Vlasta Moravcová

Geometrické řešení jedné početní úlohy

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 172–178

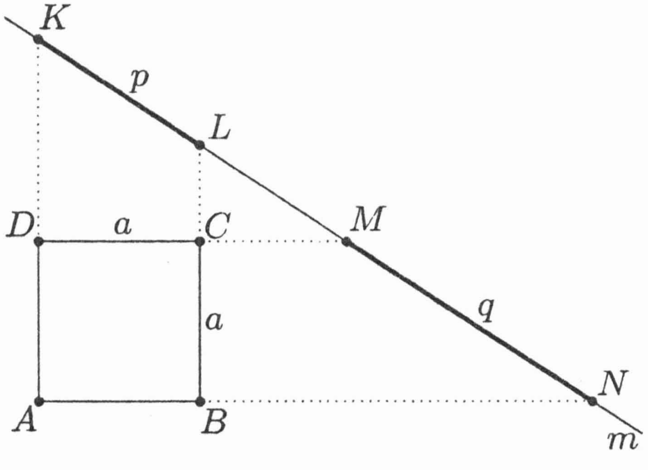
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150368`

GEOMETRICKÉ ŘEŠENÍ JEDNÉ POČETNÍ ÚLOHY

VLASTA MORAVCOVÁ

Ve *Sbírce úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol* autorů Bohumila Bydžovského a Jana Vojtěcha[13] je na straně 178 (pod číslem 20) uvedena následující úloha:

> *Sestrojte čtverec, jsou-li dány body, v nichž prodloužené strany jeho protínají přímku.*



Obrázek 1

Příklad je zařazen v paragrafu s názvem *Konstrukce algebraických výrazů.* Autor pravděpodobně předpokládal, že studenti budou řešit tuto úlohu pomocí výpočtu, tedy následovně:[14]

[13]Bydžovský, B., Vojtěch, J., *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol,* JČMF, Praha, 1924, 3. vydání, 335 stran. Sbírka je rozdělena na dvě části – část aritmetickou (zpracoval Dr. Bohumil Bydžovský) a část geometrickou (zpracoval Dr. Jan Vojtěch).

[14]Toto početní řešení předvedl také RNDr. Dag Hrubý při své přednášce *Je dán čtverec ...* proslovené dne 9. 11. 2010 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Za inspiraci k napsání tohoto článku mu patří dík.

Označme hledaný čtverec $ABCD$ a danou přímku m (obr. 1). Nechť prodloužené strany čtverce AD a BC protínají přímku m v bodech K, L a prodloužené strany čtverce DC a AB v bodech M, N. Označme délku strany čtverce a, $|KL| = p$, $|MN| = q$. Úsečky délek p, q jsou dány, je tedy třeba vyjádřit délku a pomocí p, q.

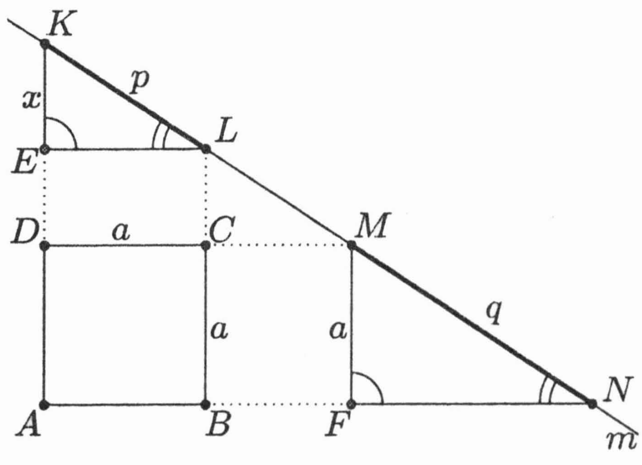
Uvažujeme-li body E, F tak, že čtyřúhelníky $DCLE$, $BFMC$ jsou obdélníky (obr. 2), potom trojúhelníky KEL, MFN jsou podobné. Z této podobnosti plyne

$$\frac{|KE|}{|KL|} = \frac{|MF|}{|MN|},$$

neboli

$$\frac{x}{p} = \frac{a}{q}, \tag{1}$$

kde $x = |KE|$.



Obrázek 2

Pro pravoúhlý trojúhelník KEL podle Pythagorovy věty dále platí

$$p^2 = a^2 + x^2,$$

neboli

$$x = \sqrt{p^2 - a^2}. \tag{2}$$

Dosazením do rovnice (1) za x výraz z rovnice (2) a následnou úpravou získáme vyjádření délky a:

$$a = \frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Nejprve sestrojíme úsečku délky $b = \sqrt{p^2 + q^2}$ (jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách p, q) a poté úsečku délky $a = \frac{pq}{b}$ (pomocí podobnosti $\frac{a}{p} = \frac{q}{b}$).

Známe-li délku a, můžeme snadno sestrojit body E, F a následně čtverec $ABCD$.

Výše popsanému postupu odpovídá i řešení uvedené v citované sbírce na straně 313:

> *Strana čtverce jest* $\frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, *jsou-li* p, q *šikmé průměty stran na přímce.*

Tuto úlohu však lze řešit (dle mého názoru velmi elegantně) čistě konstrukčním postupem, bez výpočtu. S takovým postupem se sice setkají spíše studenti v hodinách deskriptivní geometrie než matematiky, nicméně i pro „nedeskriptiváře" je tento způsob jistě zajímavý (a při výuce matematiky jej lze bez podrobných důkazů na střední škole předvést).

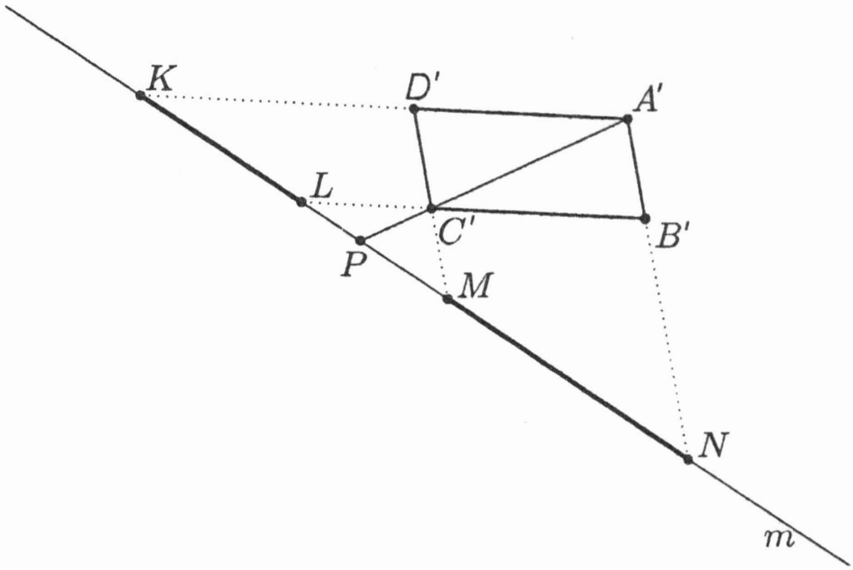
V následujícím textu popíšu konstrukční postup citované úlohy, v poznámkách pod čarou pak nastíním podrobněji některé myšlenky, na kterých je konstrukce založena.

Nejprve sestrojíme libovolný rovnoběžník $A'B'C'D'$, jehož prodloužené strany $A'D'$, $B'C'$, $D'C'$, $A'B'$ protínají danou přímku m po řadě v bodech K, L, M, N. V tomto rovnoběžníku sestrojíme úhlopříčku $A'C'$ a její průsečík s přímkou m označíme P (obr. 3).

Nyní existuje osová afinita v rovině[15] taková, že přímka m je osou této afinity (tedy každý bod přímky m je samodružný) a rov-

---

[15] *Osová afinita v rovině* je vzájemně jednoznačné zobrazení určené osou a dvojicí odpovídajících si nesamodružných bodů, přičemž každý bod na ose je samodružný. Všechny spojnice odpovídajících si bodů jsou navzájem rovnoběžné, obrazem přímky rovnoběžné s osou je přímka rovněž rovnoběžná s osou a dvě různé rovnoběžné přímky se zobrazí opět na dvě různé rovnoběžné přímky. Speciálním případem osové afinity v rovině je osová souměrnost. Více o afinitě viz [1] (str. 31–34) a [3] (str. 112–124).



Obrázek 3

noběžník $A'B'C'D'$ se zobrazí na čtverec $ABCD$ (dokonce existují takové afinity dvě), stačí nalézt obraz jednoho bodu neležícího na ose afinity.[16]

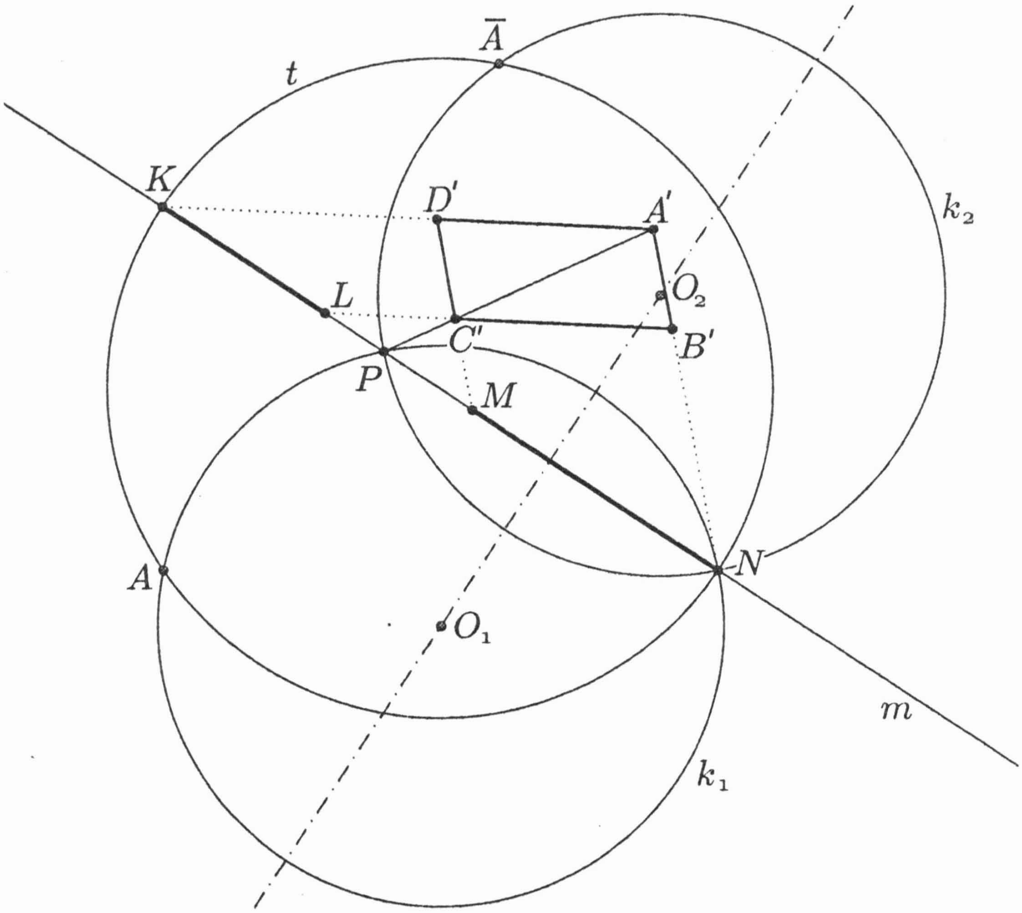
Najdeme například obraz bodu A', tedy bod A (obr. 4). Bod A je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou KN, leží tedy na Thaletově kružnici t nad úsečkou KN. Dále víme, že bod A je vrcholem úhlu o velikosti 45 (odchylka úhlopříčky a strany čtverce) nad úsečkou PN, leží tedy na příslušných obloucích kružnic k_1, k_2.[17]

Bod A určíme jako průsečík kružnice t s delším obloukem PN kružnice k_1 (resp. k_2). Z obrázku je patrno, že řešení jsou skutečně dvě (druhé řešení je označeno jako $\overline{A}$).

Osovou afinitu máme tedy zadanou osou m a párem odpovídajících si nesamodružných bodů A', A (resp. A', $\overline{A}$). Dorýsování čtverce $ABCD$ (resp. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$) splňujícího zadané podmínky je

[16]Přitom se musí přímka $KD'(\equiv KA')$ zobrazit na přímku $KD(\equiv KA)$, přímka $LC'(\equiv LB')$ na přímku $LC(\equiv LB)$, přímka $PC'(\equiv PA')$ na přímku $PC(\equiv PA)$ atd.

[17]Oblouky kružnic k_1, k_2 tvoří množinu bodů v rovině, ze kterých je úsečka PN „vidět" pod úhlem 45. Konstrukce této množiny bodů je podrobněji popsána například v učebnici [2] (str. 98).



Obrázek 4

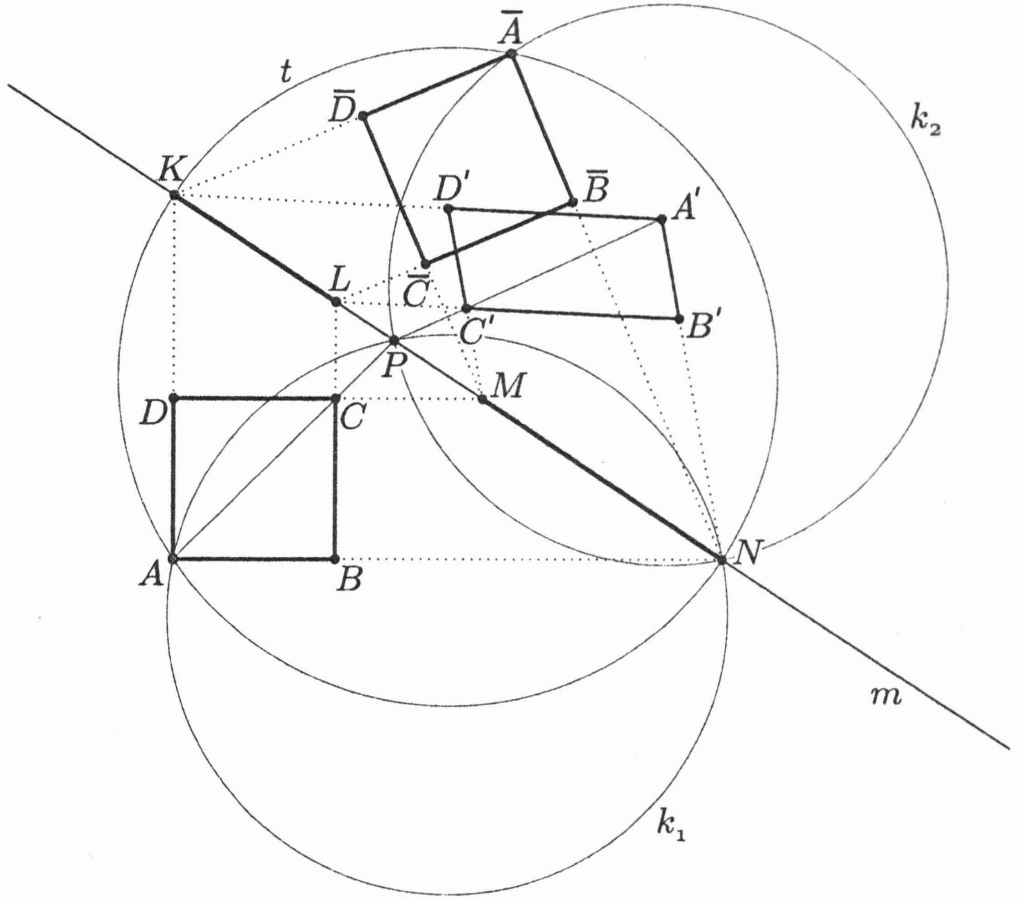
již snadné (obr. 5).

Na závěr uvedu ještě jedno zajímavé konstrukční řešení, ve kterém jsou některé myšlenky podobné jako u postupu popsaného výše, avšak namísto osové afinity použijeme posunutí v rovině.[18]

Nejprve posuneme úsečku MN po přímce m do polohy $M'N'$ tak, aby bod M' splynul s bodem L (obr. 6). Nyní sestrojíme čtverec $A'B'C'D'$ takový, že jeho prodloužené strany protnou přímku m v bodech K, L, M', N'. Vrchol C' splyne s bodem $L \equiv M'$.

Vrchol A' bude průsečíkem Thaletovy kružnice nad úsečkou KN' a oblouku, z něhož je úsečka KL (resp. $M'N'$) vidět pod

[18]Autorem tohoto elegantního řešení je doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., z Matematicko–fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

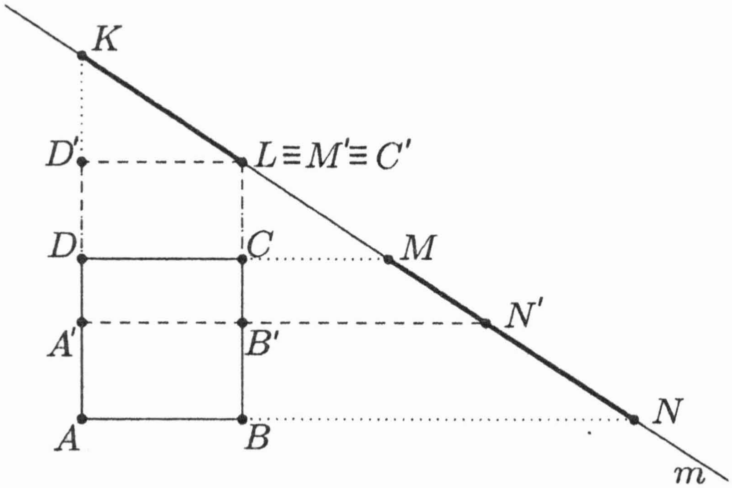


Obrázek 5

úhlem 45 (řešení jsou opět dvě). Sestrojený čtverec $A'B'C'D'$ je shodný s hledaným čtvercem $ABCD$, jehož sestrojení je již snadné.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 Prameny evropské matematiky a v rámci projektu Specifického vysokoškolského výzkumu 2011–261 315.



Obrázek 6

Literatura

[1] Pomykalová, E., *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, Prometheus, Praha, 2010.

[2] Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*, 4. vyd., Prometheus, Praha, 2001.

[3] Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, 2. vyd., SNTL, Praha, 1978.

Mgr. Vlasta Moravcová
Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: morava@karlin.mff.cuni.cz