František Kuřina

O vyjadřování v matematice

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 2, 98–98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150357

O VYJADŘOVÁNÍ V MATEMATICE

FRANTIŠEK KUŘINA

Podnětem k napsání tohoto příspěvku byl článek Vlastimila Dlaba *Důkladné porozumění pojmu ekvivalence* (viz [1]). V úvodu tohoto článku autor píše:
Co v matematice znamená, že jsou dvě tvrzení ekvivalentní? Zdá se to být velmi jednoduché: první tvrzení plyne (logickými kroky) z druhého a druhé z prvního. Přesto však mají mnozí studenti s touto „dvojstrannou implikací“ potíže. Jednou z příčin může být to, že dvě tvrzení, z nichž první je očividně obecnější než druhé, mohou být ekvivalentní ([1], str. 9).

V matematice se, jak známo, zavádějí pojmy definicemi. Bylo by však naivní domnívat se, že vyslovením definice budou studenti přesně ve smyslu v definici uvedeném pojem chápat, a to především tehdy, jsou-li zaváděné termíny složkou studentova jazyka. Velmi výrazně to vyjádřil polský filozof Leszek Kolakowski: *Náš jazyk, i kdybychom ho kdovíjak ždímali a natahovali, se nedokáže odtrhnout od svých kořenů, spočívajících ve vnímání, představivosti a logice, které nám vnucuje svět* ([2], str. 16).

Konečně ani v některých matematických publikacích nepředpokládají autoři, že vyslovením definice zavedli pojem v jeho „komplexnosti“. Doložme toto tvrzení příkladem. V klasické Kořínkově učebnici algebry [3] se definuje vektor jako uspořádaná n-tice, aniž by se mluvilo o operacích s vektory, ve středoškolské učebnici trigonometrie [4] se definuje, opět bez zavádění algebraických operací, komplexní číslo jako uspořádané dvojice čísel reálných. Podle těchto definic je vektor a komplexní číslo totéž. Vektor by patrně měl být zaveden jako prvek vektorového prostoru, podobně pak i komplexní číslo. Zmíněný přístup k zavádění pojmů není ovšem nesprávný, ba dokonce z hlediska přirozeného přístupu k budování teorie je přijatelný. Čteme-li dál, vše se vyjasní.

Vraťme se k pojmu ekvivalence.

V české literatuře se pojem ekvivalence a slov od něho odvozených užívá minimálně ve čtyřech významech.

a) Ekvivalence je logická spojka výrokové logiky vyjádřená slovy *tehdy a jen tehdy* nebo *právě když*, pro niž se obvykle užívá symbol $\Longleftrightarrow$.
Příklad: Číslo je dělitelné devíti, právě když je dělitelný devíti jeho ciferný součet.

b) Ekvivalence je libovolná binární relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Příklady: Relacemi ekvivalence jsou např. relace rovnosti reálných čísel, podobnosti trojúhelníků, rovnoběžnosti přímek, kongruence celých čísel modulo p.

Relace ekvivalence jsou základem tvoření pojmů v lidském poznávání světa. Např. výroková forma *osoba X se narodila ve stejném roce jako osoba Y* vede k relaci ekvivalence, která rozkládá množinu všech osob na třídy „ročníků". Výroková forma *osoba X se narodila ve stejném místě jako osoba Y* vede k relaci ekvivalence, která rozkládá množinu všech osob na třídy „rodáků". Třídy relace podobnosti trojúhelníků jsou tvary, třídy relace rovnoběžnosti přímek jsou směry, třídy relace kongruentnosti jsou zbytkové třídy modulo p.

c) Ekvivalence vět v deduktivním systému. Věta P je ekvivalentní s větou Q, jestliže v soustavě důsledků axiomů A s tvrzením P lze odvodit tvrzení Q a obráceně v soustavě důsledků axiomů A s tvrzením Q lze odvodit tvrzení P.

Tak např. je známo, že v soustavě důsledků axiomů eukleidovské geometrie je tzv. pátý Eukleidův postulát ekvivalentní s tvrzením *Každým bodem roviny lze vést k dané přímce jedinou přímku rovnoběžnou*, nebo *Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je* 180° nebo *Pythagorova věta.*

Modifikací tohoto typu ekvivalence jsou příklady z Dlabova článku.

d) Ekvivalence významů neboli synonymita se uplatňuje při různých vyjádřeních téže skutečnosti.

Příklady. Termín *planimetrie* je ekvivalentní s termínem *rovinná geometrie.* Český termín *miliarda* je ekvivalentní americkému termínu *billion.* Tvrzení *Rovnice má právě dva kořeny* je ekvivalentní tvrzení *Existují právě dvě čísla, která vyhovují rovnici.*

V bodě c) jsme hodnotili ekvivalenci z hlediska platnosti tvrzení, v bodě d) z hlediska jejich významu.

Pythagorova věta a věta kosinová jsou ekvivalentní z hlediska platnosti (jak je ukázáno v Dlabově článku), nejsou však ekvivalentní z hlediska významu. Pythagorova věta má význam pouze pro pravoúhlé trojúhelníky, kosinová věta má význam „obecný".

Vraťme se ještě k několika drobnostem z článku [1]. Pythagorova věta je formulována jako věta „s omezeným kvantifikátorem" navíc v článku zamlčeném. Takovýto přístup je přirozený a pokládám ho za správný. Nicméně je přece jen poněkud zastřena „logická stránka věci", není patrně zcela jasné, co budeme rozumět větou obrácenou k větě Pythagorově. Z tohoto hlediska by snad byly vhodnější formulace tohoto typu:
Pro libovolný trojúhelník ABC se stranami $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ *platí: jestliže je úhel BCA pravý, pak* $c^2 = a^2 + b^2$.
Pro libovolný trojúhelník ABC se stranami $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ *platí: jestliže* $c^2 = a^2 + b^2$, *pak je úhel BCA pravý.*

Připomeňme známý důkaz věty obrácené k větě Pythagorově, za předpokladu, že věta Pythagorova je již dokázána.

V trojúhelníku ABC platí v označení výše uvedeném $c^2 = a^2 + b^2$. Sestrojme pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ s odvěsnami $|B'C'| = a$, $|C'A'| = b$. Aplikujeme-li na tento trojúhelník Pythagorovu větu, dostaneme pro stranu $|A'C'| = c$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou tedy podle věty *sss* shodné a protože je trojúhelník $A'B'C'$ pravoúhlý, je pravoúhlý i trojúhelník ABC.

Věta Pythagorova a věta k ní obrácená jsou ekvivalentní z hlediska platnosti, nejsou však ekvivalentní z hlediska významu. První můžeme použít k výpočtu délky přepony, druhou k rozhodnutí, zda je trojúhelník pravoúhlý.

V článku [1] je kosinová věta uvedena jako věta pro obecný trojúhelník. Který trojúhelník je obecný? Patrně není obecný např. trojúhelník rovnostranný nebo pravoúhlý. Ale pro ty přece kosinová věta také platí. Snad je výhodnější užít formulaci „v libovolném trojúhelníku“ místo „v obecném trojúhelníku“.

Zjištění, že věta kosinová a Pythagorova jsou ekvivalentní tedy není překvapivé, jak píše Vlastimil Dlab. Důkladné porozumění však znamená podle mého názoru rozlišení typů ekvivalence tvrzení.

Literatura

[1] Dlab, V., Důkladné porozumění pojmu ekvivalence, *Učitel matematiky* **77**(2010), 9-13.

[2] Koľakowski, L., *Metafyzická horor*, MF, Praha, 1999.

[3] Kořínek, V., *Základy algebry*, ČSAV Praha, 1956.

[4] Mastný, E., Šimek, J., Uhlík, P., *Trigonometrie pro desátý a jedenáctý posupný ročník*, Praha, 1954.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulty Univerzity Hradec Králové
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové 3
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz