Luboš Pick
O využití iracionality při hledání sedmého nebe

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 1, 37–44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150396`

O využití iracionality při hledání sedmého nebe

Luboš Pick

Abstrakt. Věnujeme se otázce V. I. Arnol'da, zda nějaká mocnina dvojky začíná číslicí sedm. Uvedeme dvě různá řešení problému a zmíníme se o některých souvisejících otázkách a možnostech zobecnění.

Formulace problému

V tomto článku budeme symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ označovat po řadě množinu přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. Zápis log bude označovat *dekadický* logaritmus, tedy funkci $\log_{10}$.

Vyjdeme z jednoho zajímavého problému, který ve své knize [1] uvádí V. I. Arnol'd. Problém se ve všelijakých modifikacích vyskytuje porůznu v matematické literatuře a nalézáme jej také na internetovém diskusním fóru Mathematics Stack Exchange. Autorovi jsou známy například ještě zdroje [8] a [11], výčet však jistě zdaleka není úplný. Pravděpodobně první podrobné řešení uvádí Paweł Strzelecki v článku [11]. Téma později pěkně zpracoval Jiří Bouchala v přednášce na semináři OSMA [4].

Problém. Posuďme posloupnost mocnin dvojky

$$\left\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots\right\},$$

tedy přesněji

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024, 2\,048, \ldots\},$$

a všímejme si jen prvních číslic. Dostaneme pozoruhodnou posloupnost

$$\begin{gathered}1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,\\ 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,\\ 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,\\ 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \ldots\end{gathered}$$

Označme tuto posloupnost symbolem $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Otázka zní: objeví se v této posloupnosti sedmička?

Na první pohled se zdá (a naše grafické uspořádání tomuto pohledu na věc vydatně napomáhá), že posloupnost je periodická se základní periodou 10. Kdyby tomu tak opravdu bylo, odpověď na otázku by byla triviálně záporná a problém by byl vyřešen. My zatím ale nevíme s jistotou, zda tomu tak opravdu je. Mnohý příklad známe, kdy

---

Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `pick@karlin.mff.cuni.cz`

několik prvních členů určité posloupnosti vede ke klamnému závěru. Jen v článku [6] najdeme takových příkladů pětatřicet.

Ve skutečnosti bychom mohli zformulovat hned několik otázek. Například:

(a) Je posloupnost opravdu periodická s periodou 10?

(b) Obsahuje sedmičku?

(c) Pokud ano, kolikrát?

Abychom celé věci dopřáli smysluplný matematický rámec, zavedeme nový pojem.

Definice. Množinu

$$\mathbb{N}_7 = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \text{první cifra čísla } 2^m \text{ je rovna } 7\}$$

nazveme *sedmým nebem*.

Hrubá síla

Jeden z možných postupů, jak se rychle a bez skrupulí dobrat odpovědí na naše otázky, uvádí na již zmíněném diskusním fóru osoba skrývající se pod identifikátorem P. Vanchinathan ve svém příspěvku [12]. Na stránce dále nalezneme rozsáhlou diskusi k problému, k jeho původu, aplikacím i řešení. Řešení uvedeme ve třech krocích.

První krok: Násobme či mocněme dostatečně dlouho a doufejme, že se vytoužená sedmička v dohledné době objeví. Kupodivu nám tato na první pohled poněkud pošetilá taktika vyjde a ani to nebude trvat tak dlouho. Naše vytrvalost totiž bude odměněna již ve čtyřicátém šestém kroku, a to číslem

$$a = 2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664.$$

Odtud hned plyne, že množina $\mathbb{N}_7$ je neprázdná. To znamená, že odpověď na otázku (b) je kladná a odpověď na otázku (a) musí být záporná. Navíc je teď dobře vidět, proč jsme si ve výše uvedené tabulce nemohli dovolit uvést pátý řádek. Zbývá ale ještě otázka (c).

Druhý krok: Nalezneme dvě další velmi užitečné mocniny dvojky, a to

$$b = 2^{10} = 1\,024 \quad \text{a} \quad c = 2^{53} = 9\,007\,199\,254\,740\,992.$$

K čemu nám budou tato čísla dobrá, uvidíme záhy.

Třetí krok: Poslední etapa je založena na pozoruhodné alternativě. Než přikročíme k její formulaci, bude užitečné si připomenout, že je-li $m \in \mathbb{N}_7$, potom má číslo 2^m alespoň dvě cifry. (Má jich ve skutečnosti alespoň čtrnáct, ale nám budou stačit dvě.)

Větička. *Předpokládejme, že $m \in \mathbb{N}_7$. Je-li druhá cifra čísla 2^m prvkem množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pak $m + 10 \in \mathbb{N}_7$. Je-li druhá cifra čísla 2^m rovna 8, nebo 9, pak $m + 53 \in \mathbb{N}_7$.*

Důkaz. Jestliže $m \in \mathbb{N}_7$ a druhá cifra čísla 2^m je prvkem množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, potom existuje $j \in \mathbb{N}$, $j \geqq 2$, takové, že

$$7 \times 10^j \leqq 2^m \leqq 78 \times 10^{j-1}.$$

Odtud a z definice čísla b dostáváme

$$7 \times b \times 10^{j} \leqq 2^{m} \times b = 2^{m+10} \leqq 78 \times b \times 10^{j-1}.$$

Protože $7 \times b = 7\,168 > 7 \times 10^{3}$ a $78 \times b = 79\,872 < 8 \times 10^{4}$, vyplývá z předcházejícího odhadu, že

$$7 \times 10^{j+3} < 2^{m+10} < 8 \times 10^{j+3}.$$

Jinými slovy, $m + 10 \in \mathbb{N}_7$. Důkaz toho, že $m + 53 \in \mathbb{N}_7$ za předpokladu, že druhá cifra čísla 2^{m} je rovna 8, nebo 9, lze provést obdobně. $\square$

A nyní jednoduchou aplikací principu matematické indukce ukážeme, že sedmé nebe je nejen neprázdné, ale dokonce má nekonečně mnoho prvků.

Důsledek. *Sedmé nebe je bez konce.*

Důkaz. Začneme u čísla $m_1 = 46$. Máme-li již zafixována všechna čísla

$$m_1, \ldots, m_n \quad \text{pro nějaké } n \in \mathbb{N},$$

potom podle chování druhé cifry čísla 2^{m_n} položíme buď $m_{n+1} = m_n + 10$ (to když je druhá cifra menší nebo rovna sedmičce), nebo $m_{n+1} = m_n + 53$ (když je druhá cifra rovna osmičce nebo devítce). Tak získáme nekonečnou posloupnost vzájemně různých prvků sedmého nebe. $\square$

Uvedeným postupem například zjistíme, že čísla 46, 56, 66, 76, 86 a 96 jsou prvky sedmého nebe (zase ta periodicita s desítkou?). Výpočtem se ale přesvědčíme, že číslo 106 již prvkem sedmého nebe není. Zápis čísla 2^{96} ovšem začíná 79 . . ., na druhém místě tedy stojí devítka, takže použijeme druhou možnost a dostaneme, že $96 + 53 = 149 \in \mathbb{N}_7$. Nejspíš takto nedostaneme všechny prvky sedmého nebe, ale na to se nikdo neptal. Každopádně je nyní zodpovězena otázka (c): sedmička se v posloupnosti vyskytuje nekonečněkrát.

Zhodnocení prvního řešení

Uvedený postup, jakkoli je nápaditý a elegantně jednoduchý, má několik nevýhod. Za prvé nám nic neříká o podstatě problému a za druhé jej nelze zobecnit. Mohly by nás totiž zajímat všelijaké modifikace základní otázky. Například bychom se mohli ptát, zda existují mocniny dvojky, jejichž dekadický zápis začíná nějakou předem stanovenou konečnou posloupností číslic. Z prvních čtyřiceti členů posloupnosti například není jasné, jestli se v ní někdy objeví devítka, koneckonců sedmé nebe se v angličtině označuje výrazem *cloud nine*. Tuhle otázku jsme zrovna náhodou vyřešili v duchu pohádkového principu, který Horace Walpole v roce 1754 označil slovem „serendipity“, česky „zpeklaklikismus“ (pohleďme znovu na 2^{53}), ale nevíme nic o tom, kolikrát a s jakou frekvencí se devítka objeví. Navíc by nás mohlo kupříkladu zajímat, jestli zápis některých mocnin dvojky začíná výrazem 77, nebo třeba nějakým naším oblíbeným letopočtem. A také na světě není jen dvojka, můžeme vesele mocnit i jiná přirozená čísla, řekněme větší než 1.

Ukazuje se, že i na takové otázky umíme nalézt odpověď, ale musíme na to jít jinak.

