Učitel matematiky

Milada Kočandrlová

Apolloniovy kružnice

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 1, 3–8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150336`

APOLLONIOVY KRUŽNICE

MILADA KOČANDRLOVÁ

V rovině zvolíme dva různé body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$. Množina všech bodů X v rovině, jejichž poměr vzdáleností od bodů P, Q je roven k, je kružnice, která se nazývá *Apolloniova kružnice.* Abychom popsali její vlastnosti, zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že body P, Q jsou na ose x ve vzdálenosti a od počátku O, tj. $P = [-a, 0]$, $Q = [a, 0]$. Potom pro druhé mocniny vzdáleností bodu X od pevných bodů P, Q platí

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2((x-a)^2 + y^2)).$$

Po úpravě

$$(1-k^2)x^2 + 2ax(1+k^2) + (1-k^2)y^2 = a^2(k^2-1).$$

Protože jsme předpokládali k různé od jedné, (pro $k = 1$ bychom dostali osu úsečky PQ, tj. osu y) vydělíme rovnici výrazem $1 - k^2$

$$x^2 + 2ax\frac{1+k^2}{1-k^2} + y^2 = -a^2$$

a upravíme

$$\left(x + a\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Apolloniova kružnice má střed $S_k = \left[a \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}, 0\right]$ *a poloměr* $r_k = \frac{2ak}{|1-k^2|}$.

Pro $0 < k < 1$ je souřadnice s_k bodu S_k menší než $-a$, Apolloniovy kružnice leží v polorovině yP. Pro $k > 1$ je $s_k > a$, Apolloniovy kružnice leží v polorovině yQ.

Středy S_k leží mimo úsečku PQ., (obr. 3.).

S osou y, tj. s osou úsečky PQ (pro $k = 1$, které jsme vyloučili) nemá Apolloniova kružnice žádný společný bod.

Nyní zjistíme, jakou podmínku musí splňovat čísla k_1, k_2, $0 < k_1 < 1 < k_2$, aby odpovídající Apolloniovy kružnice byly souměrné podle osy y. Pro jejich středy bude platit

$$-\frac{k_1^2 + 1}{k_1^2 - 1} = \frac{k_2^2 + 1}{k_2^2 - 1}$$

a po úpravě dostáváme podmínku $k_1 k_2 = 1$. Pro poloměry těchto kružnic platí

$$\frac{k_1}{1 - k_1^2} = \frac{k_2}{k_2^2 - 1}$$

a po úpravě dostáváme $k_1 k_2 (k_1 + k_2) = k_2 + k_1$, tj. $k_1 k_2 = 1$.

Dvě Apolloniovy kružnice s koeficienty k_1, k_2 jsou souměrné podle osy úsečky PQ právě když $k_1 k_2 = 1$.

Apolloniova kružnice protíná osu x ve dvou bodech, obr. 3, pro které platí

$$x = \frac{2ak}{|1 - k^2|} - a\frac{1 + k^2}{1 - k^2},$$

a tedy

$$A_k = \left[a \cdot \frac{k - 1}{k + 1}, 0\right], B_k = \left[a \cdot \frac{k + 1}{k - 1}, 0\right].$$

Souřadnici středu S_k můžeme upravit na tvar

$$s_k = a + \frac{2a}{k^2 - 1}.$$

Z tohoto tvaru je zřejmé, že vzdálenost bodu S_k od bodu $Q = [a, 0]$ je menší než poloměr r_k (analogicky pro bod P), obr. 3.

Body P, Q tudíž leží uvnitř Apolloniových kružnic.

Konstrukce Apolloniových kružnic

Zvolme na ose y bod $R = [0, a]$. Přímky RQ, RP jsou osy úhlů A_kRB_k. Jednotkové vektory přímek RA a RB jsou

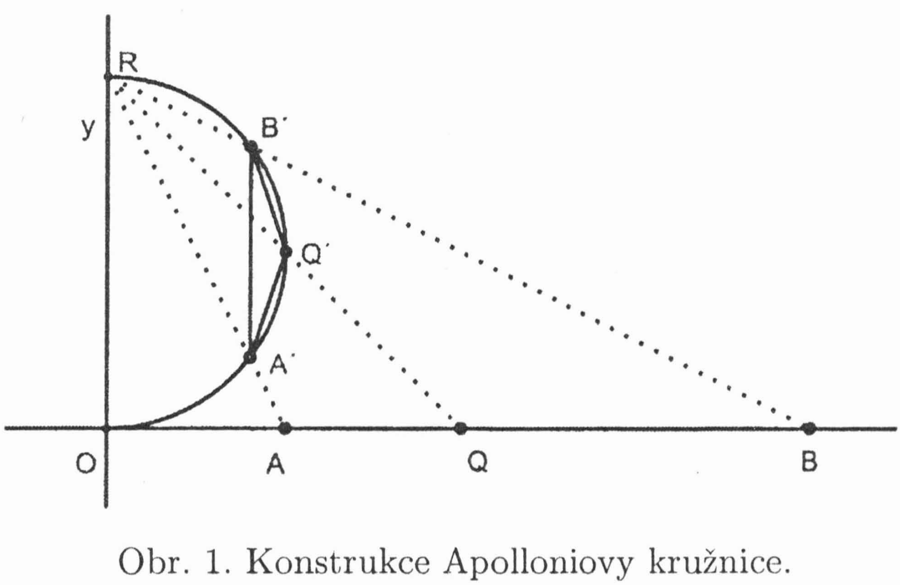
$$\vec{a} = (k-1, -k-1)\frac{1}{\sqrt{2(k^2+1)}},$$
$$\vec{b} = (k+1, 1-k)\frac{1}{\sqrt{2(k^2+1)}}.$$

Jejich součet (resp. rozdíl)

$$\vec{a} + \vec{b} = k \cdot \sqrt{\frac{2}{k^2+1}}(1, -1),$$
$$\vec{a} - \vec{b} = \sqrt{\frac{2}{k^2+1}}(-1, -1)$$

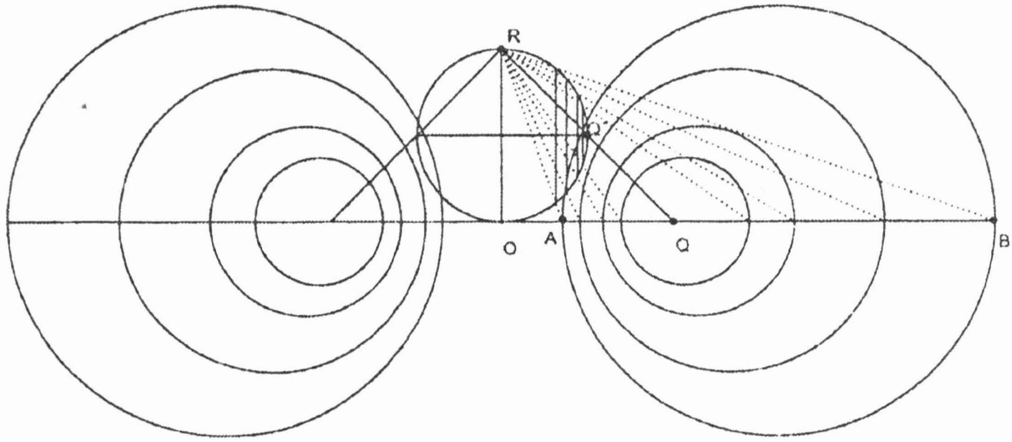
určuje vektor os úhlu A_kRB_k. Osy procházejí body P, Q.

Sestrojíme-li kružnici nad průměrem OR, jsou úhly A_kRQ a QRB_k shodné obvodové úhly ke shodným tětivám $A'Q'$ a $Q'B'$. Tudíž tětiva $A'B'$, rovnoběžná s osou y se promítá do průsečíků A, B Apolloniovy kružnice s osou x, tj. do jejího průměru, obr. 1.



Obr. 1. Konstrukce Apolloniovy kružnice.

Apolloniovy kružnice tvoří svazek kružnic, které mají společné dva izotropické (komplexně sdružené) body na ose y. Takový svazek se nazývá *hyperbolický svazek kružnic*, obr. 2. Sestrojíme je konstrukcí z obr. 1, tj. promítáním tětiv kružnice nad průměrem OR, s tímto průměrem rovnoběžných, na přímku PQ, obr. 2.

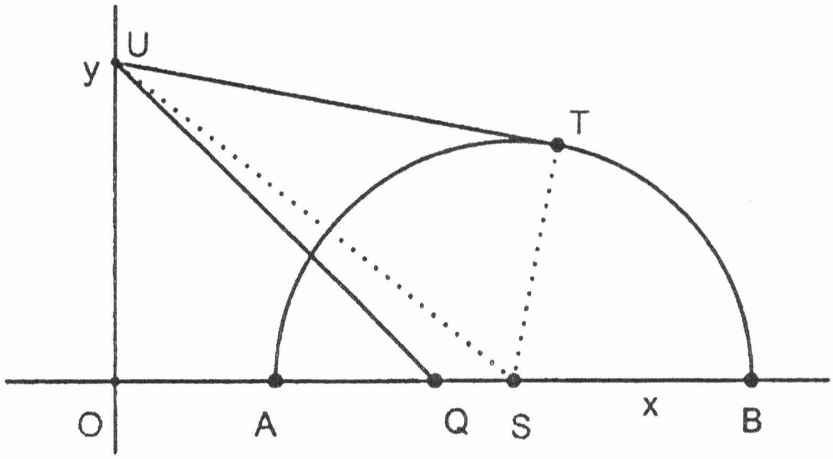


Obr. 2. Apolloniovy kružnice – hyperbolický svazek kružnic.

Další vlastnosti Apolloniovy kružnice

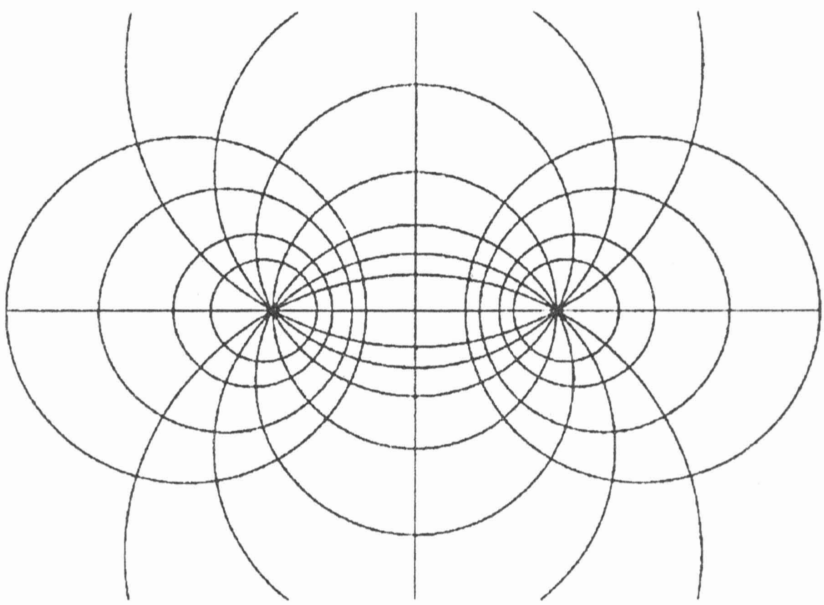
Z libovolného bodu $U = [0, u]$ osy y lze k Apolloniově kružnici sestrojit dvě tečny. Bod dotyku jedné z nich označme T a střed kružnice S, obr. 3. Pro délku úsečky UT platí

$$|UT|^2 = |US|^2 - r^2 = a^2 \left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + u^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} =$$
$$= a^2 + u^2 = |UQ|^2.$$



Obr. 3. $|UT| = |UQ|$.

Odtud dostáváme, že body Q, T mají od bodu U osy úsečky PQ stejnou vzdálenost. Body P, Q, T leží na kružnici, která kolmo protíná Apolloniovy kružnice. Protože bod U byl libovolným bodem osy y, tuto vlastnost mají všechny kružnice jdoucí body P, Q. Svazek těchto kružnic se nazývá *eliptický svazek kružnic*, obr. 4.



Obr. 4. Hyperbolický a eliptický svazek kružnic.

Oba svazky můžeme najít na mapách, které jsou příčnou stereografickou projekcí referenční koule. Obrazy poledníků jsou na kružnicích eliptického svazku s osou PQ (obrazy pólů). Obrazy rovnoběžek jsou na kružnicích hyperbolického svazku.

Literatura

[1] Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J., *Geometrie I*, SPN, Praha, 1986

[2] Vinš J., *Geometrie pro 4. třídu středních škol*, Česká grafická a.s. Unie, Praha, 1911

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
ČVUT Fakulta stavební
katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: milada.kocandrlova@fs.cvut.cz