Jan Fiala

Rombický dodekaedr

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 4, 193–202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150370

ROMBICKÝ DODEKAEDR

JAN FIALA

Úvod

Běžným doplňkem učiva matematiky se silným motivačním nábojem je bezesporu práce s geometrickými tělesy, při které žáci rozvíjejí své manipulační dovednosti, geometrickou představivost a znalosti o geometrických tělesech a jejich vlastnostech. Práce s geometrickými tělesy je součástí činnostního pojetí výuky matematiky především na základních školách a v nižších ročnících gymnázií, vhodná a velmi žádoucí, avšak pro nedostatek času často opomíjená je ve výuce středních škol. Přitom konkrétní činnostní pojetí výuky matematiky má pro skutečné porozumění matematickým fenoménům zásadní význam. Modelování geometrických těles koresponduje s žádoucími cílovými kompetencemi žáků ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace podle RVP.

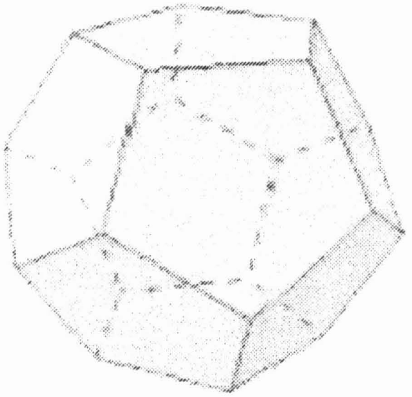
V textu příspěvku má učitel matematiky možnost připomenout si základní geometrické a některé metrické charakteristiky tzv. rombického dodekaedru, naučit se návod na sestavení jeho modelu a získat přehled a vzor pro jeho možné využití ve výuce matematiky na základní a střední škole.

Pravidelný dodekaedr

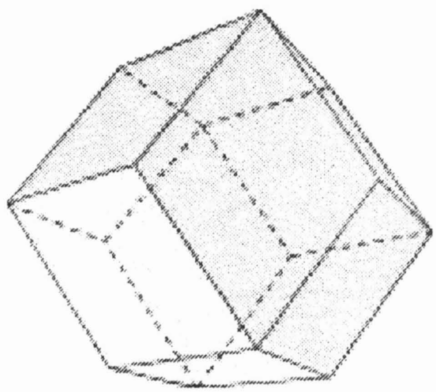
„Zkoumáním" geometrických vlastností pravidelných mnohostěnů se zabývali již staří Řekové, filozofové a první matematici, k nimž patřil také Platón (428?–374 př. n. l.) Ten našel řadu inspirací také u zastánců pythagorejské školy. Je dále autorem mystického nazírání na pravidelné mnohostěny (krychle, tetraedr, oktaedr, ikosaedr), které spodobňoval se čtyřmi základními elementy (země, oheň, vzduch, voda). Pátý pravidelný mnohostěn (dvanáctistěn) považoval za těleso, které zahrnuje celý vesmír.

Pravidelné mnohostěny, jak je obecně známo, mají tři základní společné vlastnosti: 1. Jde o konvexní těleso. 2. Z každého vrcholu tělesa vychází stejný počet hran. 3. Každá ze stěn je ohraničena stejným počtem hran, přesněji řečeno – každá ze stěn je pravidelný n-úhelník.

Pravidelný dodekaedr (obr. 1) je jedním z pěti existujících: je to pravidelný dvanáctistěn, jehož každou stěnu tvoří pravidelný pětiúhelník. O pravidelných dodekaedrech je všeobecně známo mnoho, text se tedy dále zaměří na těleso, které je pravidelnému dvanáctistěnu sice velmi blízké, přesto vykazuje podstatné odlišnosti.



Obr. 1



Obr. 2

Rombický dodekaedr

Tzv. rombický dodekaedr (obr. 2) je trojrozměrné těleso, mnohostěn, speciální případ dvanáctistěnu, jehož každou stěnu ovšem tvoří kosočtverec (rhombus, odtud přívlastek rombický). Z výše uvedených vlastností pravidelného dvanáctistěnu zůstávají v platnosti pouze vlastnost první a částečně i třetí: rombický dodekaedr je konvexní těleso a každá ze stěn je ohraničena stejným počtem hran. Neplatí však, že každá ze stěn je pravidelný n-úhelník. Z každého ze šesti vrcholů vychází čtyři hrany, ze zbývajících osmi vrcholů vychází hrany pouze tři. Z výše uvedených důvodů tedy nelze považovat rombický dodekaedr za pravidelný mnohostěn.

Rombický dodekaedr je tzv. katalánské[1] (tj. duálně archime-

[1]Přehled všech katalánských těles lze najít na URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid`

dovské) těleso, které je sjednocením hexaedru (krychle) a oktaedru (pravidelný osmistěn). Vznikne také tak, že všech šest „pyramid“, z nichž lze krychli sestavit, „překlopíme“ z vnitřku krychle vrcholem každé z pyramid ven a sjednotíme je s krychlí. (Odkaz na animaci vzniku rombického dodekaedru touto cestou je uveden v odkazech na literaturu.)

V případě rombického dodekaedru jde o polyedr se 14 vrcholy a 24 hranami. Šest vrcholů je společným krajním bodem čtyř hran, na zbylých vrcholech se „stýkají“ tři hrany. Všechny stěny jsou shodné kosočtverce, každé dvě protilehlé stěny leží v různých rovnoběžných rovinách. Dodekaedr je těleso středově souměrné, má právě jeden střed souměrnosti. Dodekaedr má tři osy souměrnosti. Není to však těleso rotační.

Objem V rombického dodekaedru s délkou hrany a se vypočítá pomocí vztahu $V = \frac{16}{9}a^3\sqrt{3}$, jeho povrch P se určí užitím vztahu $P = 8a^2\sqrt{2}$, poloměr koule dodekaedru opsané je $r = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$, poloměr koule dodekaedru vepsané je $\varrho = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Andradit

Rombický dodekaedr často tvoří krystalickou strukturu krychlového minerálu andraditu ze skupiny granátů. (obr. 3)

Model rombického dodekaedru v umění

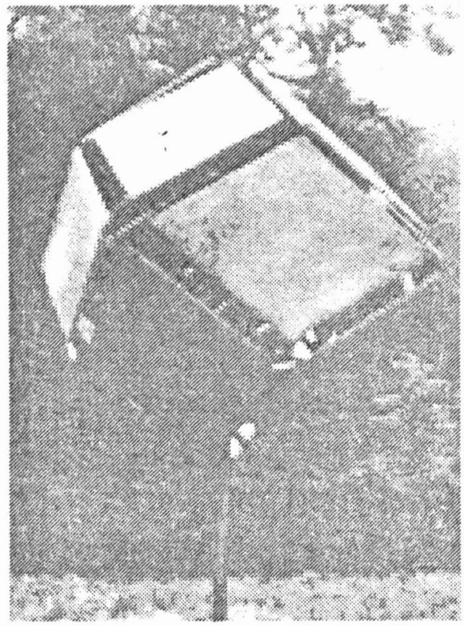
Rombický dodekaedr inspiroval dosud řadu umělců při tvorbě uměleckých děl. Jako příklad uvádím dílo francouzského umělce a architekta Gérarda Chamayou s názvem *Orientation*[2]. Své uplatnění našel model tohoto tělesa také v oblasti reklamy.

Návod na sestavení rombického dodekaedru

Při sestavování dodekaedru vyjdeme z papíru velikosti A5, který budeme pečlivě ohýbat podle následujících kroků. Fáze skládání jsou znázorněny na obrázcích 5 až 12. Celý postup je potřeba provést celkem dvanáctkrát, neboť se jedná o dvanáctistěn. Minimum potřebných pomůcek tvoří kancelářský papír velikosti A4

[2]URL: `http://www.chamayou-dit-felix.eu/photos/orientation.jpg`.

Obr. 3



Obr. 4

(případně v různých barvách), nůžky a lepicí páska pro zpevnění spojů mezi stěnami.

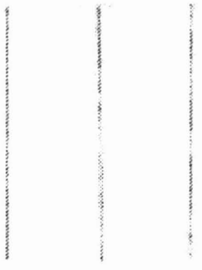
Krok 1: Obdélník v základní poloze (delší strana nechť je základnou a kratší výškou obdélníka) rozdělíme na 4 svislé shodné části (obr. 5).

Krok 2: Každý z vrcholů výchozího obdélníka postupně ohneme do středu strany obdélníka: pro dva horní vrcholy obdélníka jde o základnu, pro krajní body základny jde o stranu s ní rovnoběžnou. Ve vnitřní střední části obdélníka je hned po provedení všech čtyř ohybů viditelný kosočtverec, který bude tvořit jednu ze stěn dodekaedru (obr. 6).

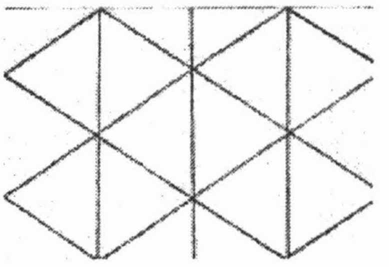
Krok 3: Každý vrchol obdélníka ohneme podle nejbližších ohybů z přiléhajících stran dovnitř obdélníka a ponecháme ho v této pozici, nebo jej odstřihneme (obr. 7).

Krok 4: Osmiúhelník z třetího obrázku ohýbáme směrem dovnitř dále podle úhlopříček, které kopírují hrany kosočtverce (obr. 8).

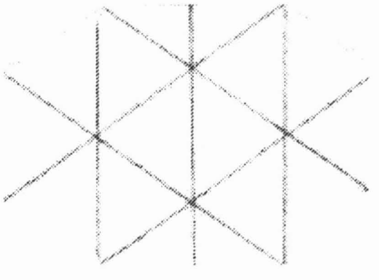
Krok 5: Vrchol šestiúhelníku, který leží na obrázku 4 nejvýš, prohneme dovnitř (obr. 9).



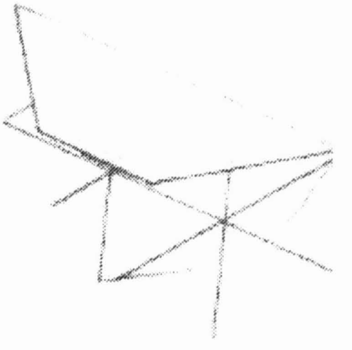
Obr. 5



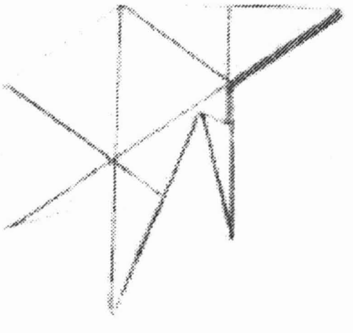
Obr. 6



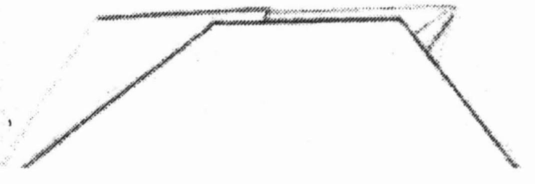
Obr. 7



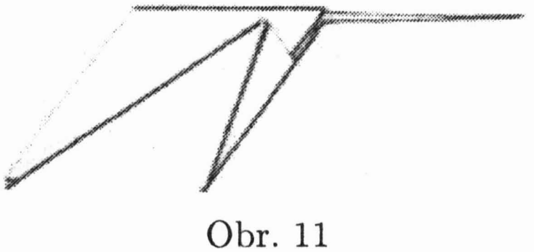
Obr. 8



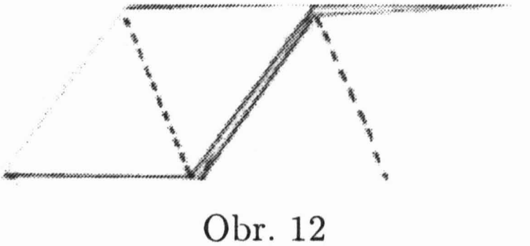
Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Krok 6: Jako v kroku 4, ale v druhé části šestiúhelníku (obr. 10).

Krok 7: Naposled ohnutou část šestiúhelníku z kroku 6 prohneme dovnitř jako v kroku 5 (obr. 11).

Krok 8: Pro zpevnění každé z dvanácti částí tělesa vložíme vyčnívající roh na obrázku 10 do „kapsy" ležící pod ní (obr. 12).

Nyní nám zbývá složit dalších jedenáct stejných dílů dodekaedru. Postupujeme analogicky podle uvedeného návodu. Posledním krokem je složení získaných dvanácti dílů do jednoho tělesa: postupně zasuneme cípy jednotlivých dílů do středních částí ostatních dílů. Drobné obtíže vznikají jen při zasouvání posledních stěn dodekaedru. Pevnost tělesa lze zlepšit přelepením hran lepící páskou, případně vyztužením modelu zevnitř.

Doporučuji, aby žáci ke skládání použili šest různých barev papíru. Vhodným umístěním párů stejně barevných stěn se docílí toho, že protilehlé stěny budou mít stejnou barvu.

Ve výuce se ukázalo, že uvedený návod není pro žáky nižších ročníků gymnázií obtížný, nadšení sestavit model rombického dodekaedru projevili ovšem i žáci podstatně starší. Je samozřejmě vhodnější, pokud se při výuce učitel nespolehne jen na uvedený návod, ale bude-li žákům jednotlivé kroky při sestavení modelu tohoto tělesa názorně demonstrovat. Výhodu mají jistě také ti žáci, kteří před skládáním dodekaedru již nějaké zkušenosti se skládáním modelů těles obecně mají. Složení modelu rombického dodekaedru je logisticky bezproblémové a finančně i časově nenáročné. Sestavení celého tělesa včetně návodné instruktáže učitele zvládnou žáci za jednu vyučovací hodinu.

Některá didaktická využití modelu rombického dodekaedru ve výuce

V této části vychází text z vlastních zkušeností při využití modelu rombického dodekaedru ve výuce tříd víceletých gymnázií i čtyřletých forem studia na gymnáziu.

Didaktická hodnota a atraktivita modelu dodekaedru tkví ve více skutečnostech. Předně se jedná o těleso, které není ani mezi samotnými učiteli příliš známé, nebo o něm mají jen základní znalosti. Lze tedy předpokládat, že i pro žáky bude seznámení se s tímto tělesem zajímavé a poučné. Další výhodou je zde přímé propojení poznatků z rovinné geometrie (geometrické vlastnosti kosočtverce) a geometrie těles (geometrické vlastnosti dodekaedru). Výhodou je také přímá návaznost na reálné objekty, konkrétně různá umělecká díla, krystalické struktury granátů apod., která podoby dodekaedru využívají. Nejde tedy v případě rombického dodekaedru o těleso, které by nemělo v realitě, ba dokonce v přírodním prostředí svůj konkrétní model.

Práci s rombickým dodekaedrem ve školním prostředí je tedy možné zařadit k učivu o kosočtverci k opakování a názorné demonstraci jeho geometrických vlastností, dále k určení jeho metrických vlastností i k učivu o mnohostěnech. Tam poslouží model dodekaedru k demonstraci jeho geometrických vlastností, k určení jeho povrchu a objemu a k porovnávání jejich velikostí s objemy mnohostěnů žákům známých, k hledání způsobů vzniku tohoto tělesa z jiných mnohostěnů, k hledání různých sítí rombického dodekaedru apod.

V nižších ročnících gymnázia a ve třídách klasického gymnázia se osvědčila mimo jiné následující didaktická využití, k nimž jsou přiřazeny formulace konkrétních otázek a úkolů.

- Sestavení modelu rombického dodekaedru vystřižením a slepením jeho sítě podle kroků při názorné demonstraci učitelem, podle slovního návodu nebo podle písemně formulovaného návodu.

- Samostatné (nebo s pomocí učitele) sestavení modelu rombického dodekaedru bez využití sítě podle přiloženého návodu (podle demonstrace učitele, či slovního návodu učitele bez demonstrace). *Sestav model rombického dodekaedru. Sestav těleso tak, aby stejně barevné stěny ležely proti sobě. Spočítej, kolik má vzniklé těleso stěn. Jak se těleso nazývá? Urči počet vrcholů sestaveného tělesa. Urči, kolik hran má dané těleso ...*

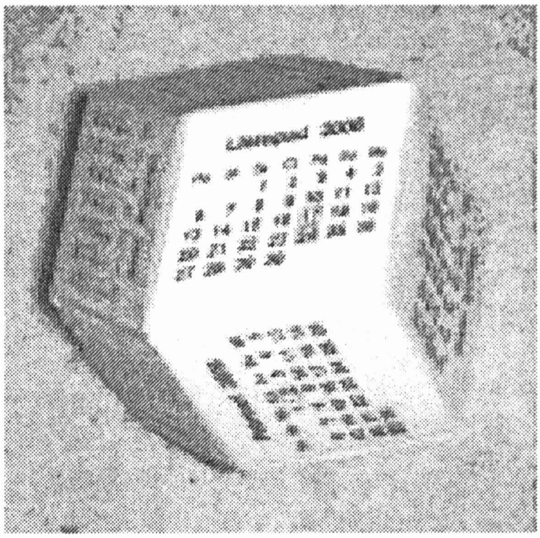
- Zkoumání geometrických vlastností rombického dodekaedru. *Má dané těleso střed souměrnosti? Jaký je jeho význam? Má* *dané těleso osu souměrnosti? Má těleso pouze jednu osu souměrnosti? Kolik os souměrnosti těleso dohromady má? Jakou vzájemnou polohu mají dvě navzájem protilehlé stěny? Experimentálně ověř, že rombický dodekaedr není těleso rotační. Zjisti, zda z každého vrcholu tělesa vychází stejný počet hran. Urči počet tělesových úhlopříček. Lze shodné modely dodekaedrů poskládat k sobě vhodně tak, že jejich sjednocení vyplňuje prostor? Názorně demonstruj....*

- Práce se sítěmi rombického dodekaedru. *Užitím přiložené sítě najdi další možné sítě rombického dodekaedru. Odhadni počet sítí rombického dodekaedru. Bude počet sítí dodekaedru větší než počet sítí pravidelného dvanáctistěnu (43 380)?*

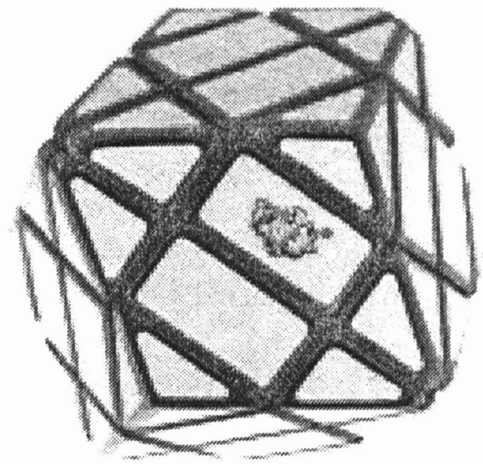
- Zkoumání geometrických a metrických vlastností každé ze stěn rombického dodekaedru. *Urči délky hran tělesa. Kolik hran tvoří jednu stěnu tělesa? Jaký rovinný geometrický útvar tvoří každou ze stěn tělesa? Jsou všechny stěny tělesa shodné útvary? Popiš tento útvar. Jaké společné vlastnosti mají všechny strany tohoto rovinného útvaru? Do jedné ze stěn tělesa barevně vynes spojnice protilehlých vrcholů. Co jsou to za úsečky a jaké mají vlastnosti? Vypočítej obsah každé ze stěny tělesa. Odvoď vztah pro výpočet výšky v kosočtverci. Vypočítej povrch tělesa s využitím vzorce. Vypočítej objem tělesa s využitím vzorce. Porovnej zjištěný objem s objemem pravidelného dodekaedru se stejnou délkou hrany a.*

Sestavený model rombického dodekaedru je dále možné využít na vytvoření stolního kalendáře stejného tvaru[3]. Sestav kalendář pro rok 2011. (obr. 13) V americké obchodní síti je k zakoupení Rubikova kostka ve tvaru rombického dodekaedru. (obr. 14) Zbývá doplnit, že model dodekaedru je možné využít také jako didaktický prostředek při výuce pravděpodobnosti náhodných jevů.

[3]Předlohu pro stolní kalendář lze najít na URL: `http://www.ii.uib.no/~arntzen/kalender/`

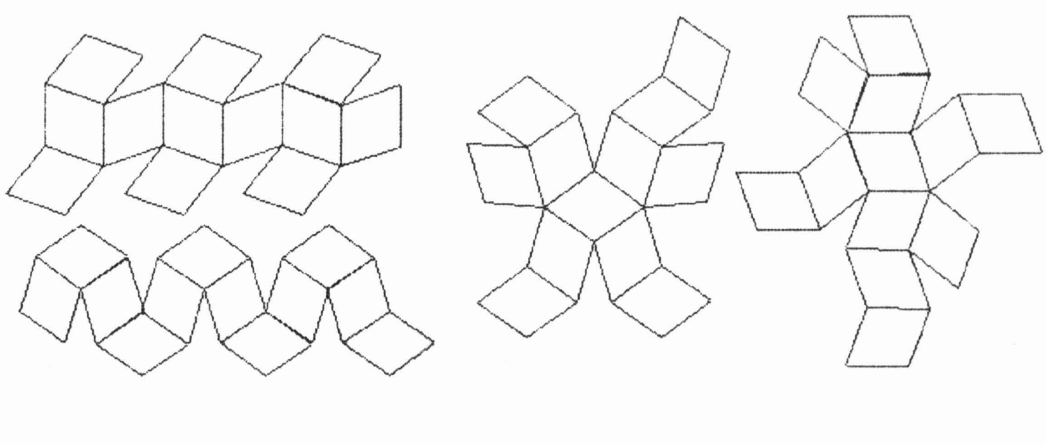


Obr. 13



Obr. 14

Některé z možných sítí rombického dodekaedru



Závěr

Rombický dodekaedr je speciálním tělesem, které může nalézt široké uplatnění ve výuce matematiky na základní i střední škole. Své využití najde zvláště v hodinách zájmové matematiky jako prostředek prohloubení znalostí žáků o tělesech a jejich dovednostech v sestavování modelů těles. Na skládání modelu dodekaedru a řešení úkolů výše uvedených mohou žáci spolupracovat v párech nebo ve skupinách, bezproblémová je ale i individuální činnost žáka.

Literatura

[1] *Rhombendodekaeder*. Wikipedia Die Freie Enzyklopädie. [online] [cit. 10. 10. 2010]. URL:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Rhombendodekaeder`.

[2] Animace vzniku rombického dodekaedru z krychle. Dostupné na: WIKIMEDIA COMMONS. [online] [cit. 12. 10. 2010]. URL:
`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:R1-cube.gif`.

[3] Síť rombického dodekaedru. Dostupné na: Wikipedia Die Freie Enzyklopädie. [online] [cit. 19. 11. 2010]. URL:
`http://en.wikipedia.org/wiki/File:Rhombicdodecahedron_net.svg`.

PhDr. Jan Fiala, Ph.D.
Gymnázium V. Nováka
Husova 333, 377 01 Jindřichův Hradec
e-mail: fjjh@post.cz