Hledání nových cest

Položme si otázku, co to vůbec znamená, že nějaké číslo padne do sedmého nebe. Není těžké si uvědomit, že $m \in \mathbb{N}_7$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$7 \times 10^k \leqq 2^m < 8 \times 10^k.$$

Tuto dvojici nerovností (takzvaný sendvič) nyní zlogaritmujeme. To znamená, že na všechny strany vypustíme funkci log (která je na svém definičním oboru rostoucí, a tedy zachovává nerovnosti), a dostaneme tak

$$\log 7 + k \leqq m \log 2 < \log 8 + k,$$

to jest

$$\log 7 \leqq m \log 2 - k < \log 8.$$

Nyní přicházíme ke klíčovému pozorování. Protože $1 < 7 < 8 < 10$, a tedy $0 < \log 7 < < \log 8 < 1$, plyne odtud, že

$$m \log 2 - k \in (0, 1).$$

To je ale možné jedině tehdy, když je k takzvanou *celou částí* čísla $m \log 2$, což zapíšeme ve tvaru

$$k = \lfloor m \log 2 \rfloor.$$

Připomeňme, že celá část reálného čísla x je definována jako (jediné) celé číslo j splňující $j \leqq x < j + 1$. Pak tedy píšeme $j = \lfloor x \rfloor$.

Magická posloupnost

Jsouce vyzbrojeni operací celé části reálného čísla, podívejme se teď na chování jedné zajímavé posloupnosti. Mějme nějaké pevně stanovené reálné číslo x a definujme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ předpisem

$$a_n = nx - \lfloor nx \rfloor \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Následující pozorování není těžké.

Větička. (a) *Je-li $x \in \mathbb{Z}$, pak $\{a_n\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$.*

(b) *Je-li $x \in \mathbb{Q}$, pak $\{a_n\}$ je periodická posloupnost. Je-li navíc $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, pak q je periodou posloupnosti $\{a_n\}$.*

Důkaz. Tvrzení (a) je triviální. Pro důkaz tvrzení (b) předpokládejme, že $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+q} &= (n+q)\frac{p}{q} - \left\lfloor (n+q)\frac{p}{q} \right\rfloor = n\frac{p}{q} + p - \left\lfloor n\frac{p}{q} + p \right\rfloor \\ &= n\frac{p}{q} + p - \left\lfloor n\frac{p}{q} \right\rfloor - p = n\frac{p}{q} - \left\lfloor n\frac{p}{q} \right\rfloor = a_n, \end{aligned}$$

a tedy $\{a_n\}$ je periodická s periodou q. □

Větička nám ovšem neřekla to nejzajímavější.

Otázka. Jak se chová posloupnost $\{a_n\}$ pro *iracionální* x?

Odpověď na tuto otázku je jádrem tohoto článku. Následující věta bývá připisována Wacławu Sierpińskému [9], Hermannu Weylovi [14] či Piersu Bohlovi [3]. Obecnější formu věty nalézáme též v pozdějších pracích Hermanna Weyla [15], Georga Davida Birkhoffa [2] nebo Alexandra Chinčina [7].

Věta. *Nechť* $x \notin \mathbb{Q}$. *Potom* $\{a_n\}$ *je prostá a navíc pro každá* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *splňující* $\alpha < \beta$ *je množina* $\{a_n\} \cap (\alpha, \beta)$ *nekonečná.*

Důkaz. Dokážeme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá. Předpokládejme, že pro nějaká $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_m$. Potom

$$nx - \lfloor nx \rfloor = mx - \lfloor mx \rfloor,$$

tedy

$$(n - m)x = \lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor.$$

Zřejmě platí $\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor \in \mathbb{Z}$, a tudíž také $(n - m)x \in \mathbb{Z}$. To je ale díky iracionalitě čísla x možné jedině tehdy, když $n - m = 0$. Jinými slovy, pro m a n různá platí $a_m \neq a_n$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je prostá.

Nyní obraťme pozornost ke druhé části tvrzení. Víme, že $\beta - \alpha > 0$, a tedy můžeme nalézt $n \in \mathbb{N}$ dost velké k tomu, aby

$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

Uvažujme čísla $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Všechna tato čísla jsou prvky intervalu $[0, 1]$. Podle Dirichletova principu se tudíž mezi nimi najdou alespoň dvě, jejichž vzdálenost nepřesáhne hodnotu $\frac{1}{n}$. Matematicky zapsáno to znamená, že existují $i, s \in \mathbb{N}$ taková, že $i, i + s \in \{1, \ldots, n + 1\}$ a navíc

$$|a_i - a_{i+s}| \leqq \frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

Označme $\varepsilon = |a_i - a_{i+s}|$. Potom tedy

$$0 < \varepsilon < \beta - \alpha.$$

Nyní si představme, že na kružnici K se středem v počátku, která má *délku obvodu* rovnou 1 (nejde tedy o klasickou jednotkovou kružnici, nýbrž o kružnici o poloměru $\frac{1}{2\pi}$), navineme reálnou přímku jako na cívku, přičemž kladný směr uvažujeme proti směru hodinových ručiček. Navíc v některém bodě na kružnici vyznačíme bod 0. Ten pak tedy díky periodicitě zároveň reprezentuje body $1, 2, \ldots$ a také $-1, -2, \ldots$, neboli všechna celá čísla. Body α a β vyznačíme na kružnici tak, aby délka oblouku v kladném směru mezi nimi a bodem nula byla po řadě rovna jejich hodnotám.

Uvažujme zobrazení $f\colon K \to K$ definované jako otočení (v kladném směru) o úhel $2\pi x$ radiánů. Na kružnici definujme dále posloupnost bodů $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurzivním předpisem

$$b_n = f(b_{n-1}),$$

tedy

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,\ b_1 = f(0),\ b_2 = f(b_1) = (f \circ f)(0), \ldots, \\ b_n &= (f \circ \ldots \circ f)(0) \text{ (n-krát složené zobrazení) pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom je absolutní hodnota délky oblouku mezi body b_i a b_{i+s} rovna $\varepsilon < \beta - \alpha$. Odtud vyplývá, že zobrazení

$$f^s = f \circ \ldots \circ f \quad \text{(s-krát složené zobrazení)}$$

je otočení o $2\pi\varepsilon$ radiánů (v kladném, nebo v záporném směru). Každopádně při průchodu zobrazením f^s naší kružnicí se oblouku mezi α a β nelze vyhnout, toto zobrazení jej nemůže přeskočit. Tedy existuje nějaké přirozené číslo, označme jej třeba k, takové, že nejméně jednou za ks otoček se objeví bod b_{ks} na oblouku mezi α a β. Všechny tyto body jsou různé, neboť posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, jak jsme již dokázali, a mezi body a_n a b_n je vzájemně jednoznačná korespondence. To znamená, že v (kladné části) oblouku mezi α a β se nachází nekonečně mnoho různých prvků množiny $\{b_s, b_{2s}, b_{3s}, \ldots\}$. Z korespondence mezi posloupnostmi $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ tedy dostáváme, že v intervalu (α, β) se nachází nekonečně mnoho prvků množiny $\{a_s, a_{2s}, a_{3s}, \ldots\}$, a tedy nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tím je důkaz hotov. □

Aplikace

Z věty uvedené v předcházejícím oddílu můžeme vyvodit řešení našeho problému. Jeho formulace nám sice cosi připomene (už to tu jednou bylo), ale tentokrát můžeme získané řešení rozličnými způsoby zobecňovat.

Důsledek. *Sedmé nebe je bez konce.*

Důkaz. Položme

$$\alpha = \log 7, \quad \beta = \log 8 \quad \text{a} \quad x = \log 2.$$

Potom, jak už víme,

$$0 < \alpha < \beta < 1.$$

Připomeňme si důležitou okolnost, že číslo x je iracionální. Tento fakt pro jistotu ověříme. Předpokládejme pro spor, že $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Potom

$$2 = 10^{\frac{p}{q}},$$

to jest

$$2^q = 10^p$$

Pak ale díky jednoznačnosti prvočíselného rozkladu dělí číslo 5 pravou stranu poslední rovnosti, ale nikoli levou, a tedy dostáváme spor. Odtud plyne, že $x \notin \mathbb{Q}$. Aplikací věty z předchozího oddílu potom dostáváme tvrzení důsledku. □

Poznámka. Na uvedeném postupu je zajímavé a elegantní to, že sedmička zde nehraje žádnou zvláštní roli. Zcela obdobně můžeme dokázat, že množina mocnin dvojky, jejichž dekadický zápis začíná posloupností 2022, je nekonečná. A místo 2022 lze dosadit téměř libovolný jiný shluk číslic.

Je načase uvést obecnou formulaci výsledku. Důkaz lze provést zcela obdobně výše uvedenému postupu.

Věta. *Nechť $p > 1$ je přirozené číslo, které není celočíselnou mocninou čísla* 10, *a X je nějaká konečná posloupnost číslic. Potom existuje přirozené číslo n takové, že desítkový zápis čísla p^n začíná posloupností X.*

Závěr

Položme si na závěr otázku, která je možná více filozofické, než matematické povahy.

Otázka. Proč se posloupnost tak dlouho jeví jako by byla periodická s periodou 10?

Odpověď je překvapivě jednoduchá. Tento jev je prostě způsoben tím, že číslo x, tedy

$$\log 2 = 0{,}301\,029\,995\,663\,981\,195\,213\,738\,894\,724\,49\ldots,$$

je sice iracionální, avšak má velmi dobrou racionální aproximaci v podobě zlomku $\frac{3}{10}$. Pak už si jen stačí připomenout druhou z našich větiček.

