Dag Hrubý
Trojúhelník v Gaussově rovině

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 4, 209–221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150372

TROJÚHELNÍK V GAUSSOVĚ ROVINĚ

DAG HRUBÝ

Cílem článku je přispět k hlubšímu poznání vztahů mezi planimetrií, analytickou geometrií, algebrou a komplexními čísly. Je mně jasné, že při běžné výuce matematiky není na takové hrátky čas, zejména v současné době, která matematice není příliš nakloněna. Mám na mysli potlačování matematiky v kurikulárních dokumentech základních, středních a vysokých škol. Přesto se domnívám, že zabývat se komplexními čísly stojí za to. Učiteli matematiky, který má svůj předmět rád, to rozhodně přinese více radosti, než různá školení o gramotnostech a kompetencích všech možných typů.

Úvodem si vyřešíme několik jednoduchých úloh. V dalším textu budeme někdy obraz komplexního čísla a v Gaussově rovině nazývat stručněji bod a a psát $a \in \mathbb{G}$.

Úloha 1. V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $z^3 = 1$ a obrazy kořenů rovnice znázorněte v Gaussově rovině.

Řešení: Je snad zřejmé, že daná rovnice má právě tři kořeny, jejich obrazy v $\mathbb{G}$ leží na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a jsou současně vrcholy rovnostranného trojhelníku. Ukážeme si několik způsobů, jak k očekávanému výsledku dospět.

1. způsob:

$$z^3 = 1$$

$$(z-1)\cdot(z^2+z+1) = 0$$

$$(z-1)\cdot\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=0$$

$$(z-1)\cdot\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=0.$$

Odtud snadno dostáváme kořeny

$$z=1 \qquad z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

2. způsob:

$$z^3-1=0$$

$$(z-1)\cdot(z^2+z+1)=0$$

Součin na levé straně rovnice je roven nule právě když platí

$$z-1=0 \quad \text{nebo} \quad z^2+z+1=0.$$

Řešení lineární rovnice $z-1=0$ je zřejmé, kvadratickou rovnici vyřešíme pomoc diskriminantu. V našem případě dostáváme $D = b^2-4ac=-3$. Pro zbývající dva kořeny platí

$$z=\frac{-b\pm \mathrm{i}\sqrt{D}}{2}=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

3. způsob:
Pro řešení použijeme známý vzorec pro kořeny binomické rovnice $z^n=a$

$$z=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

V případě naší rovnice $z^3=1$ je $a=1, n=3, \varphi=0, k\in\{0,1,2\}$. Obecné řešení rovnice má tvar

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

Pro jednotlivé kořeny pak platí

$$z_0 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Snadno se přesvědčíme že platí $|z_0-z_1| = |z_0-z_2| = |z_1-z_2| = \sqrt{3}$. Daný trojúhelník je tedy rovnostranný. Pozorný čtenář vidí, že tak platí $z_2 = z_1^2$.

Poslední uvedený způsob řešení nám připomíná jednu z významných transformací v Gaussově rovině. Nechť je dáno číslo

$$\varepsilon = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi, |\varepsilon| = 1$$

Je-li nyní dáno číslo $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, pak pro číslo $w = \varepsilon z$ platí

$$w = |z|(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)).$$

Snad je zřejmé, že číslo w je obrazem čísla z v rotaci se středem v počátku soustavy souřadnic a úhlem rotace o velikosti ψ. Čtenář obeznámený s uvedenou problematikou by mohl navrhnout další způsob řešení spočívající v rotaci se středem v počátku soustavy souřadnic a úhlem rotace o velikosti $\psi = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. způsob:
Nechť $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$. Evidentní kořen $z = 1$ rovnice $z^3 = 1$ postupně vynásobíme $1, \varepsilon, \varepsilon^2$. Dostáváme tak kořeny $1, \varepsilon, \varepsilon^2$.

Čísla $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ mají řadu zajímavých vlastností, ukážeme si některé z nich. Jejich důkazy určitě zvládnou i studenti.

Věta 1. *Pro čísla* $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ *platí:* $\quad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$

Věta 2. *Pro čísla* $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ *platí:* $\quad 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 = \frac{3}{\varepsilon - 1}.$

Věta 3. *Jsou-li* $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ *vrcholy rovnostranného trojúhelníku, kterému je opsána jednotková kružnice, pak pro libovolný bod* z *této kružnice platí*

$$|z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\varepsilon^2|^2 = 6.$$

Poznamenejme, že jednotkovou kružnicí rozumíme vždy kružnici s poloměrem 1 a středem v počátku soustavy souřadnic. Jednoduchým cvičením je i ověření platnosti Vietových vzorců pro kořeny rovnice $z^3 = 1$. Náročnější čtenáři mohou zkoumat, zda množina $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ není nosičem podgrupy multiplikativní grupy všech komplexních jednotek.

Úloha 2. Vypočtěte obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou určeny body a, b, c v Gaussově rovině.

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme bod a umístit do počátku soustavy souřadnic. Pro obsah trojúhelníka pak platí

$$S = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot |c| \cdot \sin\varphi,$$

kde φ je odchylka vektorů b, c, $\varphi \in (0, \pi)$. Nyní se pokusíme vyjádřit $\sin\varphi$.
Je-li $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$ a $c = |c|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, $\vartheta - \psi = \varphi$, pak platí

$$\frac{c}{b} = \frac{|c|}{|b|}(\cos(\vartheta-\psi) + \mathrm{i}\sin(\vartheta-\psi)) = \frac{|c|}{|b|}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Odtud snadno plyne

$$\frac{c\cdot|b|}{b\cdot|c|} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Položíme-li

$$\frac{c\cdot|b|}{b\cdot|c|} = \frac{\bar{b}\cdot c\cdot|b|}{\bar{b}\cdot b\cdot|c|} = \frac{\bar{b}\cdot c\cdot|b|}{|b|^2\cdot|c|} = \frac{\bar{b}\cdot c}{|b|\cdot|c|} = \frac{\bar{b}\cdot c}{|b\cdot c|},$$

dostáváme rovnost

$$\frac{\bar{b} \cdot c}{|b \cdot c|} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,$$

ze které lze vyjádřit $\sin\varphi$

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\bar{b} \cdot c)}{|b \cdot c|},$$

kde $\mathrm{Im}(\bar{b} \cdot c)$ značí imaginární část komplexního čísla $\bar{b} \cdot c$. Po dosazení do vzorce $S = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot |c| \cdot \sin\varphi$ dostáváme pro obsah trojúhelníka

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\mathrm{Im}(\bar{b} \cdot c)\right|.$$

Pokud nyní bude $a \neq 0$, tak pro obsah trojúhelníka platí

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\mathrm{Im}(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (c - a)\right|.$$

Úloha 3. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, jehož vrcholy jsou určeny body $a = -2 - \mathrm{i}$, $b = 1 - 3\mathrm{i}$, $c = 4 + 2\mathrm{i}$ v Gaussově rovině.

Řešení: V tomto případě je $\bar{b} = 1 + 3\mathrm{i}$, $\bar{a} = -2 + \mathrm{i}$, $\bar{b} - \bar{a} = 3 + 2\mathrm{i}$, $c - a = 6 + 3\mathrm{i}$. Po dosazení do vzorce pro obsah trojúhelníka dostáváme

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{Im}(3 + 2\mathrm{i})(6 + 3\mathrm{i})| = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(12 + 21\,\mathrm{i})| = \frac{21}{2}.$$

Věta 4. *Pro obsah trojúhelníka ABC, jehož vrcholy jsou obrazy komplexních čísel a, b, c, platí $S = \frac{1}{4}|\Delta|$, kde*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

V důkazu výše uvedené věty budeme vycházet z platnosti obdobného vzorce v souřadnicích kartézských. Dříve, než provedeme důkaz této věty, vyřešíme předcházející úlohu podle výše uvedeného vzorce. Nejdříve vypočteme determinant Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2-\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} & 1 \\ 1-3\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & 1 \\ 4+2\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = -42\mathrm{i}$$

Pro obsah dostáváme $S = \frac{1}{4} \cdot |\Delta| = \frac{1}{4} \cdot |-42\mathrm{i}| = \frac{21}{2}$.

Připomeneme si nyní podobný problém z analytické geometrie v rovině. Jsou-li body $A[x_1, y_1]$, $B[x_2, y_2]$, $C[x_3, y_3]$ vrcholy trojúhelníka, pak pro jeho obsah platí $S = \frac{1}{2} \cdot |A|$, kde A je determinant

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Důkaz vzorce $S = \frac{1}{2} \cdot |A|$ je pěkným cvičením, ve kterém si můžete ověřit své znalosti z analytické geometrie. Pokud přiřadíme vrcholům A, B, C komplexní čísla $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + {}_2\mathrm{i}$, $c = c_1 + c_2\mathrm{i}$, tak determinant A můžeme přepsat do tvaru

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nyní jsme již připraveni dokázat vzorec $S = \frac{1}{4} \cdot |\Delta|$. Porovnáním tohoto vzorce se vzorcem $S = \frac{1}{2} \cdot |A|$ dospíváme k podmínce $|\Delta| = 2 \cdot |A|$. Pokud dokážeme tuto rovnost, bude dokázána i věta 4. Připomeňme si, že výrazy $|\Delta|$, $|A|$ značí absolutní hodnoty determinantů Δ a A. Pro determinant A platí

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1) + (b_1c_2 - b_2c_1) + (c_1a_2 - c_2a_1).$$

Podobně pro determinant Δ platí

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = (a\overline{b} - b\overline{a}) + (b\overline{c} - c\overline{b}) + (c\overline{a} - a\overline{c}).$$

Po dosazení $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, $c = c_1 + c_2\mathrm{i}$ do pravé strany přecházející rovnosti obdržíme

$$\begin{aligned}\Delta = (a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 - b_2\mathrm{i}) - (b_1 + b_2\mathrm{i})(a_1 - a_2\mathrm{i}) &+ \\ + (b_1 + b_2\mathrm{i})(c_1 - c_2\mathrm{i}) - (c_1 + c_2\mathrm{i})(b_1 - b_2\mathrm{i}) &+ \\ + (c_1 + c_2\mathrm{i})(a_1 - a_2\mathrm{i}) - (a_1 + a_2\mathrm{i})(c_1 - c_2\mathrm{i})&\end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$\Delta = -2\mathrm{i}(a_1b_2 - a_2b_1) - 2\mathrm{i}(b_1c_2 - b_2c_1) - 2\mathrm{i}(c_1a_2 - c_2a_1) = -2\mathrm{i}A.$$

Odtud snadno plyne

$$|\Delta| = |-2\mathrm{i}A| = 2|A|.$$

Úloha 4. Určete průsečík výšek trojúhelníku ABC, jsou-li jeho vrcholy obrazy komplexních čísel a, b, c, které leží na jednotkové kružnici.

Řešení: Pro čísla a, b, c platí $|a| = |b| = |c| = 1$. Průsečík výšek určíme jako průsečík přímek p, q, kde p je přímka procházející vrcholem C a kolmá na stranu AB a q je přímka procházející vrcholem A a kolmá na stranu BC. Přímky mají následující rovnice

$$\begin{aligned}p&: (a - b)(\overline{z} - \overline{c}) + (\overline{a} - \overline{b})(z - c) = 0\\ q&: (b - c)(\overline{z} - \overline{a}) + (\overline{b} - \overline{c})(z - a) = 0.\end{aligned}$$

V obou případech se jedná o vyjádření přímky v Gaussově rovině pomocí normálového vektoru. V našem případě se jedná o normálové vektory $a - b$ a $b - c$. Obě rovnice upravíme s využitm vztahu $|a|^2 = a\overline{a} = 1$, z kterého plyne $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$. Stejným způsobem vyjádříme $\overline{b}$ a $\overline{c}$. Po dosazení do výše uvedených rovnic přímek p, q dostáváme

$$\begin{aligned}\overline{z} - \frac{1}{c} - \frac{1}{ab}(z - c) &= 0\\ \overline{z} - \frac{1}{a} - \frac{1}{bc}(z - a) &= 0.\end{aligned}$$

Rovnice od sebe odečteme a obdržíme rovnici

$$(a-c)(-z+a+b+c)=0.$$

Odtud již snadno plyne řešení naší úlohy. Průsečík výšek trojúhelníku ABC je obrazem komplexního čísla $z=a+b+c$.

V poslední části našeho povídání o trojhúhelníku v Gaussově rovině se zaměříme na Feuerbachovu kružnici. Tato kružnice je také nazývána *kružnice devíti bodů*, protože prochází středy stran, patami výšek trojúhelníku a středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku. Naším úkolem bude odvodit rovnici Feuerbachovy kružnice a ukázat, že má požadované vlastnosti. Dříve, než tak učiníme, připomeneme si některé užitečné vztahy mezi komplexními čísly.

Věta 5.

$$\forall a\in\mathbb{C},\forall b\in\mathbb{C}:\quad |a+b|^2=|a|^2+|b|^2+\bar{a}b+a\bar{b}.$$

Důkaz: Využijeme známé rovnosti $\forall z\in\mathbb{Z}\colon |z|^2=z\bar{z}$, do které dosadíme $z=a+b$. Potom platí

$$|a+b|^2=(a+b)(\bar{a}+\bar{b})=a\bar{a}+b\bar{b}+\bar{a}b+a\bar{b}=|a|^2+|b|^2+\bar{a}b+a\bar{b}.$$

Věta 6.

$$\forall a\in\mathbb{C},\forall b\in\mathbb{C},|a|=1,|b|=1:\quad |a+b|^2=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$$

Důkaz: Dokazovaný vztah je bezprostředním důsledkem předcházející věty. Protože $|a|=a\bar{a}=1$, $|b|=b\bar{b}=1$, je $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$. Potom je

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+\bar{a}b+a\bar{b}=1+1+\frac{1}{a}b+a\frac{1}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$$

Nechť je nyní dán v Gaussově rovině trojúhelník ABC, jehož vrcholy jsou po řadě obrazy komplexních čísel a, b, c ležících na jednotkové kružnici. Nechť A' je střed strany BC, B' střed strany AC a C' střed strany AB. Dostáváme tak trojúhelník $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $k = \frac{1}{2}$. Protože vrcholy trojúhelníka ABC leží na kružnici o poloměru $r = 1$, má kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ poloměr $r = \frac{1}{2}$. Kružnice procházející středy stran trojúhelníka ABC, resp. opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, má tedy rovnici

$$|z - s| = \frac{1}{2}.$$

Nyní určíme střed této kružnice jako průsečík os stran $A'B'$ a $B'C'$ trojúhelníka $A'B'C'$. Vrchol A' je obrazem komplexního čísla $\frac{1}{2}(b+ + c)$ a vrchol B je obrazem komplexního čísla $\frac{1}{2}(a + c)$. Nejdříve určíme rovnici osy úsečky $A'B'$. Rovnici osy úsečky budeme hledat ve tvaru

$$(z_2 - z_1)\,\overline{z} + (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)\,z + |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0.$$

Tato rovnice byla odvozena v článku [4]. V našem případě postupně dostáváme

$$z_1 = \frac{1}{2}(b + c), z_2 = \frac{1}{2}(a + c),$$

$$\overline{z}_1 = \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{c}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \overline{z}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

Odtud plyne

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{2}(a + c) - \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(a - b), \overline{z}_2 - \overline{z}_1 = \frac{b - a}{2ab}.$$

Nyní si vyjádříme hodnoty $|z_1|^2$, $|z_2|^2$

$$|z_1|^2 = \left|\frac{b + c}{4}\right| = \frac{1}{4}|b + c|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(|b|^2 + |c|^2 + \overline{b}c + b\overline{c}) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

$$|z_2|^2 = \left|\frac{a+c}{4}\right| = \frac{1}{4}|a+c|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(|a|^2 + |c|^2 + \overline{a}\, c + a\overline{c}) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) - \frac{1}{4}\left(2 + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) =$$

$$= \frac{(a-b)(c^2-ab)}{4abc}.$$

Po dosazení do rovnice osy úsečky dostáváme

$$\frac{1}{2}(a-b)\overline{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{ab}\right)z + \frac{(a-b)(c^2-ab)}{4abc} = 0$$

Po úpravě dostáváme rovnici osy úsečky $A'B'$

$$\overline{z} - \frac{1}{ab}z + \frac{c^2-ab}{2abc} = 0.$$

Snad nebude obtížné pochopit, že pro osu úsečky $B'C'$ platí

$$\overline{z} - \frac{1}{bc}z + \frac{a^2-bc}{2abc} = 0.$$

Odečtením obou rovnic dostáváme rovnici o jedné neznámé z

$$(c-a)(-2z + a + b + c) = 0,$$

z které snadno plyne

$$z = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Dostáváme tak průsečík obou přímek, tedy střed s hledané kružnice. Pro rovnici kružnice platí

$$|z-s| = \left|z - \frac{a+b+c}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Pozorný čtenář snad zaznamenal, že střed této kružnice souvisí s průsečíkem výšek trojúhelníka ABC, který jsme řešili v úloze 4.

Označíme-li průsečík výšek trojúhelníka v, pak platí $s = \frac{1}{2}v$. Rovnici kružnice pak můžeme napsat ve tvaru

$$\left|z - \frac{v}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

V této souvislosti můžeme nyní vyslovit definici Feurbachovy kružnice.

Definice Feurbachovy kružnice.
Kružnice, která prochází středy stran trojúhelníku se nazývá *Feurbachova kružnice.*

K důkazu, že Feuerbachova kružnice prochází dalšími šesti body, budeme předpokládat, že střed kružnice opsané danému trojúhelníku je v počátku soustavy souřadnic a její poloměr, bez újmy na obecnosti, je roven jedné. Vrcholy a, b, c leží na jednotkové kružnici se středem v počátku, jsou to tedy komplexní jednotky. Za těchto předpokladů má Feuerbachova kružnice, jak bylo ukázáno výše, střed v bodě $s = \frac{v}{2}$.

Věta 7. *Feuerbachova kružnice prochází*

a) patami výšek trojúhelníka

b) středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníka.

Důkaz: Při dokazování jednotlivých části této věty zvolíme vždy jeden bod z dané trojice, protože důkaz pro zbývající dva body je zcela analogický. Připomeňme ještě hodnoty $|a| = |b| = |c| = 1$.

a) Abychom ukázali, že pata výšky leží na kružnici, musíme nejdříve patu výšky určit. Rozhodneme se pro výšku vedenou vrcholem C na stranu AB. Patu této výšky určíme jako průsečík kolmých přímek, přímky vedené bodem C a přímky AB. Dříve než tak učiníme, uvedeme bez důkazu tzv. *směrový tvar rovnice přímky* určené dvěma body z_1, z_2.

$$(z_2 - z_1)\overline{z} - (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)z + z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 = 0.$$

K vyjádření přímky vedené bodem C použijeme normálový tvar

$$(a-b)(\bar{z}-\bar{c})+(\bar{a}-\bar{b})(z-c)=0.$$

Po úpravě, s využitím vztahu $a\bar{a}=1$, dostáváme rovnici

$$z-c-ab(\bar{z}-\bar{c})=0.$$

K vyjádření přímky AB použijeme směrový tvar rovnice přímky. V našem případě dostáváme rovnici

$$(b-a)\bar{z}-(\bar{b}-\bar{a})z+a\bar{b}-\bar{a}b=0.$$

Podobně jako v předcházejícím případě dostáváme po úpravách rovnici

$$z-a+ab(\bar{z}-\bar{a})=0.$$

Nyní obě rovnice sečteme

$$\begin{aligned} z-c-ab(\bar{z}-\bar{c})+z-a+ab(\bar{z}-\bar{a})&=0\\ 2z-c-a+ab\bar{c}-b&=0 \end{aligned}$$

Odtud pro z plyne $z=\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{ab\bar{c}}{2}$, což je hledaná pata výšky. Pokud leží na Feuerbachově kružnici, musí splňovat její rovnici. Po dosazení dostáváme

$$\left|z-\frac{a+b+c}{2}\right|=\left|\frac{a+b+c}{2}-\frac{ab\bar{c}}{2}-\frac{a+b+c}{2}\right|=\left|-\frac{ab\bar{c}}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

To však znamená, že pata výšky leží na Feurbachově kružnici.

b) Pro průsečík výšek platí $v=a+b+c$. Zvolme-li například vrchol A, pak pro střed m úsečky spojující průsečík výšek s vrcholem A platí $m=\frac{1}{2}(a+v)=\frac{1}{2}(a+a+b+c)=a+\dfrac{b+c}{2}$. Po dosazení do rovnice kružnice dostáváme

$$\begin{aligned}\left|z-\frac{a+b+c}{2}\right|&=\left|m-\frac{a+b+c}{2}\right|=\\ &=\left|a+\frac{b+c}{2}-\frac{a+b+c}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tím je důkaz věty ukončen.

Na závěr si ukážeme v jakém vztahu jsou střed S kružnice trojúhelníku opsané, střed F Feuerbachovy kružnice, těžiště T a průsečík výšek V. Ve stejnolehlosti se středem v těžišti T a koeficientem $\kappa = -\frac{1}{2}$ se vrcholy trojúhelníku zobrazí na středy stran, střed S opsané kružnice na střed F Feuerbachovy kružnice, průsečík výšek V na střed kružnice opsané S. To znamená, že body S, T, F, V leží na přímce v tomto pořadí a pro jejich vzdálenosti platí $|ST| : |TF| : |FV| = 2 : 1 : 3$. Víme, že T leží v bodě $\dfrac{a+b+c}{3}$. Volíme-li S v počátku soustavy souřadnic, musí F ležet v bodě $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{a+b+c}{2}$. Protože je $|SV| = 2|SF|$, leží V v bodě $a + b + c$.

Literatura

[1] Ráb, M., *Komplexní čísla v elementární matematice*, Masarykova univerzita Brno, 1996.

[2] Vyšín, J., *Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1976.

[3] Makrides, G.(ed.), *Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách*, MATH. EU Projekt, Atelier Guimaec, s. r. o., 2006.

[4] Hrubý, D., Přímka v Gaussově rovině, *Učitel matematiky* **78**(2011), 81–88.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz