. 28–35.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz