

Učitel matematiky

Judita Piknerová

Matematika a hudba (3): Matematický přístup k hudebnímu dílu

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 150–156

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150349>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2011

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MATEMATIKA A HUDBA (3)

MATEMATICKÝ PŘÍSTUP K HUDEBNÍMU DÍLU

JUDITA PIKNEROVÁ

Čistě matematický přístup lze nahlížet jako snahu o vypreparování té složky hudební teorie, kterou lze nejen úspěšně propracovat, ale zejména jasně a svědomitě uchopit. Matematickým zprůhledněním se následně ukáže jasně i oblast pro („méně objektivní“) estetizující, hodnotící pozorování hudby.

Matematických prvků je v hudbě mnoho. Bez základních početních schopností bychom zřejmě nepochopili ani to, jakou funkci má v hudebním díle rytmus. Interpretace jakéhokoli díla vyžaduje schopnost přesně vnímat časové vztahy a poměry, jež mohou být sice velmi složité, které však lze postihnout elementárním matematickým myšlením:

- a) Až na výjimky je každá skladba rozdělena do krátkých časových úseků, ve kterých se střídají přízvučné a nepřízvučné stejně dlouhé doby, např. $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{5}{16}$, ... Takt je tedy vyjádřen zlomkem, kde jmenovatel říká, v jakých hodnotách se počítá a čítec sděluje, z kolika takových hodnot se tento takt skládá.
- b) Každý takt je naplněn notami (označení tónů i zvuků), které mohou nabývat nerůznějších délek.
- c) U vícehlasého nástroje či skupiny nástrojů dochází velmi často ke komplikacím rytmů až k polyrytmům (více rytmických pásem znějících současně).

Chceme-li pochopit základní hudební struktury, možnosti jejich opakování, transformace, zasazení do architektury díla a jejich vzájemné ovlivňování, musíme postoupit na vyšší úroveň matematického myšlení.

logikou a je založena na číslech. Hudba bývá často charakterizována jako nejčistší forma matematiky (a stojí za povšimnutí, že mnoho velkých matematiků pěstuje hudbu jako svého hlavního koníčka a naopak). Úkoly, které zaměstnávají hudebníky, se zásadně liší od úkolů, jimiž se zabývá matematik. Ten nepotřebuje svůj úkol zhmotnit v žádném médiu ani jeho prostřednictvím něco sdělovat. Matematik se může zabývat analýzou hudby a využívat při tom svého hudebního nadání, avšak z jeho hlediska je hudba jen uspořádaným souborem prvků určitého typu. Hudebník naopak vyžaduje, aby byla struktura vytvořena ze zvuků, jejichž konečné uspořádání není výsledkem formálních úvah, ale vzniká díky jejich expresivní síle a působivosti.

Struktura hudebního díla

V hudbě západního typu je dnes využívána především temperovaná soustava půltónová. Jedná se o řadu tónů $C_2, Cis_2 (Des_2), D_2, Dis_2 (Es_2), E_2, F_2, Fis_2 (Ges_2), G_2, Gis_2 (As_2), A_2, Ais_2 (B_2), H_2, C_1, \dots, c, \dots, c^1, \dots, c^2, \dots, c^3, \dots, c^4, \dots, c^5$. Tato soustava je vlastně pomocí výšek tónů uspořádanou množinou. Tóny jsou prvky této množiny; strukturování je pak dáno tím, že mezi výškami tónů jsou různé vzdálenosti (jsou mezi nimi intervaly). Každý tón tónové soustavy je vzdálen od sousedního tónu intervalem půltónu. Intervaly přesahující interval oktávy označujeme jako intervaly přenesené.

Tónovou skupinou je jakýkoliv výběr tónů z tónové soustavy. Výběrem tónů může být i výběr všech tónů, či naopak prázdná množina tónů. Je zákonité, že takto vybraná tónová skupina zachovává strukturní vlastnosti výchozí tónové soustavy. Tónová skupina je tedy také uspořádanou množinou. Typickými operacemi, které můžeme na tónovou skupinu aplikovat, jsou změny pořadí tónů, oktávové transpozice některých tónů, opakování prvků. Při těchto úpravách tóny zůstávají, intervaly se však mění.

Intervalovou skupinou je jakýkoli výběr intervalů v tónové soustavě obsažených. Tak jako u skupin tónových lze i zde rozlišit reprezentanty příbuzných tvarů (mezi příbuzné tvary patří i zrcadlové tvary). Opět tedy můžeme uskutečňovat zejména změny po-

řadí intervalů, ale i vytvářet objekty o vyšším počtu členů, než je počet druhů intervalů. Vzhledem k vlastnostem tónové soustavy se však těmito operacemi tóny mění. Tedy: intervaly zůstávají, tóny se mění.

Modalita je výběr tónů z tónové soustavy, přičemž tóny s frekvencemi v poměru 2 : 1 ztotožňujeme. Např. bílé klávesy klavíru tvoří sedmitónovou modalitu *c d e f g a h*, které říkáme *přirozená*. A jen velmi málo skladeb, které denně posloucháme (nejsme-li milovníky orientální hudby, ...) vybočuje z přirozené modalitty.

Termínem *modus* rozumíme obecný název pro církevní mody, církevní stupnice, mody, modální stupnice, modální terény, tónové terény, přirozené, či umělé mody aj. a také pro (všechny) stupnice. Proto *modální princip* je způsob výběru prvků z jakékoli množiny, např. z množiny tónů, množiny intervalů, množiny tónových délek, atd. Výběr prvků je *závazný*, neboť právě výběrem dochází ke spojování hmoty díla. Skládání prvků do různých složených objektů je pak věc sekundární.

Budeme-li si nyní všimnout jen tónů (v případě intervalů je situace analogická), pak můžeme říci, že jakákoli tónová skupina může být využita jako *modus*. Mody mohou mít i velmi malý počet tónů (např. dvoutónový *modus*), mohou být vystavěny z několika tónových skupin, či jedné skupiny v několika transpozicích.

Jak je zřejmé, tónový *modus* je podmnožinou tónové soustavy (odhlédneme-li nyní od chromatické stupnice, která je „nevýběrová“). Z toho pak plyne, že něco je nedostupné. Nedostupné jsou nejen nezvolené tóny, ale i intervaly mezi nezvolenými tóny, či intervaly mezi zvoleným a nezvoleným tónem (např. v pentatonickém modu *egahd* se velká sekunda sice vyskytuje, nikoli však v realizaci mezi tóny *e-fis*).

Horizontály a vertikály, tedy vlastně melodie a akordy se z *modu* víceméně volně vybírají. Jedná se o ještě jinak organizované podmnožiny té které zvolené množiny (ve vzniklých objektech leckdy nejsou obsaženy všechny prvky *modu*).

Stejně tak jako můžeme mít *modus* např. pětitónový, je jisté, že existují mody (tedy i tónové soustavy) o větším počtu tónů než je dvanáct. Stačí, když v námi používané dvanáctitónové

temperované soustavě rozdělíme každý půltónový interval na poloviny, a snadno tak získáme čtvrttónovou soustavu s dvojnásobným počtem tónů.

Počátek mikrotonálních soustav lze nalézt již v hudbě Starého Řecka. Čtvrttónová hudba se setkala s ohlasem zejména v arabských zemích. Průkopníkem mikrointervalové hudby u nás byl A. Hába (1893–1973), který navrhl některé čtvrttónové nástroje (např. čtvrttónový klavír, čtvrttónový klarinet), pro mikrointervaly zavedl symboly a zabýval se pokusy dokonce s dvanáctitónovými. Je však zřejmé, že po celém světě existuje spousta tónových soustav. Některé vznikly zcela přirozenou cestou, jiné jsou uměle vytvořené. Uvedeme si jen některé. Pouze si uvědomme, že soudobé kompoziční myšlení jednotlivých kulturních oblastí se díky pokroku v přístupu k informacím propojuje, proto je užitečné sledovat hudební myšlení např. na lidové tvorbě. Mezi přirozeně vzniklé tónové soustavy patří pětítónové soustavy (tzv. pentatoniky) z oblastí Malajsie, Indonésie, Číny a Japonska. Jedná se o velmi staré soustavy. Čínská pentatonika vzniklá na základě informací, které byly v téže době známy v antickém Řecku, je tvořena prvními pěti tóny kvintového kruhu. Soustavy sedmitónové (tzv. heptatoniky) se vyskytují např. na území Indonésie a Thajska. Dvanáctitónové soustavy jsou rozšířeny po celém světě a soustavy obohacené o mikrointervaly (např. šestnáctitónové, sedmnáctitónové až dvacetičtyřtónové) zejména v Arábii a také v Indii.

Umělé tónové soustavy vznikly na základě teoretických úvah při vytvoření návrhů na nové hudební nástroje nebo na nová ladění. O jejich tvorbu se zasloužili např. I. Newton, M. Mersenne, R. Descartes a L. Euler.

Modality dvanáctitónové soustavy jsou u nás nejpoužívanější a proto i nejlépe popsané. Primitivní kultury užívají dvou a tří-tónových modalit, podobné modality najdeme i v ptačím zpěvu. C. Debussy (skladatel období impresionismu) studoval ptačí zpěv a získané poznatky vnášel do svých kompozic. Čtyřtónové modality jsou známé v hudbě Eskymáků. Pentatoniky jsou používanější a podle druhů použitých intervalů mezi uspořádanými tóny

dané pentatoniky rozlišujeme na pentatoniku přirozenou, javanskou, japonskou, korejskou a další. Hexatoniky (modalit šestitónové) jsou nejužívanější v indické a bluesové hudbě. Do heptatonik (modalit sedmitónových) patří mj. přirozené cikánské, Debussyho, turecké, zmenšené a indické modalit. Příklady modalit více než sedmitónových můžeme hledat opět např. v bluesové hudbě.

Máme-li dány elementy skladby, pak můžeme sestřít jejich sekvence. Jsou to vždy funkce z přirozených čísel do jednotlivých prvků dané množiny elementů, matematicky řečeno, *posloupnosti*. V tomto budou nazývány *série*.

Nyní můžeme provést jejich klasifikaci. Jsou to nejprve *jednovrstevnaté* série, tj. série tónové (tedy tónový obsah melodie s pořadím tónů, dvánáctitónová řada dodekafonie, tónové série serialismu, stupnice, modus), intervalové, rytmické (tj. z tónových délek sestavený rytmus), dynamické, barevné. Kromě nich máme jejich kombinace, tedy série *dvouvrstevnaté* (např. rytmicko-dynamická série tradičně zvaná „metro-rytmické vztahy“, aj.), *třívrstevnaté*, *čtyřvrstevnaté*. O všech kombinacích, které mají určené tóny, resp. intervaly, a také rytmus, bychom mohli říci, že jde o melodii.

Tak jako horizontály můžeme konstituovat i *vertikály* – souzvuky (současné uvedení alespoň dvou tónů), akordy (současné uvedení alespoň tří tónů různé výšky), *arpeggia* (v notovém zápise se jedná o souzvuk doplněný o značku pro arpeggio, zvuková podoba je rychlý sled tónů daného souzvuku).

Jednotlivé série, posloupnosti, můžeme nyní variovat, obměňovat tím, že je transformujeme. Z hlediska skladatele jde o proceduru, jak z jedné (zdařilé, či hezké) melodie vytvořit melodie jí příbuzné, namnožit tak hudbu skladby (za současného dosažení její vnitřní celistvosti).

Literatura

- [1] Fauvel, J. (ed.); Flood, R. (ed.); Wilson, R. (ed.), *Music and mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [2] Bondarenko, V. E.; Yevin, I., Tonal structure of music and controlling chaos in the brain, *Chaos Complex Lett.* **1**(2005) 367–373.
- [3] Haluška, J., *The Mathematical Theory of Tone Systems*, Ister Science, Bratislava, **30**(2004).
- [4] Siki, Z., Mathematics, physics and music: a case study, In: Boniolo, G. (ed.) et al.: *The role of mathematics in physical sciences. Interdisciplinary and philosophical aspects*. Dordrecht: Springer. 179–196 (2005).
- [5] Papadopoulos, A., Mathematics and music theory: from Pythagoras to Rameau, *Math. Intell.* **24**(2002) 65–73.
- [6] Meyer, Ch.; Wicker, J.-F., Music and mathematics in the fourteenth century. The De numeris harmonicis of Leo Hebraeus, *Arch. Int. Hist. Sci.* **50**(2000) 30–67.
- [7] Haluška, J. (ed.), Harmonic Analysis and Tone Systems, *Tatra Mountains Mathematical Publications* Polygrafia Bratislava, CC, **23**(2000).

Mgr. Judita Piknerová

Ústav matematiky a statistiky, PřF MU

Kotlářská 2, 611 37 Brno

e-mail: 151356@mail.muni.cz