Milan Koman

O jedné sedminové a o dvou třináctinových rosetách

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 129–145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150362

O JEDNÉ SEDMINOVÉ A O DVOU TŘINÁCTINOVÝCH ROSETÁCH

Milan Koman

Se slovem roseta bývá nejčastěji spojována představa uměleckých okenních kružeb v gotických stavbách, z umně sestavených oblouků kružnic. V tom smyslu si asi těžko představíme, co může být sedminová nebo třináctinová roseta, či dokonce sedmina nebo třináctina některé takové gotické rosety. V našem případě nejde o nějakou část okenní gotické kružby. Jde o rosety, jejichž listy tvoří elipsy nebo hyperboly, které jsou vytvářeny pomocí periodických desetinných rozvojů zlomků $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$ a $\frac{2}{13}$.

Sedminová roseta

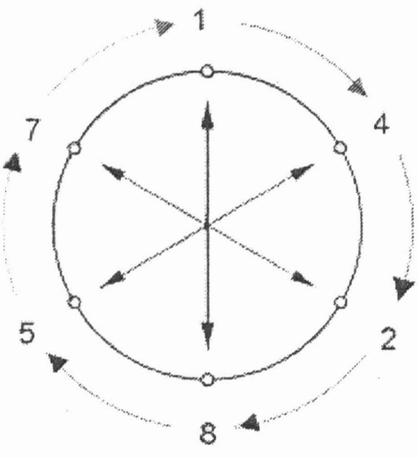
Začneme (podobně jako ve [2]) se zlomkem $\frac{1}{7}$, který zapíšeme pomocí nekonečného desetinného rozvoje

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\,142857\,142857\ldots$$

Tento rozvoj je periodický s šestimístnou periodou 142857. Z číslic této periody vytvoříme souřadnice šesti bodů v kartézské soustavě souřadnic. Vybereme libovolnou dvojici po sobě jdoucích číslic, např. první dvojici $(1,4)$, a dostaneme souřadnice prvního bodu A. Další body dostaneme ze souřadnic $(1,4)$ cyklickou záměnou číslic periody 142857:

$$\begin{aligned} &A = (1;4), B = (4;2), C = (2;8),\\ &D = (8;5), E = (5;7), F = (7;1) \end{aligned} \tag{1}$$

Cyklická záměna je patrná z obrázku 1. Nyní zobrazíme všech 6 bodů (1). Pomocí Cabri nebo pomocí GeoGebry sestrojíme kuželosečku, která prochází libovolnými pěti z těchto bodů. Dostaneme



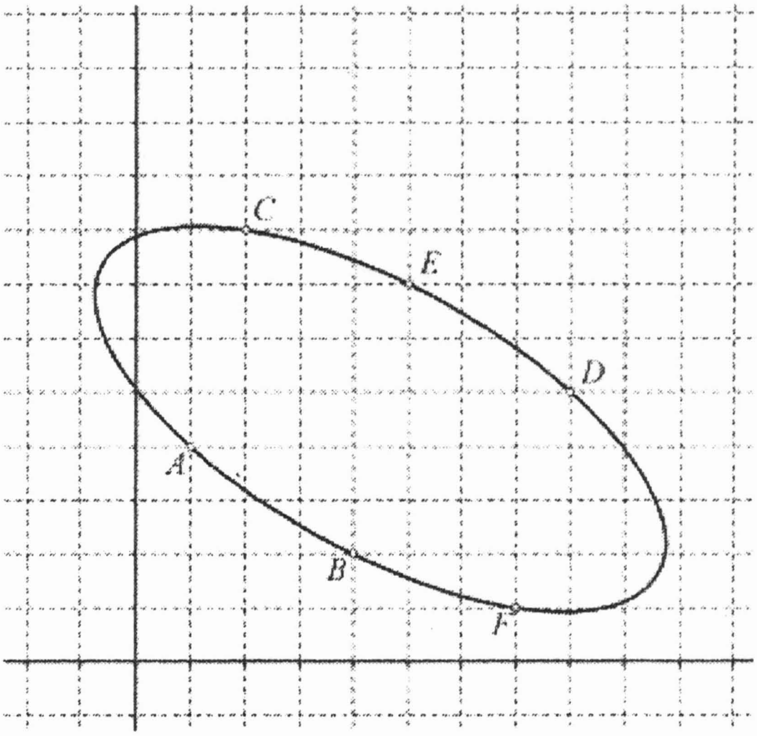
Obr. 1

elipsu, která prochází i zbývajícím šestým bodem – obr. 2. Tato elipsa tvoří první list slibované *sedminové rosety*. Můžeme odůvodnit, aniž bychom museli spoléhat jen na sestrojený obrázek, že všech šest bodů se souřadnicemi (1) leží skutečně na jedné elipse? Ano, máme dokonce dvě možnosti:

a) Všimneme si, že body (1) jsou vrcholy středově souměrného šestiúhelníku $ABCDEF$ (obr. 3). Jeho úhlopříčky určené dvojicemi bodů $A = (1; 4)$ a $D = (8; 5)$, $B = (4; 2)$ a $E = (5; 7)$, $C = (2; 8)$ a $F = (7; 1)$ mají totiž společný střed $S = (4{,}5; 4{,}5)$. A to díky tomu, že šestimístná perioda 142857 splňuje „součtové pravidlo"

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7, \tag{2}$$

které je dobře patrné též na obrázku 1 (viz dvojité šipky). Nyní sestrojíme elipsu z kterýchkoliv pěti bodů vybraných z šestice bodů (1). Na obrázku 3 jsme zvolili např. body A, B, C, E, F. Mezi nimi jsou vždy čtyři body, které jsou vrcholy rovnoběžníku. V našem případě je to rovnoběžník $BCEF$. Jeho úhlopříčky BE, CF se totiž půlí, což je důsledek součtového pravidla (2). Jejich společným průsečíkem je tedy bod $S = (4{,}5; 4{,}5)$, který je také středem sestrojené



Obr. 2

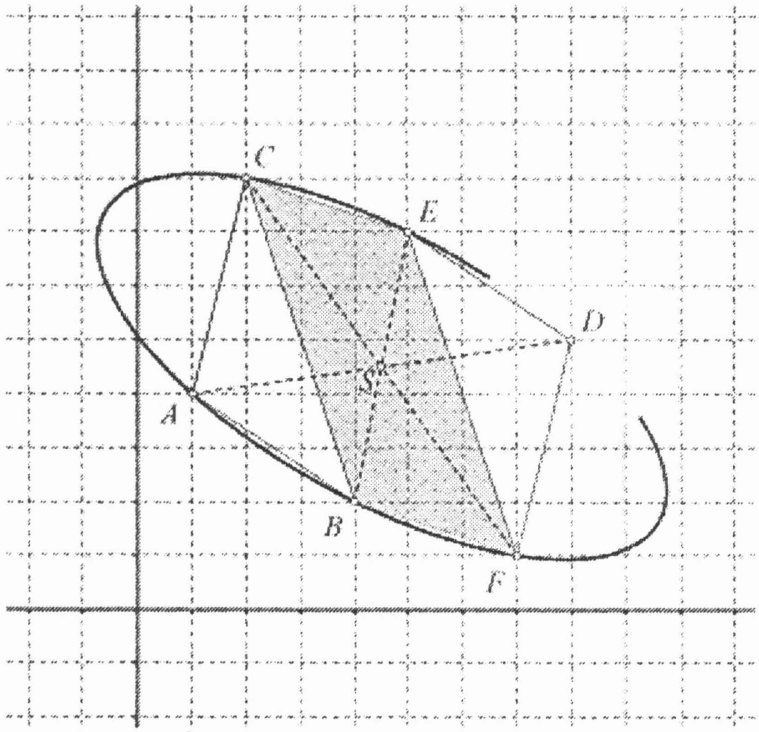
elipsy. Proto i zbývající šestý vrchol šestiúhelníku (v našem případě vrchol D), který jsme ke konstrukci elipsy nepoužili, leží vzhledem k součtovému pravidlu také na sestrojené elipse.

b) O tom, že všech šest bodů (1) leží na jedné elipse, se můžeme přesvědčit i početně. Tato elipsa má rovnici (viz též [1])

$$19x^2 + 36xy + 41y^2 - 333x - 531y + 1638 = 0. \qquad (3)$$

Dosazením souřadnic bodů (1) do této rovnice můžeme ověřit, že všechny tyto body leží na elipse (3). To je cesta, kterou mohou použít čtenáři, kteří nepracují s žádným interaktivním geometrickým počítačovým programem.

Nyní sestrojíme další listy zmíněné sedminové rosety. Postup je podobný jako s první elipsou. Z periody 142857 vybereme ji-



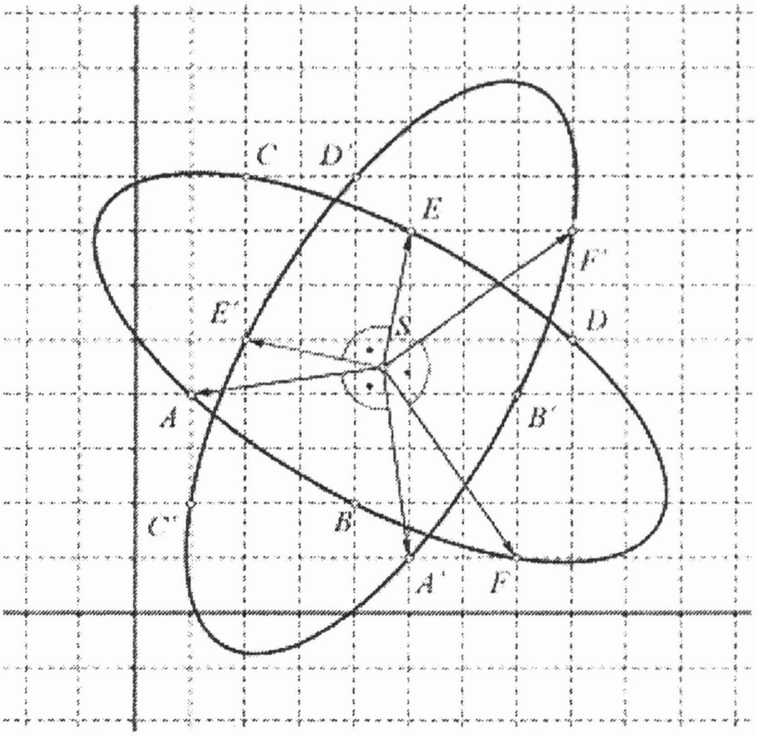
Obr. 3

nou dvojici cifer, tentokrát např. dvojici (5; 1)[1] a sestrojíme opět všechny dvojice z dvojice (5; 1) pomocí cyklické záměny. Jsou to dvojice číslic, které najdeme na kružnici z obrázku 1 vždy ob jednu číslici. V tomto případě dostaneme šest bodů

$$\begin{aligned} A' = (5;1), B' = (7;4), C' = (1;2), \\ D' = (4;8), E' = (2;5), F' = (8;7). \end{aligned} \tag{4}$$

Opět sestrojíme elipsu, která prochází libovolnými pěti z těchto bodů. Stejně, jako v prvním případě dokážeme, že tato elipsa prochází všemi šesti body z (4). Obě elipsy sestrojené z bodů (1) a (4) zobrazíme do jednoho obrázku (obr. 4). Elipsa procházející body (4) tvoří druhý list slíbené rosety. Zajímavé je to, že dru-

[1]Dvojice (5; 1) je vybrána tak, že v cyklu periody 142857 vybíráme čísla ob jedno. Mohli bychom vybrat i jinou dvojici ob jedno číslo, např. (1; 2), nebo (4; 8) nebo (2; 5) atd. Cyklickou záměnou bychom dostali stejné body, ale v jiném pořadí. Brzy však poznáme, proč jsme vybrali právě dvojici (5; 1)



Obr. 4

hou elipsu můžeme dostat z první elipsy otočením o 90° doleva kolem středu S. To proto, že šestiúhelník s vrcholy (4) dostaneme otočením šestiúhelníku s vrcholy (1) kolem středu S, také o 90°. Díky šikovné volbě dvojice $(5;1)$ – viz poznámka 1 pod čarou – zobrazují se při tomto otáčení nečárkované body na stejnojmenné čárkované body.

$$A \to A', B \to B', C \to C', D \to D', E \to E', F \to F'$$

Také zde se o tom můžeme přesvědčit, aniž bychom spoléhali na obrázek 4. Ukážeme, že dvojice vektorů $\boldsymbol{SA}$ a $\boldsymbol{SA}$, $\boldsymbol{SB}$ a $\boldsymbol{SB}$, atd. jsou na sebe kolmé. Je to vidět z jejich kartézského součinu: Např. pro první dvojici vektorů dostáváme

$$\boldsymbol{SA} \cdot \boldsymbol{SA} = (-3{,}5; -0{,}5) \cdot (0{,}5; -3{,}5) = 0.$$

Podobně to platí i pro další dvojice zmíněných vektorů.

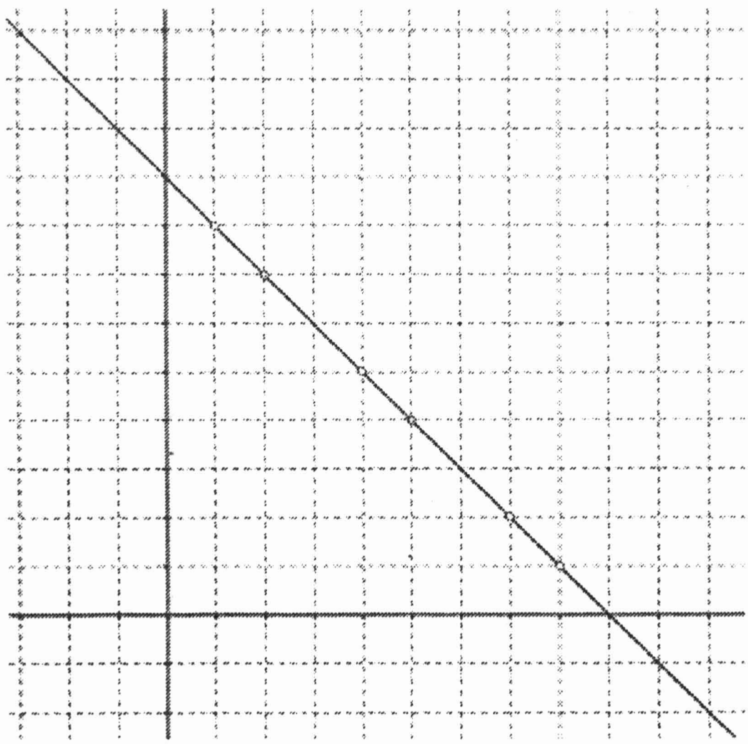
Trochu složitější by bylo ukázat, že otočením elipsy (3) kolem středu S o úhel $90°$ dostaneme elipsu

$$41x^2 - 36xy + 19y^2 - 207x - 9y + 180 = 0, \tag{5}$$

která právě prochází body (4). Druhý list sedminové rosety jsme dostali, když jsme v periodě 142857 jedné sedminy pracovali s dvojicemi číslic, vzatými v periodickém cyklu ob jednu číslici. Zkusme vzít dvojice číslic z cyklu 142857 vybrané vždy v cyklickém pořadí ob dvě číslice (sledujte na obrázku 1):

$$\begin{aligned} &A'' = (1;8), B'' = (4;5), C'' = (2;7),\\ &D'' = (8;1), E'' = (5;2), F'' = (7;2). \end{aligned} \tag{6}$$

Ale ouha. Tentokrát nedostaneme elipsu. Body (6) leží na přímce (obr. 5) Důvod je ten, že jejich souřadnice splňují součtové pravidlo (2). Nevadí. Zkusíme vzít dvojice cifer, které v cyklickém

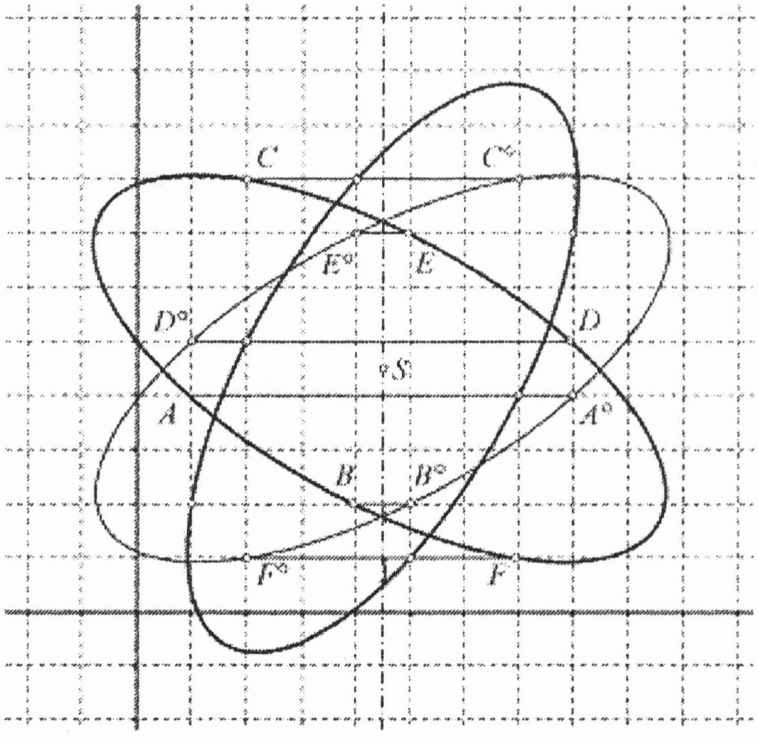


Obr. 5

pořadí číslic periody 142857 vybereme ob tři číslice (viz opět obrázek 1):

$$A^\circ = (8;4), B^\circ = (5;2), C^\circ = (7;8),$$
$$D^\circ = (1;5), E^\circ = (4;7), F^\circ = (2;1).$$

Těmito body prochází třetí elipsa sedminové rosety; na obrázku 6 jsou všechny tři dosud sestrojené listy této rosety. Přitom první a třetí elipsa jsou souměrné podle přímky, která prochází bodem S (tj. společným středem všech tří elips) kolmo k ose x. Ale osově souměrné jsou i druhá a třetí elipsa, tentokrát podle osy 1. kvadrantu. Zbývá sestrojit poslední list sedminové rosety. Postup je již



Obr. 6

nabíledni. Na kružnici na obrázku 1, kde jsou body označené po řadě číslicemi periody, přeskočíme 4 číslice. To je totéž, jako když postupujeme k sousední číslici ne doprava, ale doleva. Dostaneme body

$$A^* = (4;1), B^* = (2;4), C^* = (8;2),$$
$$D^* = (5;8), E^* = (7;5), F^* = (1;7). \qquad (7)$$

Po sestrojení této elipsy dostaneme čtvrtý a poslední list sedminové rosety – obrázek 7. Na obrázku 8 je pro lepší představu roseta znázorněna bez pomocných čar. Roseta má čtyři osy souměrnosti, které jsou zároveň osami souměrnosti jí opsaného čtverce. Dobře je to vidět na obrázku 9, kde je pro lepší názornost tato roseta ještě obarvena. Udělejme však ještě pokus, při kterém opsaný čtverec otočíme kolem jeho středu o 45°. Otočený čtverec vidíme na obrázku 10, který byl sestrojen v programu GeoGebra ve standardním nastavení, kde jsou číselné hodnoty zaokrouhlovány na dvě desetinná místa. Zdá se, že strany otočeného čtverce procházejí body, ve kterých se roseta dotýká opsaného čtverce. Bod P je průsečíkem dvou stran sestrojených čtverců a bod Q je průsečíkem strany otočeného čtverce s prvním listem rosety. Při standardním nastavení zjišťujeme, že oba body mají stejné souřadnice $(-0{,}75; 6{,}68)$. Ale změňme nastavení a zaokrouhlujme hodnoty na 5 desetinných míst. Pak dostaneme:

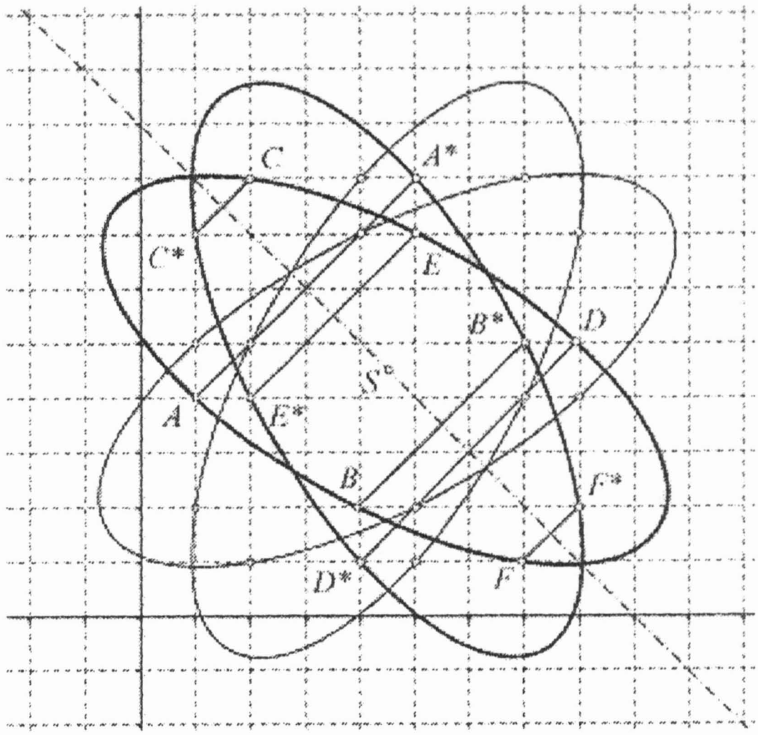
$$P = (-0{,}75106; 6{,}67506), \qquad Q = (-0{,}74576; 6{,}68036).$$

Body P, Q jsou tedy ve skutečnosti různé, i když dosti blízké. Jejich souřadnice se liší o méně než o 5 tisícin. Je to hezká ukázka, že na grafické řešení nemůžeme vždy spoléhat. Nicméně i pomocí grafického znázornění užitím GeoGebry můžeme zjistit, že jde o různé body. Stačí zvolit např. na obou osách jednotky, které jsou větší než 10 cm.

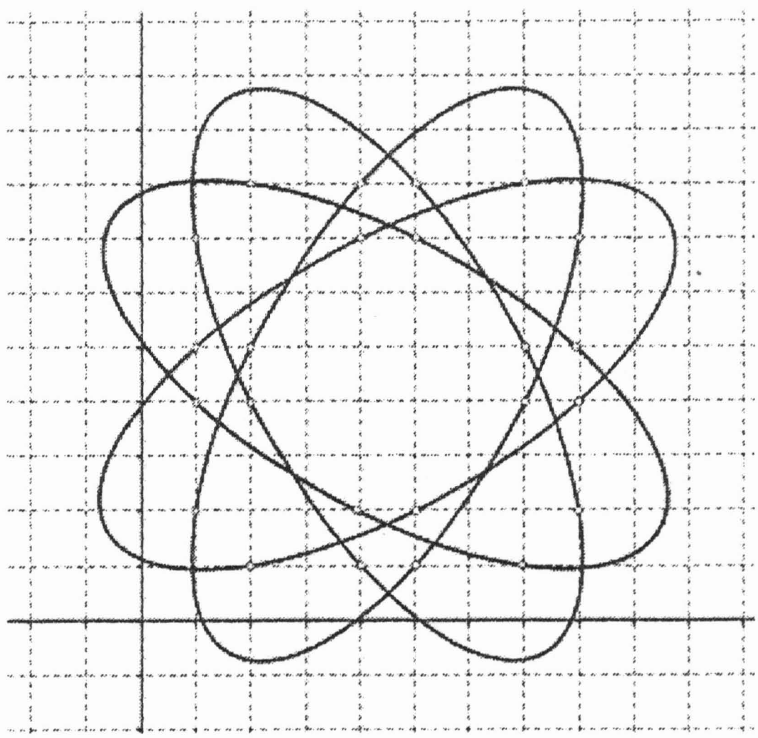
Na začátku jsme uvedli rovnice prvních dvou eliptických listů sedminové rosety, jsou to rovnice (3) a (5). Pro úplnost uvedeme ještě rovnice zbylých dvou eliptických listů této rosety:

$$19x^2 - 36xy + 41y^2 - 9x - 207y + 180 = 0, \qquad (8)$$
$$41x^2 + 36xy + 19y^2 - 531x - 333y + 1638 = 0. \qquad (9)$$

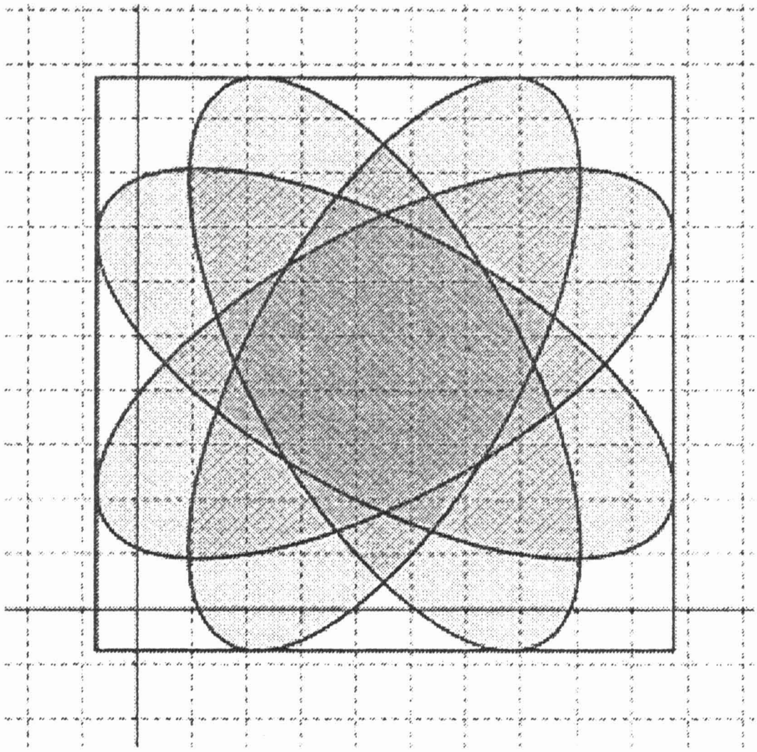
Všimněte si také, jaké jsou vztahy mezi koeficienty rovnice všech čtyř eliptických listů rozety z obrázku 8.



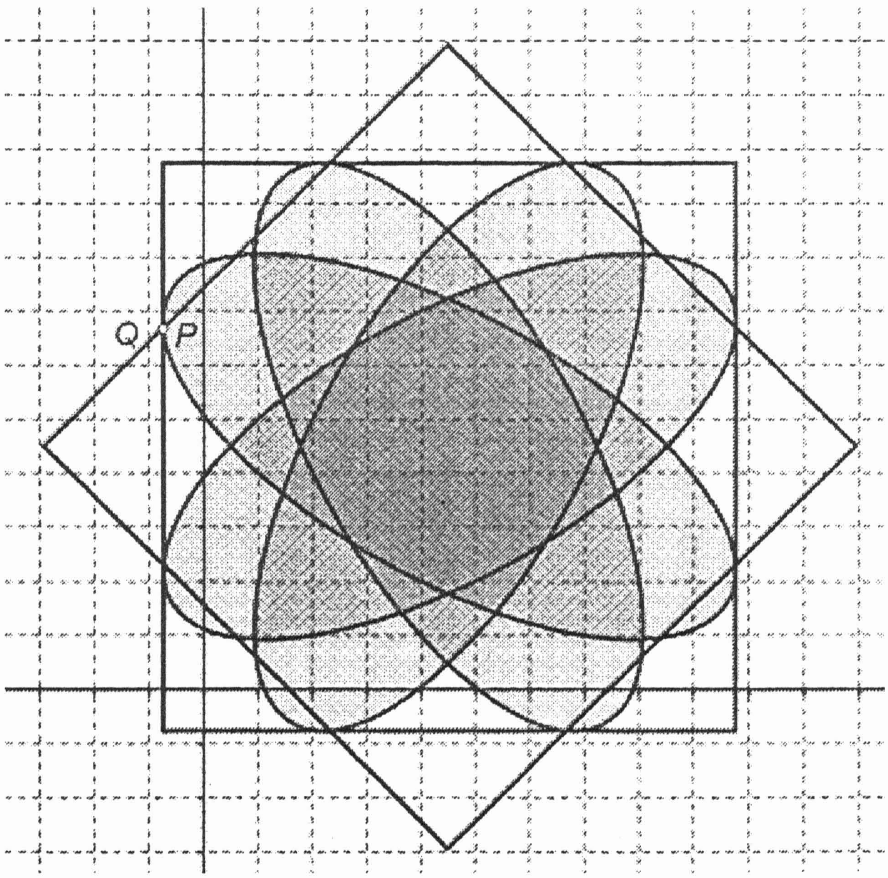
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9



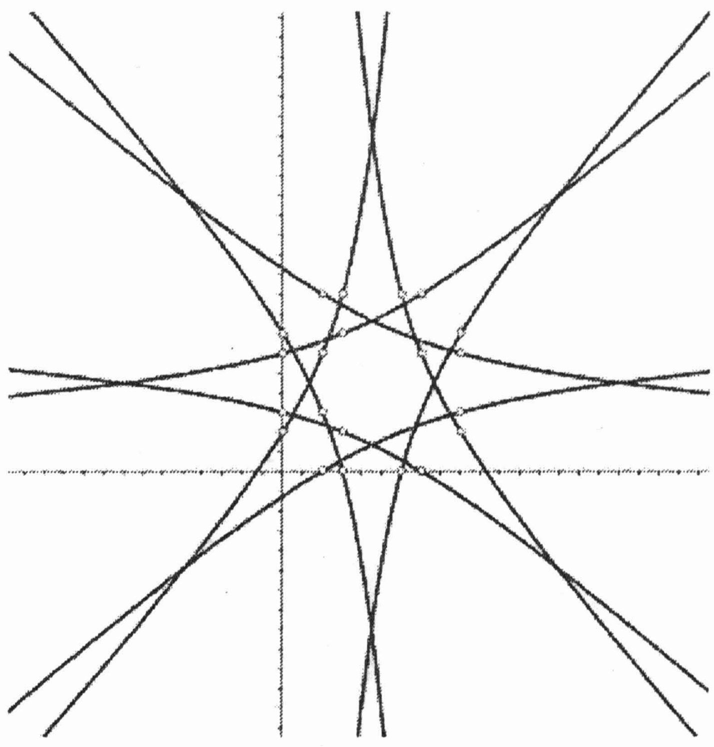
Obr. 10

Třináctinové rosety

První třináctinovou rosetu sestrojíme úplně stejně jako sedminovou rosetu, jen s tím rozdílem, že místo šestimístné periody desetinného rozvoje zlomku $\frac{1}{7}$ vyjdeme z šestimístné periody desetinného rozvoje zlomku $\frac{1}{13}$, tj.:

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\ 076923\ 076923\ldots$$

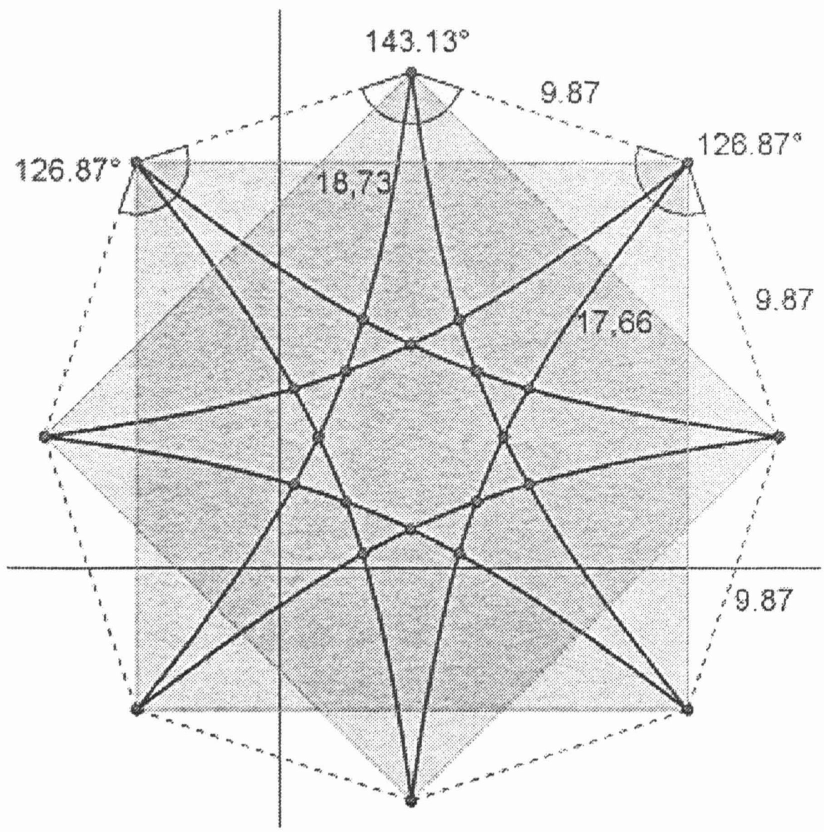
Protože je postup stejný jako u sedminové rosety, uvedeme rovnou výsledek (obr. 11). Třináctinová roseta je složena z hyperbol,



Obr. 11

a proto není na rozdíl od sedminové rosety neohraničená. První list této rosety prochází body, které vzniknou cyklickou záměnou z bodu $(0;7)$, druhý list prochází body vzniklými cyklickou záměnou z bodu $(0;6)$. Další dva listy procházejí body, které vzniknou cyklickou záměnou z bodů $(0;2)$ a $(0;3)$.

Zkrocováním jednotlivých větví hyperbolických větví této rosety můžeme získat tři různé ohraničené obrazce mající tvar osmicípých hvězdic. Největší z nich je na obrázku 12. Její vrcholy tvoří osmiúhelník, jehož strany jsou vyznačeny čárkovaně. Osmiúhelníku jsou vepsány dva šedivě vybarvené čtverce. Že jsou to opravdu čtverce, plyne z toho, že tato hyperbolická roseta (podobně jako sedminová roseta na obrázku 9) má čtyři osy souměrnosti procházející jejím středem. Z nichž dvě jsou kolmé k osám souřadnic a dvě s nimi svírají úhly 45°[2]. Na první pohled se zdá,



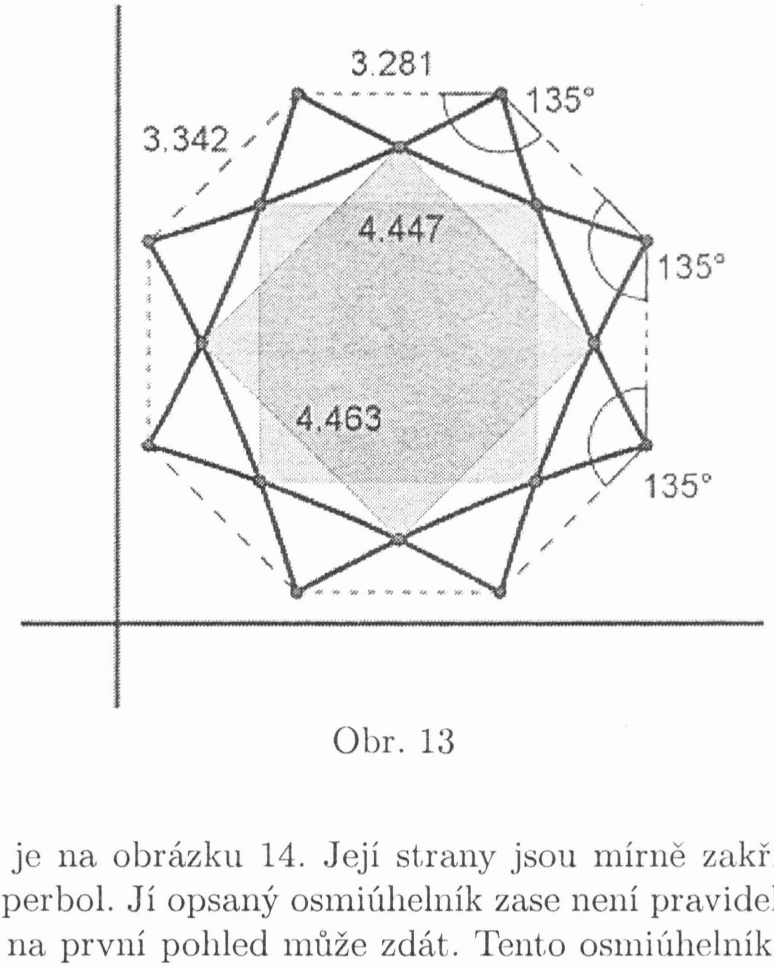
Obr. 12

že vyznačený osmiúhelník je pravidelný. Ale není tomu tak. Má sice všechny strany stejně dlouhé, ale nemá všechny vnitřní úhly shodné. Obojí lze vyčíst z obrázku 12. Proč není tento osmiúhelník

[2]Na obrázku 12 nejsou osy souměrnosti znázorněny, aby se obrázek dalšími přímkami již dále neznepřehledňoval

pravidelný, ukazují i různě dlouhé strany obou vepsaných čtverců.

Prostřední hvězdici vzniklou z obrázku 11 ukazuje obrázek 13. Také zde je vyznačen hvězdici opsaný osmiúhelník. Ani ten není pravidelný. Má sice shodné vnitřní úhly, ale nemá zase shodné strany. Také dva hvězdici vepsané čtverce nejsou shodné. Nejmenší

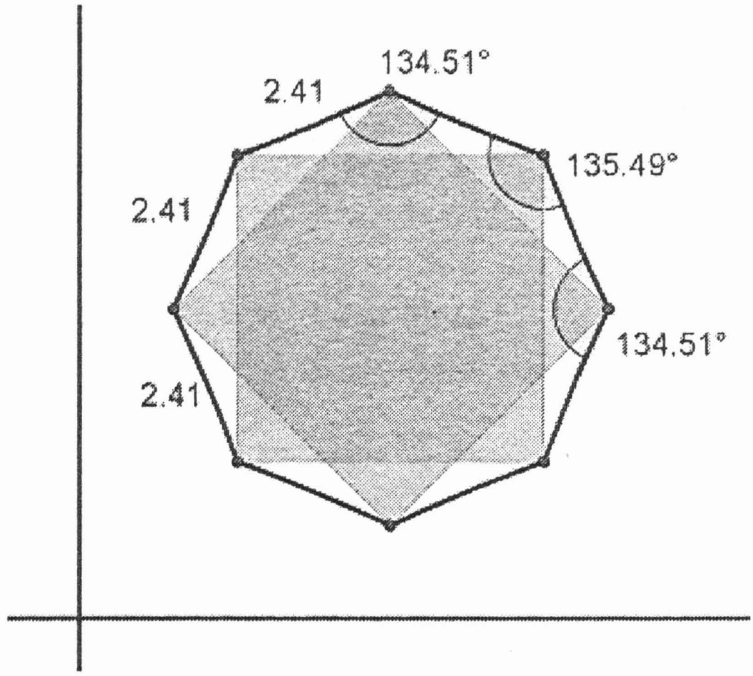


Obr. 13

hvězdice je na obrázku 14. Její strany jsou mírně zakřivené oblouky hyperbol. Jí opsaný osmiúhelník zase není pravidelný, ačkoliv se to na první pohled může zdát. Tento osmiúhelník má opět stejně dlouhé všechny strany, má však různě veliké vnitřní úhly. Šedě vyznačené čtyřúhelníky jsou i v tomto případě čtverce, ovšem opět s různě dlouhými stranami. Pro úplnost uvedeme ještě rovnice všech čtyř hyperbol, které tvoří rosetu určenou zlomkem $\frac{1}{13}$. Čtenáři, kteří pracují s programy GeoGebra nebo Cabri, je mohou získat přímo z obrázku rovnice těchto hyperbol:

$$141x^2 + 134xy + 9y^2 - 1872x - 684y + 4347 = 0$$

(prochází bodem $(0; 7)$)



Obr. 14

$$9x^2 - 134xy + 141y^2 + 522x - 666y - 1080 = 0$$

(prochází bodem $(0; 6)$)

$$141x^2 - 134xy + 9y^2 - 666x + 522y - 1080 = 0$$

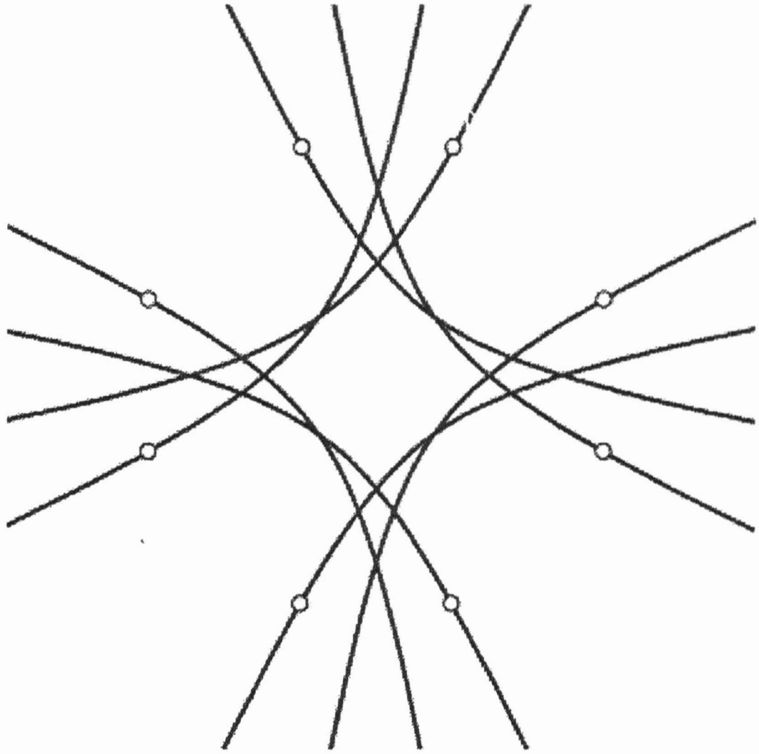
(prochází bodem $(0; 2)$)

$$9x^2 + 134xy + 141y2 - 684y - 1872x + 4347 = 0$$

(prochází bodem $(0; 3)$)

První třináctinová roseta, kterou jsme právě popsali, byla vytvořena pomocí šestimístné periody zlomku $\frac{1}{13}$. Druhou šestinovou rosetu sestrojíme pomocí šestimístné periody desetinného rozvoje zlomku $\frac{2}{13}$.

$$\frac{2}{13} = 0{,}\overline{153846}$$



Obr. 15

Postup je opět stejný jako při konstrukci první třináctinové rosety. Uvedeme proto jen její výsledný obraz (obr. 15). Také zde můžeme zkracováním jejích větví dostat tři různé velké hvězdice. Čtenář si je jistě sám dovede představit a porovnat s hvězdicemi vzniklými z první třináctinovér osety. Rozbor těchto hvězd je podobný jako rozbor obdobných hvězdic první hyperbolické rosety.

Několik slov na závěr

Problematika zlomkových roset ukazuje překvapivý vztah mezi aritmetikou a geometrií. Je také jedním z mnoha příkladů, které ukazují, že matematika je krásná. Ale není to jen samotný vztah mezi aritmetikou a geometrií. Krása je v tomto případě především v tom, jak se z malého podnětu vyvinula zajímavá matematická „miniteorie“. Jak se zrodila tato miniteorie? Autor nejdříve objevil zcela náhodou zmínku o sedminové elipse v internetové matematické encyklopedii WolframMathWorld. Zaujal ho název

One-Sevenths Ellipse, který našel v seznamu hesel věnovaných geometrii ([1], „One-Seventh Ellipse.“) Byl to název, se kterým se dosud nikdy nesetkal, a o kterém si navíc nedovedl představit, co se pod ním skrývá. Proto zvědavě nalistoval toto heslo, aby zjistil, jak z číslic periody zlomku $\frac{1}{7}$ lze sestrojit elipsu. Je to příklad toho, jak šikovně formulované heslo, či zmínka může motivovat jedince a nastartovat jeho činnost ke zkoumání a objevování dosud jemu neznámých zákoutí matematiky, zde geometrie. V encyklopedii byla uvedena jako „důkaz“, že sestrojenými body (viz (1)) prochází jediná elipsa, rovnice této elipsy (viz (3)). To podnítilo zvědavost autora a položil si první otázku, zda to nedokázat ryze geometricky. Jednoduchým klíčem k řešení byl objev, že body (1) jsou vrcholy středově souměrného šestiúhelníku. Začaly se „hrnout“ další otázky. První byla: Je zlomek $\frac{1}{7}$ jediným zlomkem této vlastnosti? Brzy byl nalezen další zlomek s touto vlastností, a to zlomek $\frac{1}{13}$ ([2]). Další otázka byla, kolik takových zlomků vůbec existuje, jak je poznáme, a ke kterým kuželosečkám vedou. Jinými slovy, kolik existuje zlomkových kuželoseček. Výsledkem poměrně obsáhlého zkoumání bylo zjištění: všech zlomkových kuželoseček je celkem 780, mezi nimi jsou 393 elipsy, 327 hyperbol a 60 kuželoseček složených ze dvou rovnoběžných nebo různoběžných přímek ([3]). Jinou otázkou bylo, zda musí být šestice bodů, kterými prochází jediná kuželosečka, složena vždy ze dvojic po sobě jdoucích čísel vhodné šesticiferné periody nalezených zlomků. Ukázalo se, že nikoliv. Tak se došlo ke zlomkovým rosetám, kterým byly věnovány příspěvky ([4], [5] a tento příspěvek). K dalším otázkám například, zda lze studovat zlomkové kuželosečky i v trojrozměrném prostoru se ještě později vrátíme (viz [6]).

Literatura

[1] HALL, JAY, One-Seventh Ellipse, From *MathWorld* – A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. `http://mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html`

[2] KOMAN, M., O sedminové elipse a třináctinové hyperbole

I a II, *Matematika-fyzika-informatika* **17**(2007), no 2, 3, s. 71–73, 140–144. ISSN 1210–1751.

[3] KOMAN, M., *Kolik existuje zlomkových kuželoseček?*, (nepublikováno) 2009

[4] KOMAN, M., Variationen auf die Ein-Siebtel-Ellipse., *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **63**(2010), No. 4, S. 200–202, ISSN 0025–5866

[5] KOMAN, M., Variationen der Ein-Dreizehntel-Hyperbel., *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **63**(2010), No. 7. S. 404–406, ISSN 0025–5866

[6] KOMAN, M., *Zlomkové kuželosečky v prostoru*, (nepublikováno)

Prof. RNDr. Milan Koman, CSc.
KMDM PedF UK
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
e-mail: milan.koman@pedf.cuni.cz