Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 4, 238–256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150375

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 27. – 30. 3. 2011 se v Brně uskutečnilo celostátní kolo 60. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2011–2012.

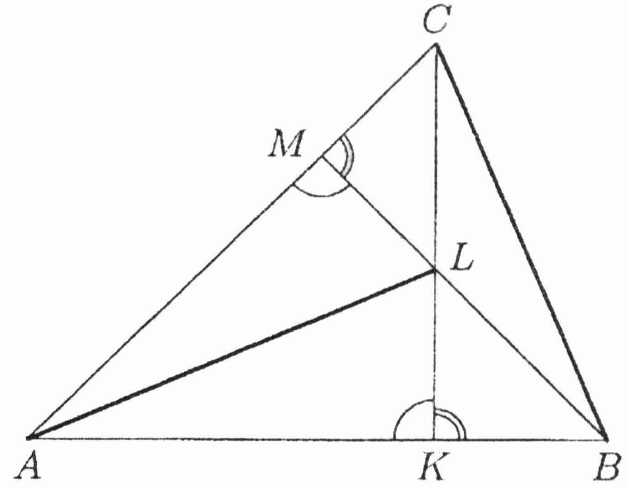
Úlohy celostátního kola 60. ročníku matematické olympiády

Brno 27. – 30. března 2011

1. Určete velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků ABC s vlastností: Uvnitř stran AB, AC existují po řadě body K, M, které s průsečíkem L přímek MB a KC tvoří tětivové čtyřúhelníky $AKLM$ a $KBCM$ se shodnými opsanými kružnicemi. *(Jaroslav Švrček)*

Řešení. Čtyřúhelník $KBCM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CKB|$ neboli $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AML|$ (obr. 1). Přitom čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle AKL| + |\sphericalangle AML| = 180°$. Ve zkoumaném případě proto musí být všechny čtyři zmíněné úhly pravé, K a M jsou tak paty výšek v trojúhelníku ABC, který je tudíž ostroúhlý, a bod L je průsečíkem jeho výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $KBCM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem BC a kružnice opsaná čtyřúhelníku $AKLM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem AL.

Kružnice opsané uvedeným čtyřúhelníkům jsou shodné, právě když jsou shodné jejich průměry BC a AL. Označme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Pravoúhlé trojúhelníky CKB a AKL jsou podobné, protože pro jejich úhly při odpovídajících vrcholech C a A platí $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle BCK| = 90° - \beta$. Zřejmě proto platí $|BC| = |AL|$, právě když $|AK| = |CK|$, tedy AKC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.



Obr. 1

Vidíme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy, právě když je ostroúhlý s úhlem $\alpha = 45°$. Pro *ostré* úhly β a γ pak platí $\beta + \gamma = 135°$.

Závěr. Řešením jsou právě všechny trojice úhlů $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, kde $\varphi \in (0°, 45°)$.

2. Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že dané rovnici vyhovují právě tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4.$$

Protože $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí být aspoň jeden ze tří činitelů na levé straně upravené rovnice větší než $\frac{3}{2}$. Pro prvočísla p, q, r tak nutně platí $p < 2$ nebo $q < 4$ nebo $r < 6$. Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné prvočíslo menší než 2, zbývá vyšetřit následujících pět možností: $q \in \{2,3\}$ a $r \in \{2,3,5\}$. Ty nyní rozebereme jednotlivě, přitom uvažovanou hodnotu q či r vždy dosadíme do dané rovnice, kterou pak (v oboru prvočísel) vyřešíme pro zbývající dvě neznámé.

- Pro $q = 2$ dostaneme $(p+1)(r+3) = 2pr$, odkud plyne $r = 3 + 6/(p-1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \in \{2,3,7\}$. Jim však odpovídají $r \in \{9,6,4\}$, která nejsou prvočísly.
- Pro $q = 3$ dostaneme $5(p+1)(r+3) = 12pr$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $r = 5$. Pro $p = 5$ dostaneme řešení $(5,3,3)$ a pro $r = 5$ řešení $(2,3,5)$.
- Pro $r = 2$ dostaneme $5(p+1)(q+2) = 8pq$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $q = 5$. Pro $p = 5$ nedostaneme žádné řešení v oboru prvočísel, zatímco pro $q = 5$ dostáváme třetí řešení dané rovnice, kterým je trojice $(7,5,2)$.
- Pro $r = 3$ dostaneme $(p+1)(q+2) = 2pq$, odkud $q = 2 + +4/(p-1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2,3,5\}$. Mezi odpovídajícími hodnotami $q \in \{6,4,3\}$ je jediné prvočíslo, pro něž dostáváme řešení $(p,q,r) = (5,3,3)$, které již známe.
- Pro $r = 5$ dostaneme $2(p+1)(q+2) = 5pq$, odkud plyne, že $p = 2$ nebo $q = 2$. Pro $p = 2$ dostáváme už známé řešení $(2,3,5)$, zatímco pro $q = 2$ vychází $p = 4$.

Jiné řešení. Pro každé prvočíslo q platí nerovnost $q + 2 \leq 2q$. Pro prvočísla p a r tak dostaneme nerovnici $2(p+1)(r+3) \geq 4pr$, kterou upravíme na tvar $(p-1)(r-3) \leq 6$. Protože $p - 1 \geq 1$, musí být $r - 3 \leq 6$ neboli $r \leq 9$. Odtud plyne, že nutně $r \in \in \{2,3,5,7\}$. Postupným rozborem každé z těchto čtyř možností dospějeme (analogicky jako v předchozím řešení) ke třem trojicím prvočísel (p,q,r): $(2,3,5)$, $(5,3,3)$ a $(7,5,2)$, které jsou jedinými řešeními úlohy.

3. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.

b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

(Jaromír Šimša)

a) Dle zadání platí $(x+y)^2 = (12-z)^2$ a $x^2+y^2 = 54-z^2$, tedy

$$\begin{aligned} 2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = (12-z)^2 - (54-z^2) &= \\ = 2\big((z-6)^2+9\big) \qquad (1)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 0 \le (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 54-z^2-2\big((z-6)^2+9\big) &= \\ = -3\big((z-4)^2-4\big). \qquad (2)\end{aligned}$$

Z (1) plyne $xy = (z-6)^2+9 \ge 9$, z (2) nerovnost $(z-4)^2 \le 4$ neboli $2 \le z \le 6$. Proto $(z-6)^2 \le (2-6)^2 = 16$, což spolu s (1) dává $xy = (z-6)^2+9 \le 25$. S ohledem na symetrii platí odvozené nerovnosti $9 \le xy \le 25$ i pro součiny yz, zx na místě xy.

b) Z dané soustavy rovnic dostáváme

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{12^2-54}{2} = 45.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} &(x-3)(y-3) + (y-3)(z-3) + (z-3)(x-3) = \\ &= xy+yz+zx - 6(x+y+z) + 27 = 45 - 6\cdot 12 + 27 = 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla $x-3$, $y-3$, $z-3$ nemohou být současně všechna kladná, alespoň jedno z čísel x, y, z je tedy nejvýše 3. Podobně ze vztahu

$$(x-5)(y-5)+(y-5)(z-5)+(z-5)(x-5)=$$
$$=xy+yz+zx-10(x+y+z)+75=45-10\cdot 12+75=0$$

vidíme, že čísla $x-5$, $y-5$, $z-5$ nemohou být současně všechna záporná, proto alespoň jedno z čísel x, y, z je nejméně 5.

Jiné řešení. Obtížnější obrat v části b) předchozího řešení můžeme nahradit důkazem implikací

$$(x>3)\wedge(y>3)\Rightarrow z<3 \qquad \text{a} \qquad (x<5)\wedge(y<5)\Rightarrow z>5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t)=(t-x)(t-y)$. Jsou-li oba jeho kořeny x a y větší než 3, platí $F(3)>0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

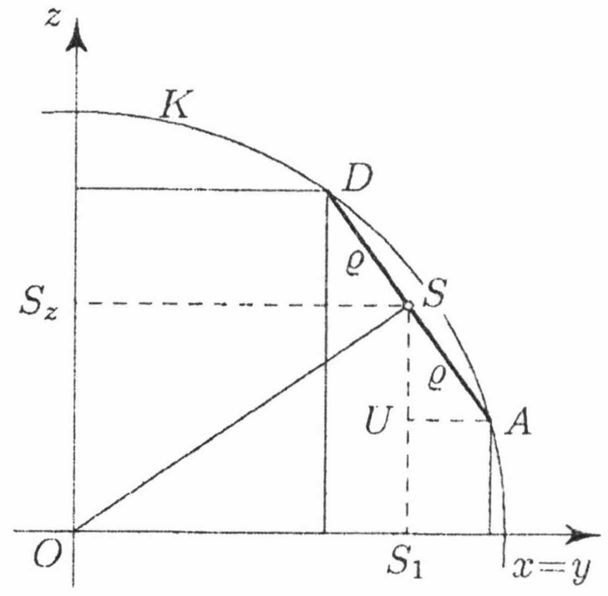
$$0<F(3)=3^2-3(x+y)+xy=$$
$$=9-3(12-z)+(z-6)^2+9=(z-3)(z-6).$$

Z této nerovnosti a z odhadu $z\leq 6$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z<3$. Podobně, jsou-li obě čísla x a y menší než 5, potom platí $F(5)>0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0<F(5)=5^2-5(x+y)+xy=$$
$$=25-5(12-z)+(z-6)^2+9=(z-2)(z-5).$$

Z této nerovnosti a odhadu $z\geq 2$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z>5$.

Jiné řešení. Vyřešíme část b) geometricky. V kartézské soustavě souřadnic s počátkem O a osami x, y, z určuje první rovnice rovinu σ, která prochází bodem $S=[4,4,4]$ a je kolmá k úsečce OS, zatímco druhá rovnice je rovnicí kulové plochy



Obr. 2

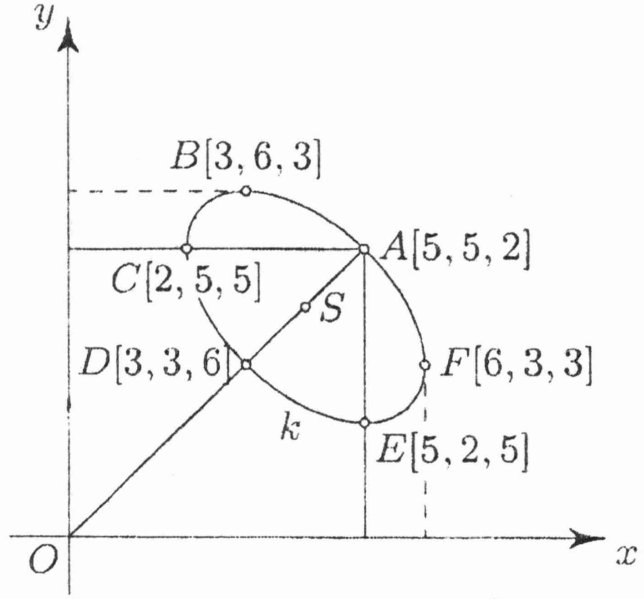
$K(O, r = \sqrt{54})$. Průnikem obou útvarů je kružnice $k(S, \rho)$. Určíme nejprve její poloměr a průsečíky kružnice s rovinou, podle níž jsou osy x a y souměrně sdruženy.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé průměty bodu S do souřadnicových os x, y a z. Na obr. 2 je řez rovinou OSS_z. Platí $|OS_1| = 4\sqrt{2}$, $|OS| = 4\sqrt{3}$ (stěnová a tělesová úhlopříčka krychle o hraně délky 4) a $|OA| = \sqrt{54}$. Z pravoúhlého trojúhelníku OAS pomocí Pythagorovy věty určíme $\rho = |SA| = \sqrt{6}$ a z podobnosti trojúhelníků $SAU \sim OSS_1$ dostaneme $|US| = 2$ a $|AU| = \sqrt{2}$. Odtud $A = [5, 5, 2]$ a (díky symetrii podle S) $D = [3, 3, 6]$.

Analogickým rozborem pro roviny OSS_y a OSS_x (nebo jen cyklickou záměnou, kterou lze vzhledem k symetrii uplatnit) nalezneme jejich průsečíky s kružnicí k:

$$B = [3, 6, 3], \quad E = [5, 2, 5] \quad \text{a} \quad C = [2, 5, 5], \quad F = [6, 3, 3].$$

Nalezené body A, B, C, D, E, F rozdělují kružnici k na šest oblouků (obr. 3 znázorňuje pohled na kružnici k ve směru osy z),



Obr. 3

pro jejichž body zřejmě platí:

$$
\begin{aligned}
&[x, y, z] \in \widehat{AB} &&\Rightarrow\quad 2 \le z \le 3, &&5 \le y \le 6, &&3 \le x \le 5,\\
&[x, y, z] \in \widehat{BC} &&\Rightarrow\quad 2 \le x \le 3, &&5 \le y \le 6, &&3 \le z \le 5,\\
&[x, y, z] \in \widehat{CD} &&\Rightarrow\quad 2 \le x \le 3, &&5 \le z \le 6, &&3 \le y \le 5,\\
&[x, y, z] \in \widehat{DE} &&\Rightarrow\quad 2 \le y \le 3, &&5 \le z \le 6, &&3 \le x \le 5,\\
&[x, y, z] \in \widehat{EF} &&\Rightarrow\quad 2 \le y \le 3, &&5 \le x \le 6, &&3 \le z \le 5,\\
&[x, y, z] \in \widehat{FA} &&\Rightarrow\quad 2 \le z \le 3, &&5 \le x \le 6, &&3 \le y \le 5.
\end{aligned}
$$

Tím je ovšem tvrzení b) dokázáno.

4. Uvažujme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty $a \ge 2$, $b \ge 2$, $c \ge 2$. Adam a Boris hrají následující hru: Je-li na tahu Adam, vybere jeden z koeficientů trojčlenu a nahradí ho *součtem* zbylých dvou. Pokud je na tahu Boris, vybere jeden z koeficientů a nahradí ho *součinem* zbylých dvou. Adam začíná a hráči se pravidelně střídají. Hru vyhrává ten, po jehož tahu má vzniklý trojčlen dva různé reálné kořeny. Určete, který z hráčů má vítěznou strategii v závislosti na koeficientech a, b, c počátečního trojčlenu. *(Michal Rolínek)*

Řešení. Pokud Adam nahradí koeficient u lineárního členu, získá trojčlen $ax^2 + (a + c)x + c$, který má dva různé reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $(a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$ kladný. To nastane, právě když $a \neq c$. V tomto případě výše popsaným tahem vítězí Adam. Pokud Adam nahradí koeficient u absolutního členu, získá trojčlen $ax^2 + bx + (a + b)$ se dvěma různými reálnými kořeny, právě když je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a + b) = \big(b(1 + \sqrt{2}) + 2a\big)\big(b(\sqrt{2} - 1) - 2a\big)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $b(\sqrt{2} - 1) > 2a$. Jelikož diskriminant kvadratického trojčlenu je symetrická funkce koeficientů u kvadratického a absolutního členu, nastane stejná situace i v případě, kdy Adam nahradí koeficient u kvadratického členu.

Shrňme úvahy z předchozího odstavce. Pokud $a \neq c$ nebo $b > \frac{2}{\sqrt{2}-1}a = 2(\sqrt{2} + 1)a$, může Adam prvním tahem vyhrát.

Předpokládejme, že $a = c$ a současně $b \leq 2(\sqrt{2} + 1)a$. Po Adamovi je na tahu Boris, který bude nahrazovat koeficienty u jednoho z trojčlenů

a) $ax^2 + bx + (a + b)$ nebo $(a + b)x^2 + bx + a$, b) $ax^2 + 2ax + a$.

a) Pokud v tomto případě nahradí Boris koeficient u lineárního členu, dostane jeden z trojčlenů $ax^2 + a(a + b)x + (a + b)$ nebo $(a+b)x^2+a(a+b)x+a$, jež mají oba diskriminant $a^2(a+b)^2-4a(a+b) = a(a + b)\big(a(a + b) - 4\big)$, který je vzhledem k podmínkám $a \geq 2$, $b \geq 2$ kladný. Proto Boris tímto tahem zvítězí.

b) Pokud Boris nahradí koeficient u lineárního členu, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, který má dva reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a + 2)(a - 2)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $a > 2$. Kdyby Boris v případě $a = 2$ nahradil koeficient u kvadratického nebo absolutního členu, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenů $8x^2 + 4x + 2$ nebo $2x^2 + 4x + 8$. Z úvah v prvním odstavci plyne, že v takovém případě by zvítězil Adam. Proto v případě $a = 2$

musí Boris, aby neprohrál, nahradit koeficient u lineárního členu, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odstavců a) a b) plyne: Pokud Adam nemůže zvítězit prvním tahem, může svým tahem zvítězit Boris, právě když $a \neq 2$. V případě $a = 2$ svým prvním tahem Boris neprohraje, jen když zanechá soupeři trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Zatím tedy neznáme vítěznou strategii některého z hráčů, pokud po prvním Borisově tahu zůstane trojčlen $2x^2+4x+2$. Z úvah v prvním odstavci vyplývá, že Adam neprohraje, pokud nahradí koeficient u lineárního členu, takže zanechá soupeři stejný trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprohrál, reagovat náhradou koeficientu u lineárního členu, tudíž i on zanechá stejný trojčlen a hra v tomto případě nemá při správné hře obou hráčů vítěze.

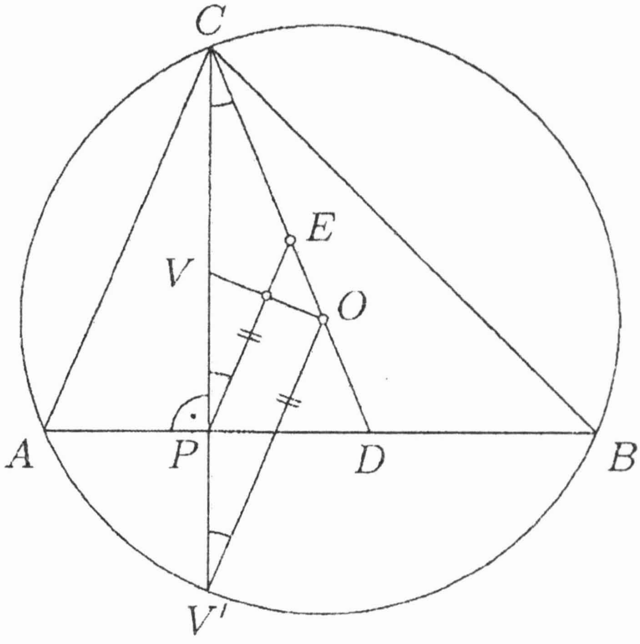
Závěr. Pro trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

- Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2(\sqrt{2} + 1)a$, má vítěznou strategii Adam a může prvním tahem vyhrát.
- Pokud $a = c > 2$ a $b \leq 2(\sqrt{2} + 1)a$, má vítěznou strategii Boris a může prvním tahem vyhrát.
- Pokud $a = c = 2$ a $b \leq 2(\sqrt{2} + 1)a$, musejí oba hráči, aby neprohráli, v každém tahu zanechávat trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto případě žádný z hráčů nemá vítěznou strategii.

5. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV. *(Karel Horák)*

Řešení. Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, leží celá úsečka OV na přímce EP a tvrzení platí triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $|AC| \neq |BC|$, takže přímky CV, CO jsou různé.

Jak známo, bod V' souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané, proto je bod P středem úsečky



Obr. 4

VV' (obr. 4). Trojúhelník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem O, a protože střed E úsečky CD je současně středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku CPD s přeponou CD, je i trojúhelník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojúhelníky $CV'O$ a CPE jsou přitom stejnolehlé (se středem stejnolehlosti v bodě C) — shodují se totiž ve společném úhlu při základně a body C, P, V' leží v přímce stejně jako body C, E, O. Je tudíž $PE \parallel V'O$.

Protože P je středem strany VV' trojúhelníku $V'OV$, leží na přímce PE střední příčka tohoto trojúhelníku, která je rovnoběžná s jeho stranou $V'O$. Přímka PE tedy protíná úsečku OV v jejím středu, což jsme chtěli dokázat.

6. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)\,f(y) = f(y)\,f\big(x\,f(y)\big) + \frac{1}{xy}.$$

(Pavel Calábek)

Řešení. Ukážeme, že jediná funkce f, která splňuje podmínky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ze zadání plyne, že $f(y) \neq 0$ pro libovolné $y > 0$, tudíž

$$f\big(x\,f(y)\big) = f(x) - \frac{1}{xy\,f(y)}. \tag{1}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Volbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupně dostaneme

$$f\big(f(y)\big) = f(1) - \frac{1}{y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+) \tag{2}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{3}$$

Volbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Volbou $x = a$ v rovnici (1) a užitím (4) dostaneme

$$f\big(a\,f(y)\big) = f(a) - \frac{1}{ay\,f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatímco pomocí vztahů (3) a (2) můžeme levou stranu předchozí rovnice upravit na tvar

$$f\big(a\,f(y)\big) = f\big(f(y)\big) - \frac{1}{a\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{a\,f(y)}.$$

Porovnáním pravých stran předchozích dvou rovnic vypočítáme

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \qquad (y \in \mathbb{R}^+). \tag{4}$$

Pokud tedy existuje řešení dané rovnice, musí mít tvar (4). Dosazením do rovnice v zadání a následnou úpravou zjistíme, že pro všechna kladná reálná x a y má platit $(a-1)^2 = 1$. Vzhledem k předpokladu $a > 0$ je tato rovnice splněna, právě když $a = 2$. Tímto krokem jsme zároveň provedli zkoušku správnosti nalezeného řešení.

Výsledková listina celostátního kola 60. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Anh Dung Le	3/6 G Tachov, Pionýrská	**41**
2.	Tomáš Zeman	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**37**
3.	Michael Bílý	8/8 GJV Klatovy, Nár. muč.	**34**
4.	Miroslav Koblížek	8/8 G Žamberk, Nádražní	**28**
5.	Jan Kuchařík	3/4 G Jihava, Jana Masaryka	**25**
6.–9.	Tadeáš Dohnal	8/8 G Praha 5, Zborovská	**23**
	Filip Hlásek	8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	**23**
	Jakub Solovský	4/4 GMK Bílovec	**23**
	Štěpán Šimsa	6/8 GJJ Litoměřice, Svojsíkova	**23**
10.–11.	Ondřej Bartoš	7/8 G Žďár n. S., Neumannova	**22**
	Dan Šafka	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**22**

Další úspěšní řešitelé:

12.–13.	Jiří Biolek	6/6 GPB Frýdek-Místek	**21**
	Lubomír Grund	6/8 G Zábřeh	**21**
14	Jan Sopoušek	8/8 G Brno, Řečkovice	**20**
15.–20.	Hana Dlouhá	6/8 GJK Praha 6, Parléřova	**19**
	Matěj Hudec	4/4 G Liberec, Jeronýmova	**19**
	Dominik Steinhauser	3/4 GJK Praha 6, Parléřova	**19**
	Jan Stopka	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**19**
	Helena Svobodová	6/6 G Frýdlant n. O.	**19**
	Dominik Teiml	4/6 The English College	**19**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2011–2012

Kategorie A

A-I-1. Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0, 1, \ldots, 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi. *(Pavel Novotný)*

A-I-2. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. Ukažte rovněž, že na setkání mohlo být právě šest osob.

(Vojtech Bálint)

A-I-3. Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.

a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.

b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV. *(Jaromír Šimša)*

A-I-4. Nechť p, q jsou dvě různá prvočísla, m, n přirozená čísla a součet $\dfrac{mp-1}{q} + \dfrac{nq-1}{p}$ je celé číslo. Dokažte, že platí nerovnost $\dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{p} > 1$. *(Jaromír Šimša)*

A-I-5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.

(Tomáš Jurík)

A-I-6. Najděte největší reálné číslo k takové, že nerovnost

$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geq \sqrt{ab}$$

platí pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

(Ján Mazák)

KATEGORIE B

B-I-1. Mezi všemi desetimístnými čísly dělitelnými jedenácti, v nichž se žádná číslice neopakuje, najděte nejmenší a největší.

(Jaroslav Zhouf)

B-I-2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož obsah označme P. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q. Dokažte, že platí $P \geq Q$, a zjistěte, kdy nastane rovnost. *(Jaroslav Švrček)*

B-I-3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí *dolní celou část* čísla a, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a.) *(Pavel Novotný)*

B-I-4. Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB. *(Jaromír Šimša)*

B-I-5. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá. *(Ján Mazák)*

B-I-6. Anna a Bedřich hrají karetní hru. Každý z nich má pět karet s hodnotami 1 až 5 (od každé jednu). V každém z pěti kol oba vyloží jednu kartu a kdo má vyšší číslo, získá bod. V případě karet se stejnými čísly nezíská bod nikdo. Použité karty se do hry nevracejí. Kdo získá na konci více bodů, vyhrál. Kolik procent ze všech možných průběhů takové hry skončí výhrou Anny? *(Tomáš Jurík)*

KATEGORIE C

C-I-1. Najděte všechny trojčleny $p(x) = ax^2+bx+c$, které dávají při dělení dvojčlenem $x+1$ zbytek 2, při dělení dvojčlenem $x+2$ zbytek 1, přičemž $p(1) = 61$. *(Jaromír Šimša)*

C-I-2. Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod 72 m a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru $3:4$. *(Pavel Leischner)*

C-I-3. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

kde (x, y) a $[x, y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y. *(Tomáš Jurík)*

C-I-4. Reálná čísla a, b, c, d vyhovují rovnici $ab+bc+cd+da = 16$.

a) Dokažte, že mezi čísly a, b, c, d se najdou dvě se součtem nejvýše 4.

b) Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

(Ján Mazák)

C-I-5. Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b. Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.

(Leo Boček)

C-I-6. Na hrací desce $n \times n$ tvořené bílými čtvercovými poli se Markéta a Tereza střídají v tazích jedním kamenem při následující hře. Nejprve Markéta umístí kámen na libovolné pole a toto pole obarví modře. Dále vždy hráčka, která je na tahu, provede s kamenem *skok* na pole, které je dosud bílé, a toto pole obarví modře. Přitom *skokem* rozumíme obvyklý tah šachovým jezdcem, tj. přesun kamene o dvě pole svisle nebo vodorovně a současně o jedno pole v druhém směru. Hráčka, která je na řadě a již nemůže táhnout, prohrává. Postupně pro $n = 4, 5, 6$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky.

(Pavel Calábek)

Projev předsedy ÚK MO doc. Jaromíra Šimši při slavnostním zahájení ústředního kola 60. ročníku MO v Brně

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

dovolte mi, dříve než pronesu očekávanou větu spojenou na sportovních olympiádách se zažehnutím olympijského ohně, malé zamyšlení nad jubileem naší soutěže.

Dovedu si představit, jak bujaře mohli slavit šedesáté narozeniny staří Babylóňané, pokud se vysokého základu své číselné soustavy vůbec dožívali. Dnes u nás tento životní mezník spadá ještě do etapy pracovní aktivity člověka. Buďme optimisté a věřme, že k tomu více přispívá náš zdravý způsob života nežli zhoršená ekonomická situace.

Věnujme se však dále samotné matematické olympiádě. Ta letos po 43 letech vrcholí opět v Brně, když předchozí (a zároveň první) taková přestávka trvala jen 5 let. V poslední větě jsem řekl dvě prvočísla a vy můžete dále počítat, kolikrát ještě do konce projevu řeknu nějaké slovo libovolného druhu, v jehož základě bude prvočíslo. Jako matematik bych navrhl říkat takovým slovům *prvočíslova*, ale i bez toho hrozí, že se budu při čtení zadr-zadrhávat.

Přestávka 43 let je nápadně dlouhá, když cílová místa matematické olympiády putovala a putují po všech krajích dřívějšího Československa a dnešní České republiky. Vysvětlení je nasnadě: Jihomoravský kraj měl dříve větší rozlohu, a tak 27. a 39. ročník vrcholily v tomto kraji, i když ne v Brně, nýbrž v obou případech v Jihlavě. Uvedené dvě číslovky 27 a 39 sice nejsou prvočísla, ale mají dohromady pouze dva prvočinitele, což není zrovna moc.

Obraťme však teď pozornost na první léta matematické olympiády. Teprve v 11. ročníku bylo vyvráceno tvrzení, že naše soutěž vrcholí vždy v Praze. Po pražském období se stalo už jenom jednou, že se ceny vítězům matematické olympiády udělovaly několik let, konkrétně tři roky po sobě, ve stejném městě. Stalo se tak bezprostředně poté, co skončila 41-letá historie MO v důsledku rozpadu společného státu Čechů a Slováků. Naši slovenští kolegové tak zrovna dnes zahajují své 19. samostatné ústřední kolo MO. Mnozí z přítomných vědí, že časová shoda termínů soutěže v obou státech není náhodná. Čeští i slovenští olympionici totiž i nadále řeší stejné úlohy, které pro ně připravujeme společně se slovenskými kolegy.

Zmíněným, mohu-li tak říct, repetičním městem bylo Jevíčko, poprvé v roce 1993, rok poté tam naše soutěž opět vrcholila, to už byl její 43. ročník, a do třetice se tak stalo hned v příštím roce 1995. Nejde sice o prvočíslo, ale je to zajímavý součin většiny z první sedmice prvočísel. Její zbylá tři prvočísla mají součin 2 431 a kde se v tomto roce bude konat olympiáda, není ještě známo.

Tříleté jevíčské období má kromě rozpadu Československa ještě jedno pádné vysvětlení. Naše školství se v devadesátých letech nacházelo stejně jako celá naše společnost v neklidném období porevolučních změn. Matematická olympiáda tehdy proto nebyla zrovna středem zájmu školských i jiných státních institucí, řešících palčivější problémy, a tak naše soutěž ráda našla útulný azyl v pohostinném městě na malé Hané.

Dnes už je naštěstí reformní období za námi, situace ve školství se zklidnila a stabilizovala, ničím nerušená náročná a současně pro žáky přitažlivá výuka se na všude řídí na míru šitými školními vzdělávacími programy a letos už snad proběhnou (dokonce naostro) státní maturity.

Zpátky však k naší soutěži. Chtěl bych se ve svém projevu také zmínit o pracovnících, kteří svým úsilím výrazně ovlivnili úspěšný chod různých etap dlouhé historie naší olympiády. Uvědomil jsem si však, jak je to nesnadný úkol. Má vůbec smysl jmenovat nějaké představitele ústředí MO, když o úspěchu soutěže patrně více rozhodovala obětavost desítek a dnes jistě již stovek bývalých i současných učitelů matematiky, kteří své žáky pro účast v naší soutěži získali a pak jim v přípravě na ni vydatně pomáhali? Tak jsem se rozhodl, že z osobností, které dnes už nejsou mezi námi, vzpomenu jedinou, a to jednoho ze zakladatelů MO, který v prvních ročnících soutěže, kdy se teprve utvářela její struktura, věnoval přípravě olympiády nejvíce času a energie ze všech zainteresovaných. Tím člověkem byl pan Rudolf Zelinka, vědecký pracovník Matematického ústavu v Praze, který prvních 13 ročníků zastával funkci ústředního jednatele naší soutěže. V pomyslné síni slávy MO, do níž by kromě vítězů jednotlivých ročníků měli být uvedeni i takoví lidé, jako byl Rudolf Zelinka, by k jeho jménu stačilo připojit jedinou větu: Zasloužil se o matematickou olympiádu.

Mám velkou radost, že na dnešním slavnostním zahájení jsou přítomny tři významné postavy historie naší soutěže. Především bych vám rád představil člověka, který 11 + 7 let zastával funkci ústředního místopředsedy MO. Je jím matematik světového jména, pan profesor Miroslav Fiedler. Dobu výkonu funkce pana Fiedlera v MO jsem vyjádřil součtem dvou prvočísel, protože se skutečně jednalo o dvě období, oddělená přestávkou kratší než 7 a delší než 5 let. Druhou vynikající osobností, po které jsem před 11 lety převzal funkci ústředního předsedy MO, je pan docent Leo Boček. Pan docent byl předsedou 13 let, když předtím 7 let vykonával funkci ústředního tajemníka. Třetím matematikem, kterému jsem to doufám také dobře spočítal, je rekordman, který už 29 let působí jako ústřední tajemník naší soutěže. Je jím vynikající redaktor všech textů MO, pan doktor Karel Horák.

Závěr mého zamyšlení nad jubileem naší soutěže mi usnadní jedna vzpomínka na významného brněnského matematika 20. století, akademika Otakara Borůvku. Nebudu mluvit o jeho vědeckém díle, pojmu to odlehčeně, už tím, že kuriózně zmíním jeho funkci ústředního místopředsedy MO, kterou zastával sice jediný rok, letopočet 1953 se však v mém projevu počítá.[13] Akademik Borůvka jednou při oslavě něčích narozenin prohlásil, že šedesátiny jsou významnějším životním jubileem než tolik vyzdvihované padesátiny. Proč? Prostě proto, že číslo 60 spočívá v objetí prvočíselných dvojčat 59 a 61.

Tím moje svérazné ohlédnutí za historií matematické olympiády končí. Prohlašuji ústřední kolo 60. ročníku matematické olympiády za zahájené.

[13] Zkouška pozornosti posluchačů, neboť 1953 je zřejmě násobek čísla 9.