Vlastimil Dlab
Důkladné porozumění pojmu ekvivalence

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 1, 9–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150337

DŮKLADNÉ POROZUMĚNÍ POJMU EKVIVALENCE

VLASTIMIL DLAB

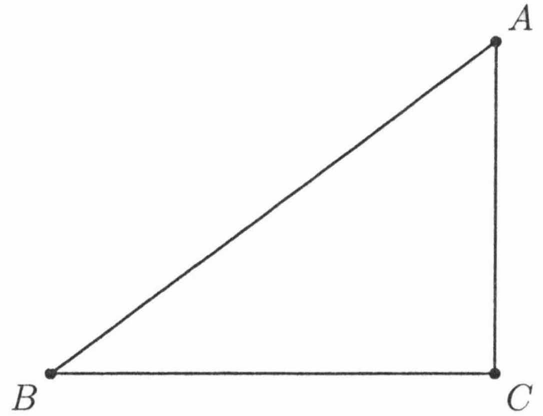
Co v matematice znamená, že jsou dvě tvrzení ekvivalentní? Zdá se to být velmi jednoduché: první tvrzení plyne (logickými kroky) z druhého a druhé z prvního. Přesto však mají mnozí studenti s touto „dvojstrannou implikací" potíže. Jednou z příčin může být to, že dvě tvrzení, z nichž první je očividně obecnější než druhé, mohou být ekvivalentní. Tento jev je rovněž častým tématem diskusí mezi učiteli.

K *důkladnému porozumění* výše zmíněnému jevu nám mohou pomoci tři známé poznatky elementární matematiky. Všimněme si následujících tří tvrzení, která označíme **T1, T2, T3**.

TVRZENÍ T1 (Pythagorova věta). *V pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde $\sphericalangle BCA = 90°$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, je*

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

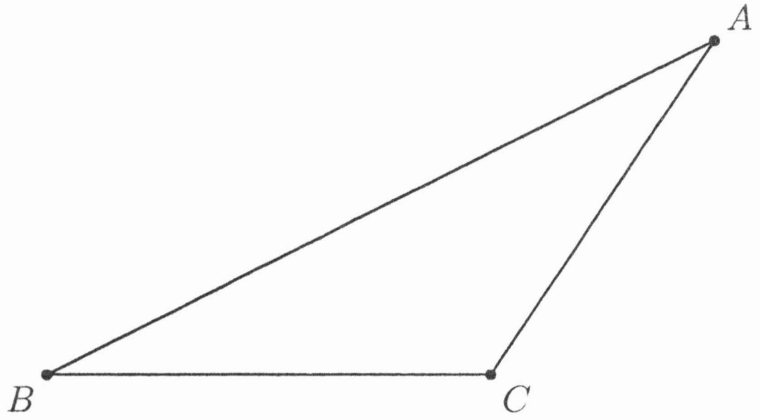
tj. čtverec nad přeponou je součtem čtverců nad odvěsnami (viz obr. 1).



Obr. 1

TVRZENÍ T2 (Kosinová věta). *V obecném trojúhelníku ABC, kde $\sphericalangle BCA = \gamma$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, je* (viz obr. 2)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

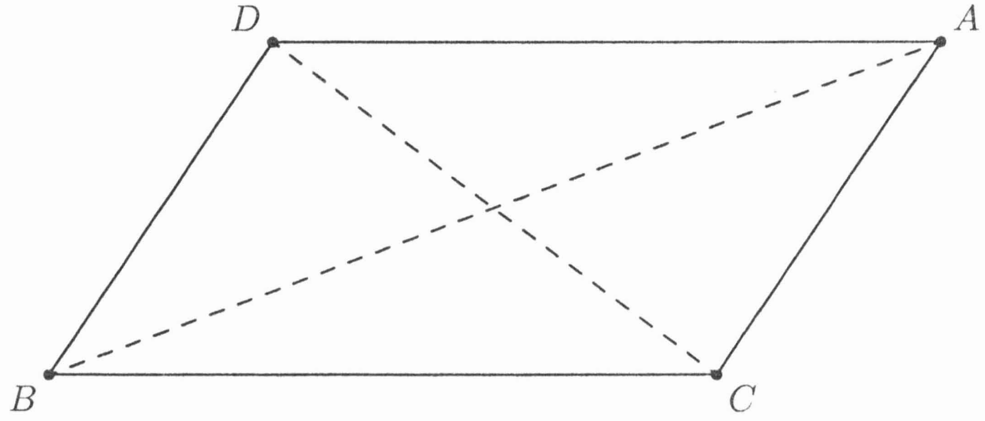


Obr. 2

TVRZENÍ T3 (Věta o úhlopříčkách rovnoběžníku). *V rovnoběžníku $ADBC$, kde $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{CA} = \overline{DB} = b$, $\overline{BA} = c$ a $\overline{CD} = d$, je* (viz obr. 3)

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2),$$

tj. součet čtverců nad stranami rovnoběžníku je roven součtu čtverců nad jeho úhlopříčkami (viz obr. 3).