Poznámka. Z výše uvedeného se dá odvodit spousta dalších zajímavých informací. Označme kupříkladu pro $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha < \beta$, a pro $n \in \mathbb{N}$

$$k(n, \alpha, \beta) = \#\{1 \leqq i \leqq n \colon a_i \in (\alpha, \beta)\},$$

kde symbol # označuje *počet prvků* za ním stojící množiny. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n, \alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha.$$

Tento výsledek je v literatuře znám pod názvem *equidistribution theorem*, jeho elementární důkaz nalezneme například v knize [13], méně elementární důkaz pak v knize [10]. Tedy: budeme-li se pravidelným krokem iracionální délky dostatečně dlouho procházet po obvodu kružnice, pak do každé jámy spadneme s frekvencí přímo úměrnou její velikosti. To zní skoro jako nějaké přísloví nebo pranostika. Lze odtud ale vyvodit zajímavý fakt. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a(7, n) = \text{počet sedmiček v množině } \{c_1, \ldots, c_n\}$$

a

$$a(8, n) = \text{počet osmiček v množině } \{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(7, n)}{n} = \log 8 - \log 7 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a(8, n)}{n} = \log 9 - \log 8,$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(7, n)}{a(8, n)} = \frac{\log 8 - \log 7}{\log 9 - \log 8} = 1{,}133\,7\ldots > 1.$$

Ano, vidíte správně, mocniny dvojky dodržují Benfordův zákon (viz např. [5]). Tedy, mimo jiné, dost velké fragmenty posloupnosti $\{c_n\}$ budou obsahovat *více* sedmiček než osmiček, ač tomu prvních čtyřicet členů moc nenapovídá.

Poznámka do šatny. Jak už bylo řečeno, za číslo X si můžete pro radost dosadit například datum svého narození. Jak Paweł Strzelecki [11], tak i Jiří Bouchala [4] uvádějí tabulky takových příkladů. Zatímco v [11] nalézáme výběr dat významných historických událostí jako například založení polského státu, vítězství Jana III. nad Turky či bitvu u Waterloo, [4] obsahuje úplný výčet letopočtů od 1931 po 2005 včetně. Díky tomuto seznamu tedy vím, že desítkový zápis čísla 2^{187} začíná významnou posloupností 1961.

Poděkování. Tento příspěvek byl podpořen Jednotou českých matematiků a fyziků v rámci projektu Vědcem nanečisto V – Podpora talentovaných žáků v matematice a fyzice v severočeském regionu – 0033/7/NAD/2021.

Literatura

[1] Arnol'd, V. I.: *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1978.

[2] Birkhoff, G. D.: *Proof of the ergodic theorem.* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), 656–660.

[3] Bohl, P.: *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem.* J. Reine Angew. Math. 135 (1909), 189–283.

[4] Bouchala, J.: *O jednom racionálním využití iracionality* [online]. Dostupné z: `http://am-nas.vsb.cz/vod03/osma/`, (2012).

[5] Dvořák, J.: *Proč jsou logaritmické tabulky nejohmatanější na začátku?* PMFA 64 (2019), 14–28.

[6] Guy, R. K.: *The strong law of small numbers.* Amer. Math. Monthly 95 (1988), 697–712.

[7] Khinchine, A. Y.: *Zur Birkhoff Lösung des Ergodenproblems.* Math. Ann. 107 (1933), 485–488.

[8] Marciniak, Z.: *Spacerujący matematyk* [online], [1991]. Dostupné z: `http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2011/03/26/Spacerujacy_matematyk/`

[9] Sierpinski, W.: *Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme.* Bull. Intl. Acad. Polonaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) series A (1910), 9–11.

[10] Stein, E. M., Shakarchi, R.: *Fourier analysis – an introduction.* Princeton University Press, 2003.

[11] Strzelecki, P.: *On powers of 2.* Eur. Math. Soc. Newsl. 52 (2004), 7–8.

[12] Vanchinathan, P.: *Show that there are infinitely many powers of two starting with the digit 7* [online]. Mathematics Stack Exchange, 2017. Dostupné z: `https://math.stackexchange.com/q/2230258`

[13] Velleman, D. J., Wagon, S.: *Bicycle or unicycle?: A collection of intriguing mathematical puzzles.* American Mathematical Society, 2020.

[14] Weyl, H.: *Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene.* Rend. Circ. Mat. Palermo 330 (1910), 377–407.

[15] Weyl, H.: *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.* Math. Ann. 77 (1916), 313–352.