Učitel matematiky

Tereza Růžičková

Podobnost rovinných útvarů - několik postřehů

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 1, 15–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150381

PODOBNOST ROVINNÝCH ÚTVARŮ – NĚKOLIK POSTŘEHŮ

Tereza Růžičková[1]

1. Úvod

Téma podobnost je zařazováno obvykle do 9. ročníku základní školy. Podle *RVP ZV* (VÚP, 2017, s. 36) by si žáci měli osvojit využívání vět o podobnosti trojúhelníků pro řešení úloh výpočtového charakteru a ke zdůvodňování. Podobnost může být kritériem pro třídění základních rovinných útvarů, což je také jeden z očekávaných výstupů.

2. Dotazníkové šetření

Pro šetření byl vytvořen dotazník s dvanácti otázkami (dostupný z `https://forms.gle/k9Ncwvk3zZkEuF8o6`). První část dotazníku tvoří dvě uzavřené úlohy (výběr jedné správné odpovědi, přiřazovací úloha) a pět otevřených úloh. Těchto sedm úloh bylo původně součástí pracovních listů, které autorka zamýšlela zadat během praxí. V důsledku vládních opatření, která vedla k uzavření škol, bylo nutné vše přepracovat do podoby realizovatelné bezkontaktně. Z toho důvodu bylo do dotazníku přidáno pět dalších otázek, jejichž zodpovězení umožnilo aspoň omezeně zhodnotit podmínky a okolnosti, které mohly odpovědi žáků ovlivnit.

Odkaz na dotazník byl rozeslán do 15 základních škol a víceletých gymnázií v Plzeňském kraji. Odpovědi vyplnilo 30 žáků devátých tříd z osmi různých základních škol. Žáci řešili a vyplňovali odpovědi v rámci domácí přípravy, pět z nich doplnilo

[1]Příspěvek byl podpořen vnitřním grantovým systémem FPE ZČU, BAMAPE 2020.

odpovědi do vytištěné verze dotazníku. Z těchto testů bylo možné vyčíst i postupy řešení některých úloh. Jeden z žáků neřešil úlohy v první části dotazníku, zodpověděl pouze druhou část dotazníku. K jeho odpovědím se tedy nepřihlíželo.

Cílem tohoto šetření byl průzkum žákovských znalostí týkajících se podobnosti s ohledem na výuku probíhající distanční formou. Cílem bylo především zjistit, jak a zda žáci rozlišují podobnost tvarů v běžném a matematickém významu, zda zvládají standardní školní úkoly a zda si poradí s nestandardními úlohami. Z dostupných databází nebyla nalezena žádná studie zabývající se obdobným tématem.

3. Úlohy – zadání, řešení a výstupy

Úloha 1. Strana čtverce se zvětšila 2x, jeho obsah se zvětšil

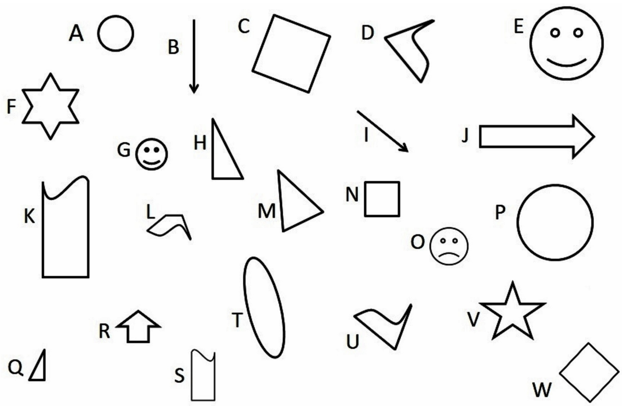
a) 2x b) 4x c) 6x d) 8x

Upraveno podle (Molnár et al., 2001, s. 29).

Žáci, kteří vyplňovali tištěnou verzi dotazníků, si vypomohli volbou konkrétního čtverce se stranou 3 cm, resp. 2 cm. Vypočetli obsah čtverce s takovou stranou a obsah čtverce s dvojnásobnou stranou. Výpočet podílu obsahů je dovedl ke správné odpovědi b). V jednom případě pracoval žák s obsahy čtverců se stranami a, $2a$. Žáci mohli k výsledku dojít „geometricky“, na základě náčrtku libovolného čtverce a čtverce s dvojnásobnou stranou.

Nesprávných odpovědí byla téměř čtvrtina. V polovině z nich žáci uvedli, že obsah se změní stejným způsobem jako délka strany, tj. odpověď a). Stejně početná skupina žáků nesprávně vybrala variantu d), patrně jako součin $2 \cdot 4$, navíc tedy mohli pracovat s obvodem místo obsahu. V jednom případě žák volil odpověď c). Předpokládali jsme, že 6násobné zvětšení obsahu při zdvojnásobení délky strany čtverce žáci vyloučí jako první – jako zcela zřejmou špatnou odpověď.

Úloha 2. Hledejte skupiny podobných útvarů (různou tloušťku čar zanedbejte). Odpovědi zapisujte např.: AB, CDE, FG, …



Z řešení tohoto úkolu bylo možné usoudit, nakolik žáci vnímají rozdíl mezi podobností útvarů v matematickém a běžném významu.

Z 23 útvarů bylo 15 v jedné ze 7 skupin podobných útvarů, ostatních 8 útvarů nebylo možné přidat k žádné z těchto skupin. Skupiny podobných útvarů uvádíme v tabulce 1 spolu se stručným pojmenováním a informací, zda jsou si útvary ve skupině podobné přímo (P), nebo nepřímo (N).

Tab. 1: Skupiny podobných útvarů

kružnice	A, P	P	smajlíci	E, G	P
šipky 1	B, I	P	R-trojúhelníky	H, Q	N
čtverce	C, N, W	P	záložky	K, S	N
hora	D, U	N			

Dvě třetiny respondentů správně uvedly skupinu {A, P} dvou podobných kružnic. Čtyři řešitelé do této skupiny přidali ještě některého ze smajlíků a 7krát byla považována elipsa za útvar podobný kružnici. Nesprávné odpovědi přišly pouze od žáků, kteří se s tématem podobnost seznámili alespoň částečně ve škole. Ti, kteří se setkali s podobností při distanční výuce nebo vůbec, uvedli správnou odpověď s výjimkou jednoho řešitele, který odpověď vynechal.

Větší úspěšnost byla v nalezení skupiny útvarů {B, I}, více než 75 %. Šest nesprávných řešení obsahovalo ve skupině „šipky 1“ také aspoň jeden z útvarů {J, R}. V případě opakování pokusného šetření by skupina útvarů {B, I} byla vyřazena. Ani z tištěné, ani z elektronické verze dotazníku nelze totiž snadno zjistit, zda jsou „krátké úsečky“ udávající směr šipky zkráceny ve stejném poměru jako „hlavní úsečky“, které šipky tvoří.

Kromě jednoho žáka, který úlohu neřešil, zřejmě z důvodu, že se s tématem nesetkal ani v rámci online výuky, všichni poznali podobné čtverce. Dva řešitelé zapomněli ke čtvercům {C, N} přidat čtverec W. Možná je to tím, že je čtverec W vůči čtverci N, který je umístěn v prototypické poloze, pootočen o 45°.

Nepřímo podobné útvary {D, U} k sobě správně přiřadila zhruba jedna třetina žáků. Téměř čtvrtina k nim přiřadila ještě útvar L ohraničený lomenou čarou ze tří úseček a křivou čarou, tj. odlišitelný od útvarů D a U jen na základě jejich hranice. Čtyři žáci k útvarům {D, U, L} přidali ještě útvary {K, S}, možná proto, že část jejich hranice tvoří křivá čára – „vlnka“.

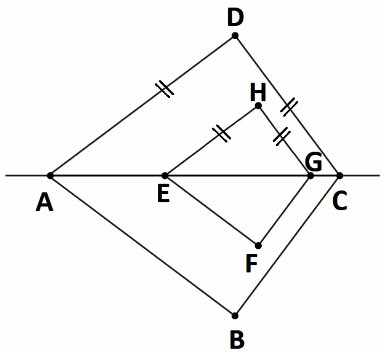
Téměř třetina žáků utvořila skupinu podobných útvarů jako skupinu všech emotikonů {E, G, O}. Polovina utvořila dvoučlennou skupinu emotikonů {E, G}, což bylo považováno za správnou odpověď, a čtyři žáci je vůbec nepovažovali za podobné.

Pětina řešitelů zřejmě považuje za vzájemně podobné jakékoli trojúhelníky, neboť jako skupinu podobných útvarů zapsala trojici {H, Q, M}. Stejný počet žáků nepřiřadil útvaru H žádný podobný útvar. Dvojice {H, Q} se objevila jako správné řešení v polovině všech odpovědí.

Nalezení dvojice {K, S} mělo mezi nepřímo podobnými útvary největší úspěšnost, 18 správných odpovědí z 30. O přiřazení útvarů {K, S} k útvarům {D, U, L} jsme se zmínili výše. Ostatní řešitelé nepovažovali útvary K a S za podobné.

Z rozboru žákovských řešení usuzujeme, že žáci správně vyčlení podobné útvary, jde-li o jednoduché geometrické útvary, resp. o základní útvary (kružnice, čtverce, pravoúhlé trojúhelníky). Jakmile jsou útvary složitější, méně obvyklé nebo připomínají obrázky něčeho ze skutečnosti, podobnost v matematickém smyslu ustupuje do pozadí a žáci útvary seskupují podle intuice, na základě blíže nedefinovatelného pojetí podobnosti v běžném smyslu.

Úloha 3. Které trojúhelníky jsou podobné trojúhelníku ABC? Odpovědi pište ve tvaru PQR, TUV, …
Upraveno podle (Odvárko & Kadleček, 2013, s. 40).



Tato jednoduchá úloha byla zadána mimo jiné s cílem zjistit, který z trojúhelníků bude nejčastěji zastoupen jako trojúhelník podobný s $\triangle ABC$.

Přibližně 75 % všech odpovědí obsahovalo jako trojúhelník podobný s $\triangle ABC$ trojúhelník ADC, který je s ním dokonce shodný (dvojice vzor a obraz v osové souměrnosti podle přímky AC). Třetina všech žáků zapsala vrcholy $\triangle ADC$ ve správném pořadí, třetina uvedla vrcholy trojúhelníku v pořadí A, C, D. Objevil se i zápis vrcholů v pořadí C, A, D a C, D, A.

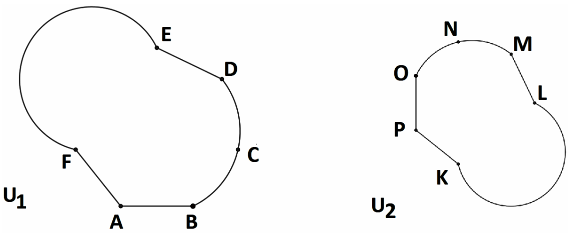
Trojúhelník EFG zařadilo mezi trojúhelníky podobné $\triangle ABC$ 70 % všech žáků. Protože jsou trojúhelníky ABC a EFG podobné přímo, podařil se až na dvě odpovědi zápis vrcholů trojúhelníku ve správném pořadí, tj. E, F, G.

Pokud řešení obsahovalo pouze jeden trojúhelník (17 % respondentů), byl to právě $\triangle ADC$, nebo $\triangle EFG$. Trojúhelníky EHG a ABC nikdo neuvedl samostatně jako jediné řešení úlohy, byly vždy ve skupině s nejméně jedním dalším trojúhelníkem.

Šestnáct žáků našlo tři trojúhelníky podobné $\triangle ABC$. Všichni vynechali trojúhelník ABC. Zajímavé bylo sledovat pořadí trojúhelníků v odpovědích – upřednostní vliv velikosti útvaru a začnou $\triangle ADC$, nebo je zásadnější přímá podobnost a první trojúhelník v řešení bude $\triangle EFG$? V necelé čtvrtině všech odpovědí postupovali žáci „od největšího trojúhelníku"; $\triangle ADC$, $\triangle EHG$, $\triangle EFG$. Druhá nejčetnější skupina (zhruba sedmina) napsala trojúhelníky v opačném pořadí, od přímo podobného $\triangle EFG$, ke shodnému $\triangle ADC$.

Pouze tři žáci považovali trojúhelník ABC za podobný sám sobě a zařadili do řešení všechny čtyři trojúhelníky. Trojúhelník ABC byl uveden buď jako poslední, nebo jako první.

Úloha 4. Útvary U_1 a U_2 jsou podobné. Označte navzájem odpovídající si body jednotlivých útvarů. (Pro bod A vyberte odpovídající bod ve sloupci atd.)



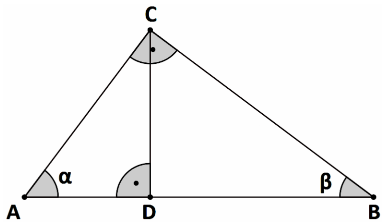
Dvojice odpovídajících bodů se zaznamenávaly do matice:

	K	L	M	N	O	P
A	☐	☐	☐	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐
D	☐	☐	☐	☐	☐	☐
E	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Úloha byla připravena tak, že jako první vybízela hledat odpovídající bod k „významnému“ bodu útvaru U_1, kterým je bod A. V jednom případě byl místo bodu P přiřazen bodu A bod M. Další body řešitel přiřadil tak, jako kdyby byly útvary U_1 a U_2 přímo podobné, tj. bodu B přiřadil bod N, bodu C bod O atd. Objevilo se také řešení, v němž jsou jednomu bodu přiřazeny dva různé body. Dotyčný žák spolu s dalšími dvěma, kteří úlohu vůbec neřešili, nejspíš nepochopil zadání úlohy nebo způsob zápisu řešení.

Úloha 4 byla zařazena jako přípravná pro další úlohu, ve které se požadoval korektní zápis podobných trojúhelníků, tj. s takovým uspořádáním vrcholů trojúhelníku, aby si vrcholy v podobnosti odpovídaly.

Úloha 5. Které trojúhelníky z obrázku jsou si navzájem podobné? Podobnost trojúhelníků zapište – dejte pozor na odpovídající si vrcholy. Místo $\triangle KLM \sim \triangle PQR$ pište odpovědi ve tvaru KLM–PQR.



Za úplné řešení byly považovány tři dvojice trojúhelníků zapsané např. takto: ABC–ACD, ABC–CBD, CBD–ACD. Neočekávali jsme, že žáci zařadí dvojice stejných trojúhelníků, např. ABC–ABC, i když platí, že každý trojúhelník je podobný sám sobě (reflexivita podobnosti). Také jsme předpokládali, že např. dvojice ABC–ACD a ACD–ABC budou žáci považovat za stejné řešení a nebudou proto uvádět obě dvojice (symetričnost podobnosti).

Větší náročnost úlohy dokládá i větší podíl respondentů (20 %), kteří odpověď vynechali, a to i přesto, že někteří z nich stihli výklad tématu podobnost ještě prezenční formou ve škole.

Pouze jednu dvojici podobných trojúhelníků našlo 40 % žáků. Zajímavé je sledovat, která z dvojic byla zastoupena nejčastěji a jaká strategie mohla být použita pro to, aby si v zápisu podobných trojúhelníků odpovídaly správné vrcholy.

Označme T_1, T_2, T_3 postupně trojúhelníky ABC, CBD, ACD. Osm žáků poznalo, že jsou podobné trojúhelníky $T_2 \sim T_3$, tři odhalili dvojici $T_1 \sim T_3$ a jeden $T_1 \sim T_2$. Šest z těchto 12 žáků neuvedlo korektní zápis z hlediska odpovídajících si vrcholů.

Domníváme se, že vhodným postupem pro utvoření správného zápisu podobnosti dvou trojúhelníků je „hlídání“ typů stran ve správném pořadí. Např. ke správnému zápisu ABC–ACD lze dospět strategií „přepona $\rightarrow$ delší odvěsna“, k zápisu ACB–ADC postupem „kratší odvěsna $\rightarrow$ delší odvěsna“. Postup „přepona $\rightarrow$ kratší odvěsna“ vede k zápisu BAC–CAD.

Strategii „přepona $\rightarrow$ delší odvěsna“ použila většina řešitelů. Pouze v jednom případě byla „převrácená“, tj. žák použil pořadí „delší odvěsna $\rightarrow$ přepona“. Všichni ostatní použili postup „kratší odvěsna $\rightarrow$ delší odvěsna“, a to v tomto pořadí. Strategii „přepona $\rightarrow$ kratší odvěsna“ ani k ní „převrácenou“ nepoužil nikdo.

Významně menší chybovost (pouze 1 žák z 11) měl postup „kratší odvěsna $\rightarrow$ delší odvěsna“ než postup zahrnující přeponu (10 žáků ze 13).

Dvě dvojice podobných trojúhelníků, $T_1 \sim T_3$, $T_2 \sim T_3$, našel a korektně zapsal jen jeden řešitel. Tři řešení (tři dvojice podobných trojúhelníků) nebo jejich náznak (jedna trojice podobných trojúhelníků) se projevil u 10 žáků. Pouze dva žáci zapsali výsledek zcela správně jako tři dvojice podobných trojúhelníků včetně odpovídajících si vrcholů. Zbylých osm žáků uvedlo jednu trojici, např. ADC–ACB–CDB. Správný zápis s ohledem na odpovídající si vrcholy měli jen ti, kteří postupovali strategií „menší odvěsna $\rightarrow$ větší odvěsna“ (čtyři žáci).

Úspěšný postup „menší odvěsna $\rightarrow$ větší odvěsna“ použili žáci různých škol. Nakolik je to postup, k němuž byli vedeni svými učiteli, není zjištěno. Tento výsledek pokusného šetření by ale mohl být dobrým vodítkem pro začínající učitele matematiky, jak pomoci žákům, aby nepokazili zápis podobných pravoúhlých trojúhelníků.

Úloha 6. Rozměry stran prvního trojúhelníku jsou 54 mm, 48 mm, 66 mm. Rozměry druhého trojúhelníku jsou 32 mm, 36 mm a 44 mm. Jsou trojúhelníky podobné, nebo ne? V případě, že jsou trojúhelníky podobné, podle jaké věty a jaký je poměr podobnosti?
Upraveno podle (Běloun, 1992, s. 163).

I když úloha cílí na jeden z očekávaných výstupů stanovených v *RVP ZV*, 40 % respondentů se ani nepokusilo na žádnou ze tří otázek odpovědět. Otázky nejsou zcela nezávislé. Pokud někdo do dotazníku napsal např. „usu“ nebo „3 : 2“, interpretovali jsme to jako správnou odpověď na otázku, zda jsou trojúhelníky podobné, bez ohledu na věcnou správnost z hlediska dalších otázek. S přihlédnutím k tomu mělo aspoň jednu správnou odpověď 14 žáků, tj. méně než polovina. Čtyři poznamenali, že trojúhelníky nejsou vůbec podobné. Příslušní řešitelé nejspíše nevytvářeli podíly velikostí odpovídajících si stran trojúhelníků, ale podíly velikostí stran v pořadí, v jakém byly uvedeny v zadání. V jednom řešení zapsaném ve vytištěném dotazníku autor místo podílů velikostí stran utvářel jejich rozdíly. Pokud by místo 36 mm bylo zadáno 26 mm, považoval by trojúhelníky za podobné, protože $54 - 32 = 48 - 26 = 66 - 44 = 22$.

Zcela správně odpověděli jen 4 žáci, kteří uvedli, že trojúhelníky jsou podobné s koeficientem 2/3 (3/2) podle věty sss. Ve zbývající třetině žáků, z jejichž odpovědí bylo možné usoudit, že zadané trojúhelníky jsou podobné, měli jen tři správně koeficient podobnosti a jiní tři správnou větu o podobnosti trojúhelníků. V ostatních nesprávných odpovědích se objevily poměry 9 : 8 : 11, 3 : 5 jako koeficienty podobnosti. V prvním případě jde o základní tvar poměru velikostí stran prvního trojúhelníku, v případě 3 : 5 se domníváme, že žák hodnoty nějakým způsobem zaokrouhlil. Podobnost trojúhelníků větou usu místo věty sss zdůvodnili celkem dva žáci. K závěru mohli dojít porovnáním odpovídajících si úhlů v narýsovaných trojúhelnících, jak dokládá jedno z řešení.

Neúspěšnost úlohy 6 (vynechané odpovědi, nesprávné postupy, chyby) nelze přičíst uzavření škol a distanční výuce. Nedostatky se projevily v řešení školáků, kteří vše stihli před uzavřením, i v řešení žáků, kteří část tématu podobnost zvládli ve škole a část doma.

Úloha 7. Hynek zjišťuje, kolik měří jeho přítelkyně Magdaléna. Změřil, že když stojí vedle sebe, její stín je o 20 cm kratší. Hynek je vysoký 180 cm a jeho stín je dlouhý 200 cm. Kolik měří Magdaléna? Tip: Zkuste si celou situaci nakreslit.
Převzato z (Presová et al., 2017, s. 76).

Úlohu neuměla uchopit třetina žáků. Je ovšem možné, že řešitele odradilo doporučení týkající se náčrtku, tj. nutnost strávit s úlohou trochu více času, a také slovní formulace problému s praktickým námětem.

Odpověď třetiny těch, kteří se pokusili úlohu řešit, byla nesprávná – 160 cm. K výsledku nejspíše dospěli tak, že rozdíl mezi délkou Hynkova stínu a jeho výškou odečetli od délky Magdalénina stínu. Tento postup byl několikrát zapsán v tištěné formě dotazníků.

Správný výsledek, 162 cm, zapsalo celkem 14 žáků. Ti mohli úlohu vypočítat například z rovnosti poměru délek stínů a poměru výšek postav nebo z rovnosti poměru výšky a délky stínu jedné osoby a poměru výšky a délky stínu druhé osoby. S ohledem na způsob zaznamenávání odpovědí nemůžeme sdělit, který postup převažoval. V dotaznících doplňovaných ručně postupovali respondenti jen podle druhé z uvedených možností.

4. Shrnutí

Z rozboru žákovských řešení usuzujeme, že žáci správně vyčlení podobné útvary, jde-li o jednoduché geometrické útvary, resp. o základní útvary. Pokud se však setkají se složitějšími geometrickými útvary, používají nedefinovanou podobnost užívanou v běžném životě. Větší chybovost se vyskytla především v nestandardních úlohách.

Literatura

[1] Běloun, F. (1992). *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Státní pedagogické nakladatelství.

[2] Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., Růžičková, B., & Slouka, J. (2001). *Matematika 9: sbírka úloh: (pracovní sešit): s komentářem pro učitele*. Prodos.

[3] Odvárko, O., & Kadleček, J. (2013). *Matematika pro 9. ročník základní školy. (2) Jehlan, kužel, koule, podobnost, goniometrické funkce*. Prometheus.

[4] Presová, J., Davidová, J., & Hermochová, D. (2017). *Hravá matematika 9: Pracovní sešit pro 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik.

[5] VÚP. (2017). *RVP pro základní vzdělávání*. `http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani`

Abstract

The article summarizes the results of experimental research carried out in lower secondary schools in May and June 2020. Its aim was to find out how and whether pupils differentiate the similarity of shapes in common and mathematical meaning, whether they handle standard school tasks and whether they cope with non-standard ones.

Tereza Růžičková
KMT-M FPE ZČU
Klatovská tř. 51
306 14 Plzeň
e-mail: truzickova@spskt.cz