Učitel matematiky

Dalibor Martišek

Několik poznámek k mohutnosti množin

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 2, 92–103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150456

NĚKOLIK POZNÁMEK K MOHUTNOSTI MNOŽIN

Dalibor Martišek

Tento text je inspirován článkem Kuřiny a Vondrové (2021, s. 111–127) a snahou uvést na pravou míru alespoň jeden z omylů, které jsou v tomto článku prezentovány. Zopakujme nejprve několik známých pojmů.

Konečné a nekonečné množiny

Troufám si tvrdit, že pojem nekonečna každý z nás svým způsobem více či méně chápe. Na úvod připomeňme, že lze rozlišovat dva základní typy nekonečna. Za prvé nekonečno potenciální, kdy nějaký proces neustále prodlužujeme tak, že principiálně nemusí nikdy skončit, a za druhé nekonečno aktuální, kdy o procesu, který se skládá z potenciálně nekonečného počtu kroků, začneme uvažovat jako o jednom celku.

Ke každému přirozenému číslu existuje číslo větší. Vymýšlení stále větších a větších přirozených čísel nemůže nikdy skončit. Je to proces potenciálně nekonečný. Připustíme-li však, že o všech přirozených číslech lze uvažovat jako o jednom celku – souboru, systému, množině – objevili jsme nekonečno aktuální. Množina všech přirozených čísel je nekonečná aktuálně.

Existují-li množiny nekonečné, existují samozřejmě i množiny konečné a je otázka, jak konečné a nekonečné množiny odlišit. Jedno z možných kritérií je vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení. Jestliže je možné množinu bijektivně zobrazit na její vlastní podmnožinu, je nekonečná, jestliže to možné není, je konečná.

Mohutnost, spočetnost a nespočetnost

Dvě množiny, mezi kterými existuje bijekce, nazýváme ekvivalentní. O dvou konečných ekvivalentních množinách běžně říkáme, že mají stejný počet prvků. Abychom podobně mohli uvažovat o množinách nekonečných, hovoříme místo o počtu prvků raději o mohutnosti. O množinách, které mají stejnou mohutnost, můžeme rovněž říci, že mají stejné kardinální číslo.

Příklad 1.

a) Množiny $A = \{a; b; c; d\}$; $B = \{\triangle; \square; \blacksquare; \spadesuit\}$ jsou konečné a mají stejnou mohutnost (kardinální číslo čtyři). Píšeme $|A| = |B|$.

b) Množina $C = \{\triangle; \square; \blacksquare; \spadesuit; \heartsuit\}$, má mohutnost větší než množiny A; B z předchozího příkladu – zobrazení $A \to C$, resp. $B \to C$ může být sice prosté, ale v tom případě pouze injektivní (alespoň jeden prvek množiny C není obrazem žádného prvku množiny A, resp. B). Píšeme $|C| > |A|$, resp. $|C| > |B|$.

Poznámka 1. V mnohých středoškolských textech se setkáváme s oddělováním prvků množin čárkami. Někteří autoři dokonce takový zápis považují za „standardní“. Tento „standard“ ovšem zcela popírá základní smysl pojmu množina. V zápisech typu $M = \{1, 2, 3, 4\}$ totiž nelze určit, která čárka odděluje prvky a která je desetinná. Nevíme tak, které prvky do množiny patří a které ne, nevíme dokonce ani to, kolik těch prvků vlastně je.

Příklad 2. Množina $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ všech přirozených čísel a množina $D = \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ jsou obě nekonečné a mají stejnou mohutnost.

Množiny ekvivalentní s množinou $\mathbb{N}$ nazýváme spočetné, jejich mohutnost značíme $\aleph_0$. Je to nejmenší nekonečné kardinální číslo.

Bijektivní zobrazení umožňuje každý prvek spočetné množiny opatřit přirozeným číslem jako indexem. Jedno z možných bijektivních zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to D$ množin z př. 3 je dáno předpisem $f(n) = a_n = n + 2$.

Příklad 3.

a) Množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel je spočetná, příslušná bijekce je (například)

$$\mathbb{Z} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; \ldots\} = \{0; 1; -1; 2; -2; \ldots\}\,.$$

b) Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná, bijekci sestrojíme následovně: každé racionální číslo budeme reprezentovat zlomkem $\frac{p}{q}$; $q > 0$ v základním tvaru (kromě toho $0 = \frac{0}{1}$). Tyto zlomky seřadíme vzestupně nejprve podle součtu $|p| + q$, podmnožiny se stejným součtem pak podle čitatele, tedy

$$\mathbb{Q} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; \ldots\} = \left\{\frac{0}{1}; \frac{-1}{1}; \frac{1}{1}; \frac{-2}{1}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \ldots\right\}.$$

c) Interval $(0; 1)$ však spočetný není, jak dokázal Georg Cantor tzv. diagonální metodou. Důkaz provedl sporem: předpokládejme, že množina $(0; 1)$ je spočetná. To znamená, že všechna reálná čísla z tohoto intervalu lze opatřit indexy z množiny $\mathbb{N}$, tj.

$$\begin{aligned} (0;1) = \{a_1 &= 0{,}\boldsymbol{\alpha_1}\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots \\ a_2 &= 0{,}\beta_1\boldsymbol{\beta_2}\beta_3\beta_4\ldots \\ a_3 &= 0{,}\gamma_1\gamma_2\boldsymbol{\gamma_3}\gamma_4\ldots \\ \vdots \quad &\vdots \;\ldots\ldots\ldots\ddots\ldots\} \end{aligned}$$

kde $\alpha_i; \beta_i; \gamma_i; \dots \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ jsou cifry desetinného rozvoje jednotlivých čísel. Nyní vezměme číslo $b \in (0; 1)$ takové, že $b = 0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots$, kde $b_1 \neq \alpha_1$, $b_2 \neq \beta_2$; $b_3 \neq \gamma_3$ atd. Takové číslo existuje (tato nerovnost má v případě desítkové soustavy pro každou cifru dokonce devět řešení) a v našem seznamu není. Každé zobrazení $\mathbb{N} \to (0; 1)$ je tak přinejlepším pouze injektivní, množina $(0; 1)$ má tedy větší mohutnost než $\mathbb{N}$. Zobrazení f, kde pro každé $x \in (0; 1)$ je $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi$, je zřejmě bijekcí $(0; 1) \to \mathbb{R}$. To znamená, že množina $\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako interval $(0;1)$. Je tedy $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |(0;1)| = |\mathbb{R}|$.

Georg Cantor tak objevil pozoruhodnou skutečnost, že i aktuální nekonečna mohou být „různě velká“. Mohutnost $|(0;1)| = |\mathbb{R}|$ nazýváme mohutností kontinua. Množiny, které mají mohutnost kontinua nebo větší (v dalším textu poznáme, že i takové existují) nazýváme nespočetné.

Poznámka 2 (hypotéza kontinua). Vyvstala tak přirozeně otázka, zda existuje množina M, pro kterou je $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |M| < < |\mathbb{R}|$. Ukázalo se, že existenci této množiny nelze v dosavadní teorii množin ani dokázat, ani vyvrátit. Hypotézu, že taková množina neexistuje (tzv. hypotézu kontinua), lze tedy přijmout jako axiom, mohutnost $|\mathbb{R}|$ prohlásit za mohutnost nejblíže vyšší spočetnosti $\aleph_0$ a označit ji $\aleph_1$.

Mohutnost potenční množiny a půlení intervalu

Potenční množina $\mathscr{P}(M)$ množiny M je množina všech podmnožin množiny M. V případě, že množina M je konečná a n-prvková, tedy $|M| = n$, je $|\mathscr{P}(M)| = 2^n$, jak lze poměrně snadno dokázat matematickou indukcí. Jednoprvková množina $\{a_1\}$ má skutečně 2^1 podmnožin (totiž samu sebe a množinu prázdnou). Má-li množina $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ 2^n podmnožin, pak její sjednocení s disjunktní množinou $\{a_{n+1}\}$ má za následek skutečnost, že každou ze stávajících 2^n podmnožin je možné rovněž sjednotit s $\{a_{n+1}\}$, čímž vznikne dalších 2^n disjunktních podmnožin. Počet podmnožin $(n+1)$-prvkové množiny je tak $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Úvaha 1. Kardinální číslo potenční množiny $\mathscr{P}(M)$ konečné množiny M dostaneme umocněním dvojky na kardinální číslo této množiny. Kardinální číslo potenční množiny $\mathscr{P}(M)$ v případě, že množina M je spočetná, označíme tedy celkem logicky $2^{\aleph_0}$. Otázkou je, jakou mohutnost toto kardinální číslo zastupuje. Ke zodpovězení této otázky uděláme malou odbočku.

Úvaha 2. Uvažujme rovnici $2x^2 - 1 = 0$. Zapomeňme na chvíli, že kořeny této jednoduché rovnice všichni známe, aniž bychom ji museli řešit, a hledejme jeden její kořen metodou půlení intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Prvním půlením získáme dva subintervaly a zjistíme, že kořen leží v pravém z nich. Rozpůlením intervalu $\langle 0{,}5; 1\rangle$ získáme opět dva subintervaly a zjistíme, že kořen leží v levém z nich. Tímto způsobem můžeme pokračovat libovolně dlouho a získávat stále přesnější aproximace kořene. Využíváme tak potenciálního nekonečna – ke každému kroku existuje krok následující, ke každé libovolně přesné aproximaci existuje aproximace přesnější.

Přejděme ovšem myšlenkově k nekonečnu aktuálnímu. Všechna možná půlení tvoří spočetnou množinu (každý krok sebedelšího procesu je možno očíslovat přirozeným číslem), mohutnost této množiny je $\aleph_0$. Po tomto „počtu kroků“ dostaneme hodnotu kořene zcela přesně. Tato skutečnost je zřejmá zvláště tehdy, jestliže si uvědomíme, že rozvoj každého reálného čísla v libovolné číselné soustavě má jen spočetně mnoho cifer. Zcela jasné je to v případě rozvoje binárního, kdy každé půlení, každé zkrácení intervalu na polovinu, má za následek zisk následující nuly či jedničky.

Učiňme další myšlenkový skok. Budeme opět půlit interval $\langle 0; 1\rangle$, ale v každém dalším kroku budeme tentokrát půlit nikoli jeden vybraný subinterval, ale všechny subintervaly, které máme v danou chvíli k dispozici. V prvním kroku získáme dva subintervaly, každý o délce jedné poloviny. Ve druhém kroku 2^2 subintervalů, každý s délkou 2^{-2}. V n-tém kroku pro $n \in \mathbb{N}$ pak 2^n subintervalů každý o délce 2^{-n}. Přechodem k aktuálnímu nekonečnu máme $2^{\aleph_0}$ subintervalů každý o délce nula. Každý z těchto subintervalů je tak obrazem právě jednoho reálného čísla (viz předchozí odstavec) a naopak – každé reálné číslo je vzorem jediného intervalu, tj. vzorem v zobrazení inverzním. Množina všech jednoprvkových podmnožin intervalu $\langle 0; 1\rangle$ (tj. i jeho prvků samotných – reálných čísel) má tedy mohutnost $2^{\aleph_0}$. Stejnou mohutnost – $2^{\aleph_0}$ – má tedy i množina $\mathbb{R}$ – viz příklad 3c a rovněž potenční množina libovolné spočetné množiny (viz úvaha 2). Platí tedy $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\mathbb{Z})| = |\mathscr{P}(\mathbb{Q})| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ a přijmeme-li hypotézu kontinua, pak rovněž $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (viz poznámka 2).

Podivně nefungující zip

V článku Kuřiny a Vondrové (2021) se můžeme dočíst: „Přirozeně se naskýtá otázka, zda mají stejnou mohutnost množiny J a kartézský součin $J \times J$. I zde je odpověď (...) kladná“ (str. 119).

Tato věta platí jen pro nekonečné množiny a skutečnost, že množina J je nekonečná, lze poněkud pracně pochopit jen z předchozího textu výše jmenovaného článku. Odpusťme však autorům této věty drobný nedostatek a podívejme se nejdříve na argumenty, kterými toto tvrzení konkrétně pro interval $(0;1)$ podepřeli. Jejich text jsme si dovolili poněkud zestručnit.

Každý prvek množiny $(0;1) \times (0;1)$ je uspořádaná dvojice $[a_1;a_2]$ reálných čísel tvaru $0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, resp. $0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$ dle příkladu 3c. Tuto dvojici autoři zobrazili na číslo

$$b = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\alpha_4\beta_4\ldots$$

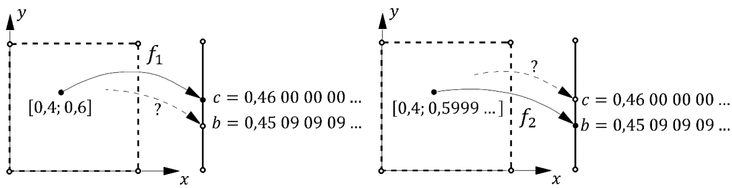
Protože ze zápisů čísel $a_1;a_2$ předem vyloučili rozvoje končící periodickou devítkou, jsou všechny cifry $\alpha_i;\beta_i$ určeny jednoznačně, každou dvojici $[a_1;a_2] \in (0;1)^2$ lze jednoznačně „spojit“, „sepnout“ do čísla $b \in (0;1)$ a naopak, každé číslo b lze jednoznačně „rozpojit“, „rozepnout“ do dvojice $a_1;a_2$. Slovesa v uvozovkách jsme zde použili záměrně, neboť Peter Zamarovský přirovnal tento princip k zipu (Zamarovský, 2018 str. 148; Kuřina & Vondrová, 2021, s. 119, 120). Přirovnání jistě vtipné a didakticky velmi trefné. Má však jednu podstatnou vadu – tento zip nefunguje, důkaz je špatně.

Popsané „zapínání zipu“ (označme ho f) totiž není bijekcí, ale pouze injekcí. Intuitivně bychom očekávali, že to bude injekce úsečky do čtverce (čtverec přeci musí obsahovat „víc“ bodů než jeho strana). Je to ovšem přesně naopak – jedná se o injekci čtverce do úsečky. Populárně řečeno – zobrazení f „namačká“ všechny body čtverce pouze do „části“ (vlastní podmnožiny) jedné jeho strany.

Ještě zajímavější je ovšem další věc. Je známo, že každé číslo s konečným dekadickým rozvojem lze chápat jako číslo s rozvojem nekonečným, a to buď s nekonečnou posloupností nul, anebo devítek, např.

$$0{,}46 = 0{,}460\,000\ldots = 0{,}459\,999\ldots$$

Kuřina s Vondrovou zvolili první zápis (s nulami) a dostali injekci f_1 čtverce do úsečky. Kdyby zvolili druhý zápis (s devítkami), dostali by rovněž injekci, ale byla by to jiná injekce. Byla by to injekce $f_2 \neq f_1$, jejíž obor hodnot by „obsadil“ jiné body než hodnoty injekce f_1 (viz obr. 1).



Obr. 1: „Zapínání Zamarovského zipu“ není bijektivní, ale pouze injektivní. Obor hodnot navíc závisí na volbě zápisu racionálního čísla.

Popsané „rozepínání zipu“ – označme ho $g\colon (0;1) \to (0;1)^2$ – není bijekcí, ale jen surjekcí, o čemž svědčí například obrazy čísel $b = 0{,}45\,09\,09\,09\ldots$; $c = 0{,}46\,00\,00\,00\ldots$. Zcela evidentně je $b; c \in (0;1)$; $b \neq c$, a přitom obrazem těchto dvou různých čísel je tatáž dvojice $g(b) = g(c) = [0{,}4; 0{,}5\bar{9}] = [0{,}4; 0{,}6]$ bez ohledu na to, zda jsme na počátku naší úvahy předem vyloučili periodické devítky, anebo nuly.

Každá dvě (různá) čísla tvaru

$$b = 0{,}\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\ldots\beta_k\gamma_k 9\gamma_{k+1}9\gamma_{k+2}9\ldots \neq$$
$$\neq c = 0{,}\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\ldots(\beta_k+1)\gamma_k 0\gamma_{k+1}0\gamma_{k+2}0\ldots,$$

kde $\beta_k < 9$, zobrazí zobrazení g na tutéž uspořádanou dvojici

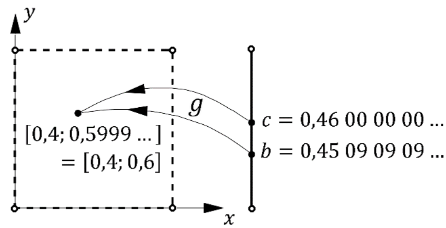
$$g(b) = g(c) = [a_1; a_2] =$$
$$= [0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_k 9999\ldots; 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}\gamma_k\gamma_{k+1}\gamma_{k+2}\ldots] =$$
$$= [0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}(\beta_k+1)0000\ldots; 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}\gamma_k\gamma_{k+1}\gamma_{k+2}\ldots]$$

Každá dvě (různá) čísla tvaru

$$b = 0{,}\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\ldots\beta_k\gamma_k\beta_{k+1}9\beta_{k+2}9\ldots$$
$$\neq c = 0{,}\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\ldots\beta_k(\gamma_k+1)\beta_{k+1}0\beta_{k+2}0\ldots,$$

kde $\gamma_k < 9$, zobrazí zobrazení g na tutéž uspořádanou dvojici

$$g(b) = g(c) = [a_1; a_2] =$$
$$= [0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots; 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}\gamma_k 9999\ldots] =$$
$$= [0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots; 0{,}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(\gamma_k+1)0000\ldots]$$



Obr. 2: „Rozepínání Zamarovského zipu“ není bijektivní, ale pouze surjektivní.

Tato situace nastane vždy, když se v desetinném rozvoji čísla b nachází nekonečná posloupnost cifer $b_k 9 b_{k+1} 9 b_{k+2} 9\ldots$, resp. v desetinném rozvoji čísla c se nachází posloupnost cifer $9c_k 9c_{k+1} 9c_{k+2}\ldots$, kde $k \in \mathbb{N}$, a takových posloupností je dokonce nespočetně mnoho, jak lze dokázat mírnou modifikací Cantorovy diagonální metody, která byla předvedena v příkladu 3c.

Mohutnost kartézského součinu

Jak je to tedy s mohutností kartézského součinu množin? Kartézský součin konečných množin má mohutnost větší než původní množiny. Díky tomu nám funguje násobilka. Podle nefungujícího Zamarovského zipu bychom mohli soudit, že u nekonečných množin je tomu naopak, že součin má mohutnost menší než původní množiny. Jestliže jsme ovšem zjistili, že jedno konkrétní zobrazení není bijekce, ani zdaleka to ještě neznamená, že žádná bijekce neexistuje.

Vraťme se ke kardinálním číslům. Každé přirozené číslo je (konečným) kardinálním číslem (viz příklad 1), setkali jsme se ovšem i se dvěma různými kardinálními čísly nekonečnými – $\aleph_0 < \aleph_1$. Aritmetické operace sečítání, násobení a umocňování lze zobecnit z přirozených čísel na čísla kardinální takto: Jsou-li $\alpha = |A|$; $\beta = |B|$ dvě kardinální čísla (ať už konečných, anebo nekonečných množin), pak

a) $\alpha + \beta = |A \cup B|$ (zde je třeba navíc předpokládat, že množiny A; B jsou disjunktní),

b) $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$,

c) $\alpha^\beta = |\,\{f\colon B \to A\}\,|$ (tj. mohutnost množiny všech možných zobrazení $B \to A$).

Operace s kardinálními čísly mají i známé vlastnosti – jsou komutativní, asociativní, násobení je distributivní vzhledem ke sčítání, pro mocninu platí známé

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.$$

Protože tuto rovnost dále využijeme, naznačme její důkaz (prosím čtenáře, aby jednotlivé kroky promyslel):

$$\alpha^{\beta+\gamma} \overset{\text{a)}}{=} \alpha^{|B\cup C|} \overset{\text{c)}}{=} |\,\{f\colon B \cup C \to A\}\,| \overset{\text{a)}\Rightarrow B\cap C=\emptyset}{=}$$
$$= |\,\{f\colon B \to A\} \times \{f\colon C \to A\}\,| \overset{\text{b,c)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma \qquad \square$$

Můžeme se snadno přesvědčit, že v případě konečných kardinálních čísel dostáváme známé elementární aritmetické operace. Jak však bude vypadat například součet čísel $\alpha = \beta = \aleph_0$ a součin čísel $\gamma = \delta = \aleph_1$?

Abychom sestrojili součet $\alpha + \beta = \aleph_0 + \aleph_0$, je potřeba najít dvě disjunktní spočetné množiny jako reprezentanty kardinálního čísla $\aleph_0$ a najít kardinální číslo jejich sjednocení. Takovými množinami jsou například množiny $L = \{1; 3; 5; \ldots\}$, resp. $S = \{2; 4; 6; \ldots\}$ všech lichých, resp. sudých čísel. Jsou disjunktní, obě jsou spočetné, jejich sjednocením je množina $\mathbb{N}$, takže máme

$$\aleph_0 + \aleph_0 = |L| + |S| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Součin $\gamma \cdot \delta = \aleph_1 \cdot \aleph_1$ již snadno odvodíme z hypotézy kontinua, vlastností mocniny a součtu:

$$\aleph_1 \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Tato rovnost říká, že mohutnost kartézského součinu dvou libovolných množin ekvivalentních s množinou $\mathbb{R}$ je opět ekvivalentní s množinou $\mathbb{R}$. Interval $(0; 1)$ je ekvivalentní s $\mathbb{R}$ (viz příklad 1c), platí tedy, že i $(0; 1) \times (0; 1)$ je ekvivalentní s $\mathbb{R}$. Je tedy $|(0; 1)| = |(0; 1)^2| = |\mathbb{R}|$.

Po Cantorově důkazu sporem jsme se dotkli další důležité důkazové techniky – tzv. nekonstruktivního důkazu. Ukázali jsme, že množiny $(0; 1)$; $(0; 1)^2$ mají mohutnost kontinua, takže mezi nimi musí existovat bijektivní zobrazení. Neposkytli jsme však žádný návod, jak takové zobrazení sestrojit. To je úkolem důkazu konstruktivního. Konstrukce této bijekce by však tento text neúměrně prodloužila.

Souboj potenciálního a aktuálního nekonečna

Jak bylo řečeno výše, hledání stále větších přirozených čísel je potenciálně nekonečné, protože ke každému libovolně velkému přirozenému číslu existuje číslo ještě větší. O všech přirozených číslech však lze uvažovat jako o jednom celku, který označíme $\mathbb{N}$ a který má nekonečně mnoho „objektů“ – prvků. Tím jsme myšlenkově ukončili potenciálně nekonečný proces hledání větších a větších čísel a dospěli jsme k nekonečnu aktuálnímu, jehož symbolickým vyjádřením je kardinální číslo $\aleph_0$.

Zjistili jsme ovšem, že i aktuální nekonečna mohou být různě velká a že $\aleph_0$ je nejmenším z nich. Číslo $\aleph_1$ je mohutností všech množin ekvivalentních s $\mathbb{R}$. Tato mohutnost je opět nekonečná, ovšem větší než $\aleph_0$. Je tedy $\aleph_0 < \aleph_1$.

Je přirozené se ptát, zda existuje mohutnost $\aleph_2$ větší než $\aleph_1$, tj. $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2$. Dokonce si pak můžeme položit otázku, zda existují stále větší a větší mohutnosti, tj.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_n < \aleph_{n+1} < \ldots$$

Formálně takové nerovnosti jistě napsat můžeme. Jde o to, zda lze množiny těchto mohutností také sestrojit. Odpověď na tuto otázku je kladná a konstrukce kupodivu docela jednoduchá. Jak jsme již konstatovali, je $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ a díky přijetí hypotézy kontinua můžeme doplnit $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Svoji potenční množinu má ovšem nejen množina $\mathbb{N}$, ale i množina $\mathbb{R}$. I v tomto případě platí analogicky $\aleph_1 = |\mathbb{R}| < |\mathscr{P}(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_1}$. Přijmeme-li tedy hypotézu $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ – je to jakýsi „následovník“ hypotézy kontinua – dostáváme $\aleph_2$ jako mohutnost množiny $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. I tato množina $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ má svoji potenční množinu – je to množina $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{R})\big)$. Zopakujeme-li předchozí úvahu, dostaneme $\big|\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{R})\big)\big| = \aleph_3$.

Takto můžeme zřejmě pokračovat libovolně dlouho. Dostáváme se tak do zajímavé situace. Aktuální nekonečna symbolicky vyjádřená kardinálními čísly $\aleph_0; \aleph_1; \aleph_2; \ldots$ jsou různě velká a k libovolně velkému aktuálnímu nekonečnu

$$\aleph_n = \left|\mathscr{P}\Bigg(\mathscr{P}\Big(\ldots\big(\mathscr{P}(\mathbb{R})\big)\Big)\Bigg)\right| \qquad (n-1 \text{ závorek})$$

lze najít aktuální nekonečno $\aleph_{n+1}$, které je větší. Máme zde tedy souhrn či soubor aktuálních nekonečen, který je nekonečný pouze potenciálně.

Poslední otázkou zůstává, zda i o všech kardinálních číslech lze uvažovat jako o jednom celku, souhrnu či souboru. Zda i zde může zvítězit nekonečno aktuální.

Intuitivní teorie množin odpoví ne, možné to není. V intuitivní teorii množin jsou totiž pojmy celek, souhrn či soubor synonymem pojmu množina. Pokud bychom však připustili, že i souhrn všech kardinálních čísel je množinou, odvodíme řadu paradoxů, z nichž alespoň některé čtenář jistě zná.

Přesto je možné i o všech kardinálních číslech uvažovat jako o jednom souboru. Intuitivní pojem „soubor“ je ovšem třeba přesně matematicky specifikovat, především axiomaticky přesně rozlišit dva typy souborů – množiny a tzv. třídy. V axiomatické teorii množin je „soubor“ všech kardinálních čísel třídou a není množinou. Axiomatický přístup k teorii množin k žádným paradoxům nevede.

Závěr

Každý, kdo někdy něco počítal, musel dříve či později s počítáním skončit. Nikdo nikdy neviděl nekonečné množství reálných předmětů. Mohlo by se tedy zdát, že nekonečno do našeho světa nepatří, protože nemá oporu v naší zkušenosti. Kdybychom ovšem běžnou zkušenost takto absolutizovali, věřili bychom dodnes, že Země je plochá deska.

Největší objevy lidstva se zrodily naopak ve chvílích, kdy se uvažování člověka dostalo do konfliktu s jeho každodenní zkušeností, a člověk dal přednost abstraktnímu myšlení. Právě z tohoto důvodu by měl pojem nekonečna patřit k základní intelektuální výbavě moderního člověka. Jestliže tedy tento článek přispěl k objasnění alespoň některých otázek, které se pojmu nekonečna týkají, pak splnil svůj účel.

Literatura

[1] Kuřina, F., & Vondrová, N. (2021). Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky, 29*(2), 111–127.

[2] Zamarovský, P. (2018). *Mýtus nekonečna.* Karolinum.

Abstract

This paper deals with some problems of the sets cardinality. It explains the concept of countability and uncountability. It discovers the incorrectness of the previously described construction of the bijection betwen the square and its side. It provides a correct proof of the existence of this mapping and describes the construction of higher cardinalities with a technique that is understandable for talented secondary school students.

Dalibor Martišek
Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2
616 69, Brno
e-mail: martisek@fme.vutbr.cz