Pavel Leischner

Silvestrovské rozjímání o ekvivalenci geometrických vět

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 2, 89–94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150356

SILVESTROVSKÉ ROZJÍMÁNÍ O EKVIVALENCI GEOMETRICKÝCH VĚT

PAVEL LEISCHNER

Neuzavíral jsem se nikdy poznatkům věd.
Zbývalo málo, co bych mohl nevědět.
Teprve dneska vím, že nevím vůbec nic,
i když jsem bádal dvaasedmdesát let.
Omar Chajjám

Třebaže jsem spíše učil než bádal, a to jen málo přes polovinu doby uváděné Omarem Chajjámem, začínám podléhat skepsi, stejně jako on ve svém čtyřverší. Kromě situace v našem školství k tomu přispívá i posuzování ekvivalence vět z elementární geometrie. Školská syntetická geometrie nemá axiomatickou výstavbu, vychází z názorných představ. Tak se může stát, že do důkazu ekvivalence dvou vět nevědomky zařadím tvrzení, které neplyne z počátečních předpokladů a nepříznivě ovlivní výsledek. Jen malou útěchou mi je, že se to občas přihodí i mistrům, jak plyne z následující příhody.

V den před Silvestrem 2010 jsem našel v dopisní schránce nové číslo Učitele matematiky. Zaujal mne článek [3], který však zcela zatemnil mé dosavadní představy o vztazích mezi Pythagorovou a kosinovou větou. Abychom si ujasnili podstatu věci, uvedeme nejprve formulaci vět. Přitom budeme užívat běžné označování délek stran a velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, konkrétně $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle BCA| = \gamma$.

Věta V1 (Pythagorova věta). Pro každý trojúhelník ABC platí: Je-li $\gamma = 90°$, pak $c^2 = a^2 + b^2$.

Věta V2 (pythagorejská ekvivalence). Pro každý trojúhelník ABC platí: $\gamma = 90°$, právě když $c^2 = a^2 + b^2$.

Věta V3 (kosinová věta). Pro každý trojúhelník ABC platí:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{1}$$

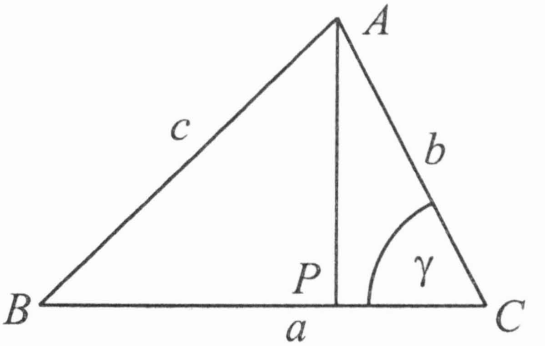
Dosud jsem byl přesvědčen, že věta **V3** je ekvivalentní s pythagorejskou ekvivalencí **V2**. Třebaže je tvrzení **V3** obecnější, vypovídají obě věty o vztazích $c^2 = a^2 + b^2$ a $\gamma = 90°$ totéž. Pro libovolný trojúhelník ABC totiž souhlasně rozhodnou, buď že oba vztahy současně platí, nebo že současně neplatí.

Vlastimil Dlab v článku [3] větu **V2** nezmínil. Dokazoval ekvivalenci vět **V1** a **V3**. Jsou-li opravdu ekvivalentní, pak jsou zřejmě ekvivalentní také věty **V1** a **V2**. To ale není možné, jak vidíme z níže uvedené pravdivostní tabulky. Tento paradox jsem si zprvu nedokázal vysvětlit. Nenacházel jsem chybu ani ve svých, ani v Dlabových úvahách, které byly jednoduché, jasné a výstižné.

A: $\gamma = 90°$	B: $c^2 = a^2 + b^2$	V1: A $\Longrightarrow$ B	V2: A $\Longleftrightarrow$ B	V3: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Naštěstí jsem nakonec záhadu odhalil. V klasickém důkazu kosinové věty, jenž budí dojem, že využívá pouze Pythagorovu větu **V1**, se skrývá ještě jedno tvrzení. Věta **V3** proto není důsledkem pouze věty **V1**.

Připomeňme si ono standardní, vesměs známé odvození, které použil i Vlastimil Dlab: Na obr. 1 je znázorněn trojúhelník ABC, jenž má $\gamma < 90°$. Pata jeho výšky z vrcholu A je označena P.



Obr. 1: Ilustrace k důkazu kosinové věty

Z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky APC a ABP plyne $b^2 - |CP|^2 = c^2 - |BP|^2$. Odtud dostaneme po substituci $|CP| = b\cos\gamma$, $|BP| = a - b\cos\gamma$ a úpravě vztah (1). Pokud je $\gamma \geq 90°$, provedeme důkaz analogicky.

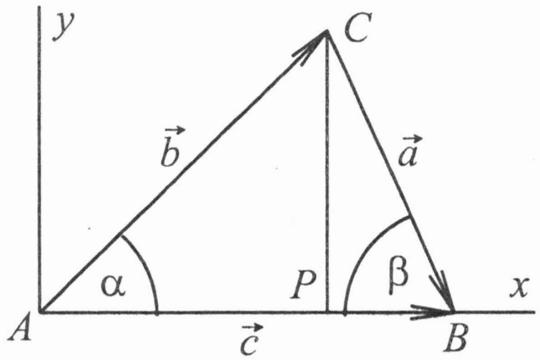
Tyto úvahy vyvolávají dojem, že je věta **V3** přímým důsledkem Pythagorovy věty. Odvození opravdu z této věty vycházelo a zdá se, že dále byly využity jen ekvivalentní úpravy a sčítání úseček. Ve skutečnosti však vztah $|BP| = a - b\cos\gamma$ není jen nevinným sčítáním úseček. Je to důsledek **věty o průmětech**, která je ekvivalentní s kosinovou větou. Věta o průmětech se v naší školské literatuře občas uvádí. Ze starších publikací ji nalezneme například v [4], str. 430, z nejnovějších pak [4], str. 58. Její význam je nedoceňován.

Věta V4 (Věta o průmětech). V každém trojúhelníku ABC platí:

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta. \tag{1}$$

Větu lze pokládat za důsledek pravidla pro sčítání vektorů. Při označení a volbě kartézské soustavy souřadnic $\{A, x, y\}$ podle obr. 2 platí $\vec{b} = (b\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $\vec{a} = (a\cos\beta, -a\sin\beta)$, a $\vec{c} =$ $= (c, 0)$. Rozepsáním rovnosti $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ získáme vztah (1) a sinovou větu ve tvaru $b\sin\alpha = a\sin\beta$.
Ukážeme ještě, že opravdu platí **V4** $\Longleftrightarrow$ **V3**.

Platí-li **V4**, pak vynásobením obou stran rovnosti (1) délkou c



Obr. 2: Součet vektorů a věta o průmětech

dostaneme

$$c^2 = cb\cos\alpha + ca\cos\beta.$$

Sečtením tohoto vztahu s rovnostmi

$$-a^2 = -ac\cos\beta - ab\cos\gamma$$

a

$$-b^2 = -ba\cos\gamma - bc\cos\alpha,$$

které z něj vznikly po vynásobení číslem -1 a opakované cyklické záměně, obdržíme vztah

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos\gamma$$

a z něj větu **V3**.

Platí-li **V3**, dostaneme z rovnosti (1) po cyklických záměnách vztahy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

a

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta.$$

Jejich součtem obdržíme

$$0 = 2c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ca\cos\beta$$

a odtud po malé úpravě (1).

V článku [3] byla ještě dokázána věta o stranách a úhlopříčkách rovnoběžníku:

Věta V5 (věta o rovnoběžníku). Pro každý rovnoběžník $ABCD$ s délkami stran $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |DA|$ a úhlopříček $e = |AC|$, $f = |BD|$ platí

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2). \tag{2}$$

Jak lze snadno ověřit, platí

$$\mathbf{V2} \iff \mathbf{V3} \iff \mathbf{V4} \iff \mathbf{V5}.$$

Povšimněme si, že věty úzce souvisí se součtem, rep. rozdílem vektorů. Již jsme ukázali, že tvrzení **V4** je při označení podle obr. 2 reprezentací vztahu $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.

Skalární umocnění posledního vztahu vede k větě **V3**.

Pro rovnoběžník $ABCD$ můžeme položit $\vec{a} = B - A = C - D$, $\vec{b} = C - B = D - A$, $\vec{e} = C - A$, $\vec{f} = D - B$. Větu **V5** pak dostaneme ze vztahů $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$ po jejich skalárním umocnění a následujícím sečtení.

Co říci na závěr? Vše podstatné o ekvivalenci geometrických vět uvedl Vlastimil Dlab v příspěvku [3]. Jen je tam zapotřebí nahradit Pythagorovu větu pythagorejskou ekvivalencí. Snad bych doplnil, že bychom měli více dbát na důsledné rozlišování Pythagorovy věty, jejího obrácení ($c^2 = a^2 + b^2 \implies \gamma = 90°$) a pythagorejské ekvivalence.

Děkuji profesoru Dlabovi za pěkné a inspirující články v Učiteli matematiky. Přeji mu hodně úspěchů při psaní dalších. Pro čtenáře přidávám úlohu.

Úloha. Rozhodněte, které z následujících vět jsou ekvivalentní.

1. V každém trojúhelníku ABC platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\alpha = \beta = \gamma$.

3. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\alpha = \beta = 60°$.

4. Je-li v trojúhelníku ABC $\alpha = \beta = \gamma$, pak $a = b = c$.

5. Je-li v trojúhelníku ABC $\alpha = \beta = 60°$, pak $a = b = c$.

6. Je-li v trojúhelníku ABC $a = b = c$, pak $\alpha = \beta = \gamma$.

Literatura

[1] Bečvář, J.: Omar Chajjám matematik, astronom, filozof a básník. *Učitel matematiky*, **22**(2997), 120-127.

[2] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie*. Pedagogická fakulta UK v Praze, Praha, 2009.

[3] Dlab, V.: Důkladné porozumění pojmu ekvivalence. *Učitel matematiky*, **77**(2010), 9-13.

[4] Hruša, K. a kol.: *Přehled elementární matematiky*. SNTL, Praha, 1994

RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích
katedra matematiky
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
e-mail: leischne@pf.jcu.cz