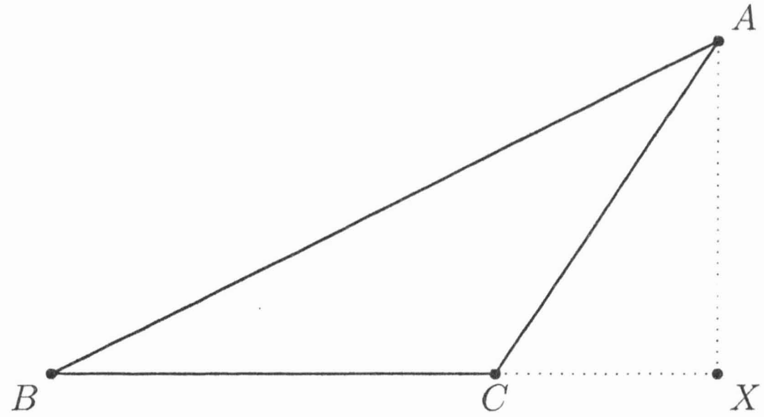
Obr. 3

Velmi snadno dokážeme, že **tři výše uvedená tvrzení jsou ekvivalentní**. Ukážeme, že z prvního tvrzení vyplývá tvrzení druhé, z druhého tvrzení tvrzení třetí a z třetího tvrzení tvrzení první, tj. prověříme sled implikací **T1** $\Longrightarrow$ **T2** $\Longrightarrow$ **T3** $\Longrightarrow$ **T1**.

Důkaz.

1. Druhé tvrzení plyne z prvního, tj. **T1** $\Longrightarrow$ **T2**.

Tuto skutečnost snadno dokážeme pomocí následujícího obrázku, kde úhel $\sphericalangle BXA = 90°$ a kde označíme $\overline{CX} = x$ a $\overline{AX} = y$.



Obr. 4

Podle tvrzení **T1**, je $y^2 = b^2 - x^2$ a rovněž $y^2 = c^2 - (a + x)^2$, a tedy $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$. Ale $x = b\cos(\pi - \gamma)$, a tedy $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Poznamenejme, že se důkaz provede obdobně, je-li úhel γ ostrý.

2. Stejně tak snadno plyne třetí tvrzení z druhého, tj. **T2** $\Longrightarrow$ **T3**.

Ze třetího obrázku za pomoci druhého tvrzení (pro trojúhelníky ABC a DBC) dostáváme vztahy

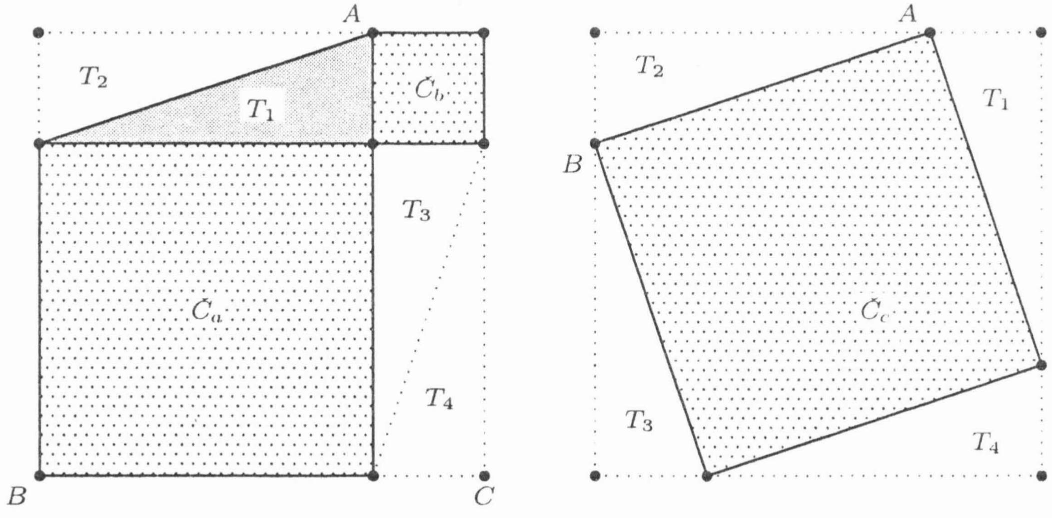
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\sphericalangle BCA \quad \text{a} \quad d^2 = a^2+b^2-2ab\cos\sphericalangle DBC.$$

Jelikož $\sphericalangle BCA = \pi - \sphericalangle DBC$, obdržíme sečtením předešlých rovností vztah $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

3. První tvrzení je speciálním případem třetího, když je rovnoběžník $BCAD$ obdélníkem o stranách a, b. Tedy **T3** $\Longrightarrow$ **T1**.

Ekvivalence tvrzení **T1**, **T2**, **T3** je dokázána.

Poznamenejme ještě, že tedy všechna tři tvrzení plynou z nejčastěji užívaného důkazu Pythagorovy věty, který je zachycen na obrázku 5.



Obr. 5

Zatímco Pythagorova věta, resp. kosinová věta jsou obsaženy v učivu základní, resp. střední školy, věta o rovnoběžníku je zcela opomíjena. Je to škoda, neboť pro žáky základní školy by toto tvrzení mohlo být zajímavé a motivující. Jednak proto, že je jakousi modifikací Pythagorovy věty, jednak proto, že je s ní ekvivalentní. Její formulace přitom nevyžaduje pojem úhlu ani goniometrické funkce. Vřele proto doporučuji, aby byla žákům na základní škole věta o rovnoběžníku v souvislosti s Pythagorovou větou uváděna (formou cvičení), a to alespoň jako její důsledek, když už ne jako ekvivalentní tvrzení.

Na střední škole by měla být kosinová věta chápána jako zobecnění věty Pythagorovy; pro studenty by mělo být motivujícím zjištěním, že jsou tyto dvě věty přitom ekvivalentní. Právě takováto, na první pohled překvapivá zjištění, vedou k *důkladnému porozumění* elementární matematice.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca