Učitel matematiky

Emil Calda
Zlaté číslo a limity dvou posloupností

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 146–149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150364

ZLATÉ ČÍSLO A LIMITY DVOU POSLOUPNOSTÍ

Emil Calda

Připomeňme si nejprve, že rozdělit danou úsečku zlatým řezem znamená rozdělit ji na dvě části tak, aby poměr délky celé úsečky k délce její větší části byl stejný jako poměr délky této větší části k délce části menší. Je-li zlatým řezem rozdělena jednotková úsečka, jejíž větší část má délku x, platí proto:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

neboli

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Této rovnici – vzhledem k tomu, že x je kladné – vyhovuje pouze $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; odtud snadno vypočteme:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tento poměr $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$, který je roven číslu $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, se nazývá *zlaté číslo.*

Se zlatým číslem se nesetkáváme jen v geometrii. V následujících řádcích si ukážeme dvě posloupnosti, které k tomuto číslu konvergují.

Uvažujme posloupnost (F_n), jejíž první dva členy jsou $F_1 = F_2 = 1$ a jejíž každý další člen je roven součtu dvou předcházejících, tj. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n > 2$. Jak známo, nazývá se tato posloupnost Fibonacciho a pro její n-tý člen platí:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{5}}.$$

Pomocí tohoto vzorce dokážeme, že posloupnost s n-tým členem $\dfrac{\mathrm{F}_n + 1}{\mathrm{F}_n}$, tj. posloupnost

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$$

má za limitu zlaté číslo.

Označíme-li $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, máme podle uvedeného vzorce:

$$\lim \frac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n} = \lim \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a^{n+1} - b^{n+1}} = \lim \frac{a - b \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}.$$

Protože

$$\left|\frac{b}{a}\right| < 1, \text{ je } \lim \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = 0,$$

takže dostáváme

$$\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hledaná limita je tedy rovna zlatému číslu, což jsme chtěli dokázat.

Další posloupností, o jejíž limitu se budeme zajímat, je posloupnost (a_n):

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}, \dots$$

O této posloupnosti, která je zřejmě rostoucí, nejprve dokážeme, že je shora omezená. Za tím účelem využijeme rovnost, kterou získáme, když její n-tý člen, kde $n > 2$, umocníme na druhou:

$$a_n^2 = 1 + a_{n-1},$$

a protože $0 < a_{n-1} < a_n$, platí

$$(a_{n-1})^2 < 1 + a_{n-1},$$

neboli

$$(a_{n-1})^2 - a_{n-1} - 1 < 0.$$

Převedeme-li výraz na levé straně známým způsobem na součin, dostaneme

$$\left(a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a_{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0,$$

neboli

$$\left(a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a_{n-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0,$$

vzhledem k tomu, že výraz ve druhé závorce je pro všechna a_{n-1} kladný, dostáváme odtud, že pro všechna $n \geq 2$ platí

$$a_{n-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tento výsledek znamená, že rostoucí posloupnost (a_n) je shora omezená; ze známé věty o monotónních posloupnostech pak plyne, že má vlastní limitu.

Označíme-li $A = \lim a_n$ a vezmeme-li v úvahu, že je také $\lim a_{n-1} = A$ a $\lim a_n^2 = A^2$, dostaneme ze vztahu $a_n^2 - a_{n-1} - - 1 = 0$, že platí

$$A^2 - A - 1 = 0.$$

Z této rovnice s přihlédnutím k tomu, že $A > 0$, vypočteme:

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Limita dané posloupnosti je tedy zlaté číslo, což jsme měli dokázat.

Výsledky, které jsme získali, jsou nejen zajímavé, ale mohou být pro některé čtenáře i užitečné. Dostane-li totiž v nějaké televizní soutěži za úkol, aby jmenoval aspoň jednu posloupnost, jejíž limita je zlaté číslo, bude si vědět rady a pravděpodobnost, že vyhraje nemalou sumu se tím podstatně zvětší. Doufám, že na autora tohoto článku v případě výhry nezapomene.

Uveďme ještě, že se zlatým číslem se nesetkáváme jen v matematice. V astronomii je zlatým číslem nazýváno pořadové číslo roku v tak zvaném *Metonově cyklu*; Metonův cyklus je období devatenácti slunečních let, které obsahuje 235 úplných synodických oběhů Měsíce. Toto zlaté číslo nabývá hodnot $1, 2, 3, \dots, 18, 19$; slouží k určení data velikonoční neděle.

Nedávno jsem však zjistil, že zlatá čísla se vyskytují i v oblasti, kde bych to nečekal – u mobilních operátorů je zlatým číslem označována každá pěkná a dobře zapamatovatelná číselná kombinace. O zlaté číslo můžete požádat; je sice jasné, že váš mobil je nedostane zadarmo, ale na společenském žebříčku budete stát o pár stupínků výš než ti, jejichž mobil zlaté číslo nemá! Mám dojem, že brzy bude každý moci požádat o to, aby měl zlaté i své rodné číslo.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz