

# Zpravodaj Československého sdružení uživatelů TeXu

---

Ondřej Kutal

Tvorba matematické grafiky pomocí programu Asymptote

*Zpravodaj Československého sdružení uživatelů TeXu*, Vol. 25 (2015), No. 1-2, 2–69

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150227>

## Terms of use:

© Československé sdružení uživatelů TeXu, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

---

---

# Tvorba matematické grafiky pomocí programu Asymptote

---

ONDŘEJ KUTAL

Tento článek je vytvořen na základě diplomové práce autora (Kutal, 2012). Popisuje tvorbu matematické grafiky s programem Asymptote. Cílem textu je, aby čtenář z pestrých příkladů pochopil základní myšlenky práce s programem a zároveň měl dostatek informací o pozadí těchto postupů. V první části jsou vysvětlena základní syntaktická pravidla, v dalších částech je pak podrobně popsána metodika práce ve 2D a 3D. V závěrečné části jsou rozebrány algoritmy, které v Asymptote převádějí rovinné útvary do 3D reprezentace.

## Úvod

Cílem tohoto článku je představit a popsat program Asymptote, účinný a pohodlný open source nástroj pro tvorbu 2D a 3D (i interaktivní) grafiky, vhodný především pro vědecké dokumenty. Asymptote je interpretovaný jazyk se syntaxí založenou na jazyce C++. Jeho potenciál je vidět především při psaní dokumentů v jazyce  $\text{\LaTeX}$ , při kterém můžeme umísťovat bloky zdrojových kódů obrázků do speciálních prostředí a grafiku tak generovat společně se samotným dokumentem. Od roku 2004 na něm pracují John C. Bowman, Andy Hammerlindl a Tom Prince. Od té doby se Asymptote stále vyvíjí, každým rokem přibývají nové funkcionality a opravy chyb. Původně byl program koncipován jako alternativa k systému METAPOST, oproti kterému dovoluje například přesnější výpočty v plovoucí desetinné čárce či tvorbu interaktivní grafiky ve 3D.

V první kapitole je popsána instalace a nastavení programu Asymptote, včetně základních způsobů práce s programem. Ve druhé kapitole jsou popsány základy syntaxe programu. V další části jsou vysvětleny postupy pro generování 2D a 3D grafiky, včetně mnoha příkladů. Jelikož jsou však možnosti této práce omezené, doporučujeme se podívat na další příklady na oficiálních stránkách Asymptote (2004) či na Asymptote – Galeries d'exemples (2011). Pro všechny ukázky v práci byla použita verze Asymptote 2.14.

## Instalace

Před instalací programu Asymptote je potřeba mít:

- implementaci  $\text{\TeX}$   
např. TeXLive, lze stáhnout na <http://www.tug.org/texlive/>

- Ghostscript GPL  
viz <http://sourceforge.net/projects/ghostscript>
- nějaký prohlížeč formátů `.ps` a `.pdf`  
např. GSview, Adobe Reader (pro správné zobrazení 3D scén v pdf je potřeba Adobe Reader 8.0 a vyšší)

Pro systémy Windows z oficiálních stránek programu Asymptote (2004) musíme stáhnout samotný Asymptote, například v podobě samorozbalovacího souboru `asymptote-x.xx-setup.exe`, kde `x.xx` označuje aktuální verzi programu. Pro uživatele linuxových systémů jsou k dispozici `tgz` i `rpm` balíky, pro podrobnější informace k distribuci viz oficiální stránky Asymptote (2004). Po instalaci je často potřeba provést nastavení souboru `config.asy`, viz následující odstavec.

### Nastavení `config.asy`

Po nainstalování Asymptote je vhodné provést základní konfiguraci, a to především nastavit cesty k jednotlivým prohlížečům,  $\TeX$ ové implementaci, případně další parametry. Nastavení se provádí v souboru `config.asy`, který se nachází ve složce `.asy` v uživatelské domovské složce (na systémech Windows se nachází v `%userprofile%`), případně se dá nastavit alternativní cesta využitím systémové proměnné `ASYMPTOTE_HOME`.

Většinu systémových cest program Asymptote při instalaci nastaví sám, na linuxových systémech tato starost většinou úplně odpadá. Někdy je přesto potřeba něco nastavit ručně. Důležité jsou především cesty k PostScriptovému prohlížeči (`psviewer`), GhostScriptu (`gs`) a prohlížeči PDF (`pdfviewer`). Na linuxových systémech vše zpravidla funguje ihned po instalaci, na systémech Windows by nastavení `config.asy` mohlo vypadat například takto:

```
import settings;

gs="C:\Program Files\Ghostscript\gs9.00\bin\gswin32c.exe";
psviewer="C:\Program Files\Ghostgum\gsview\gsview32.exe";
pdfviewer="C:\Program Files\Adobe\Reader 9.0\Reader\AcroRd32.exe";
```

Další informace najdete na oficiálních stránkách Asymptote (2004).

### Parametry příkazového řádku

Program Asymptote je možné spustit s různými parametry, které budou mít platnost pouze pro dané spuštění. Většina z těchto parametrů se dá nastavit i v souboru `config.asy`, a to použitím delšího názvu parametru (pokud má i zkrácenou verzi). Tabulka 1 shrnuje seznam některých parametrů (úplný seznam se zobrazí při spuštění Asymptote s parametrem `-h`).

<code>-a,-align C B T Z</code>	zarovnání na stránce, Center, Bottom, Top, nebo Zero [C]
<code>-autoplay</code>	automatické spouštění 3D animací [false]
<code>-embed</code>	vloží renderovaný náhledový obrázek pro 3D scénu [true]
<code>-h,-help</code>	zobrazí seznam všech parametrů; pouze pro příkazovou řádku
<code>-f,-outformat format</code>	nastavení výstupního formátu
<code>-o,-outname name</code>	nastavení cesty pro výstupní soubor
<code>-prc</code>	vloží do pdf dokumentu 3D PRC model [true]
<code>-tex engine</code>	latex pdflatex xelatex tex pdftex context none [latex]
<code>-toolbar</code>	ukáže 3D toolbar v PDF výstupu [true]
<code>-version</code>	zobrazí verzi Asymptote
<code>-l,-listvariables</code>	vypíše seznam funkcí a proměnných [false]
<code>-V,-View</code>	zobrazí výstupní obrázek; pouze pro příkazovou řádku

Tabulka 1: Parametry příkazové řádky Asymptote

Pro vypnutí parametru stačí před název vložit `-no`, tj. například

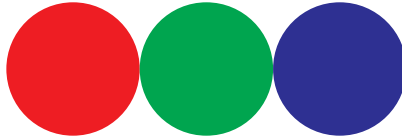
```
asy -f pdf -notoolbar
```

nastaví výstupní formát `pdf` a ve výsledném dokumentu skryje pruh nástrojů pro 3D scénu.

## Interaktivní mód

Do interaktivního módu programu Asymptote se dostaneme spuštěním `asy` v příkazové řádce systému. Pak stačí zadávat příkazy a potvrzovat klávesou Enter. Výstupní grafický soubor se ukládá do souboru `out.eps` v aktuálním adresáři (pokud nespecifikujeme jiný výstupní formát). Pokud máme správně nastavený PostScriptový prohlížeč (proměnná `psviewer` v souboru `config.asy`), uvidíme výstupní soubor automaticky při každé jeho změně (případně po kliknutí na obrázek nebo stisknutí klávesy R ve většině prohlížečů).

```
> size(0,50);
> fill(circle((-2,0),1),red);
> fill(circle((0,0),1),green);
> fill(circle((2,0),1),blue);
```



Obrázek 1: Ukázka výstupu

Zadávání dalších příkazů přidává objekty k dosud vykreslenému. Pro vyčištění kreslicí plochy slouží příkaz `erase`.

Užitečná je klávesa Tabulátor, při jejímž stisknutí program Asymptote doplní název funkce či proměnné (pokud je to jednoznačné), nebo nabídne možná doplnění. Zde je tabulka základních příkazů pro interaktivní mód:

<code>help</code>	zobrazí nápovědu
<code>erase</code>	vyprázdní plátno
<code>reset</code>	vrátí nastavení do původního stavu
<code>quit/exit</code>	ukončí program

Tabulka 2: Příkazy pro interaktivní mód

### Dávkový (batch) mód

Dávkový mód se provede spuštěním `asy` s parametrem názvu souboru, ve kterém máme připravený kód. Program Asymptote za nás potom přečte sekvenci příkazů a vygeneruje grafiku do výstupního souboru. Implicitně je výstup ve formátu `eps`, ale vhodnou volbou parametrů (viz část Parametry příkazové řádky) lze nastavit výstup do jiných formátů<sup>1</sup>. Pokud například máme připravený kód v souboru `krivka.asy`, můžeme vygenerovat grafický výstup takto:

```
asy krivka.asy -V
```

kde parametr `-V` zajistí zobrazení výstupu v prohlížeči po ukončení.

### Použití v $\text{\LaTeX}$ u

Pro použití Asymptote uvnitř  $\text{\LaTeX}$ ového dokumentu musíme mít správně umístěny příslušné  $\text{\LaTeX}$ ové balíky. K tomu, pokud to za nás neudělala instalace, musíme zkopírovat soubory `asymptote.sty`, `asycolors.sty` a `ocg.sty` do místa, kde  $\text{\LaTeX}$  hledá balíky. V dokumentu pak načteme balík `asymptote` příkazem:

<sup>1</sup>Asymptote podporuje výstupní formáty `eps`, `pdf`, ale také `jpg`, `png` či `svg`, je však potřeba nainstalovat program ImageMagick pro konverzi, případně `dvisvgm`, více viz oficiální stránky Asymptote (2004).

```
\usepackage[inline]{asymptote}
```

Nyní můžeme použít prostředí `asy` a do něj umístit zdrojový kód obrázku.

```
\begin{asy}  
...  
\end{asy}
```

Další možností je mít kód v samostatném souboru a vkládat ho pomocí L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xového příkazu `\asyinclude` (například `\asyinclude{elipsa.asy}`).

Pro kompilaci grafiky pro dokument použijeme posloupnost příkazů

```
pdflatex -interaction=nonstopmode dokument.tex  
asy -batchView dokument-*.asy  
pdflatex -interaction=nonstopmode dokument.tex
```

Používáme-li nějaké prostředí pro psaní L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xových dokumentů, máme v nich někdy k dispozici tlačítko pro Asymptote (nebo dokonce pro posloupnost všech tří příkazů), jindy si jej musíme vytvořit (anebo kompilovat obrázky přes příkazovou řádku). Prostou obměnou předchozích příkazů můžeme generovat dokument do formátu `ps` (ovšem bez 3D grafiky), jen bychom místo předchozího napsali:

```
latex -interaction=nonstopmode dokument.tex  
dvips -o dokument.ps dokument.dvi  
asy -batchView dokument-*.asy  
latex -interaction=nonstopmode dokument.tex  
dvips -o dokument.ps dokument.dvi
```

Pro dokumenty s větším obsahem grafiky se může hodit utilita `latexmk`, pomocí níž se kompilují jen změněné obrázky (viz oficiální stránky Asymptote (2004)). Případně je možné „ručně“ zkompilovat jen změněné obrázky běžným způsobem pro samostatné `asy` soubory. Pokud například víme, že se pozměněná grafika nachází pouze v souboru `dokument-2.asy`, použijeme

```
asy dokument-2.asy
```

a tím překompilujeme jen zvolený obrázek. Při příštím použití `pdflatex` (či podobného programu) se nová grafika vloží do dokumentu.

Při kompilaci dokumentu s vloženou grafikou je generováno velké množství dočasných souborů. Ty je někdy nutné promazat, a proto se hodí oddělit dočasné soubory od těch důležitých. To si můžeme usnadnit použitím L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xové proměnné `asydir`, která definuje podsložku pro dočasné soubory. Pro takové použití stačí vytvořit složku `temp`, na začátek dokumentu přidat

```
\renewcommand\asydir{temp}
```

a pak pouze mazat obsah složky `temp`. V takovém případě se však musí danému L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xovému prostředí dát vědět, aby spouštělo program Asymptote ve složce

`temp`, protože v původní složce nic nenajde. Toto nastavení záleží na konkrétním prostředí.

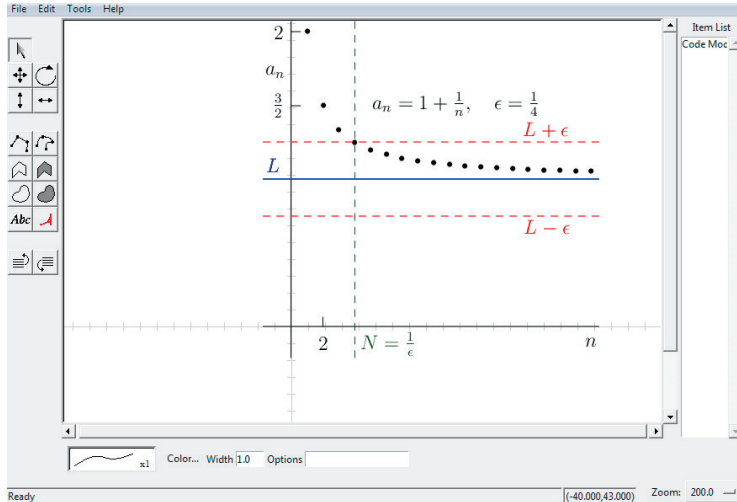
Jiný způsob, jak oddělit důležité soubory od těch dočasných, je umístit je do podsložky např. `files` a v původní složce mít pouze hlavní  $\text{\TeX}$ ový dokument a dočasné soubory. Pak stačí mazat všechny soubory kromě hlavního dokumentu a složky `files`.

$\text{\LaTeX}$ ový balík `asympote.sty` také definuje prostředí `asydef`, do kterého můžeme vkládat globální nastavení pro celý dokument. Jedná se o obyčejné příkazy v Asymptote, je tedy možné mít nastavené například:

```
\begin{asydef}
settings.prc = false; //bez interaktivni 3D grafiky
\end{asydef}
```

## Xasy

Asymptote v sobě obsahuje jednoduché uživatelské rozhraní Xasy, které je napsané ve skriptovacím jazyce Python, jehož interpret je nutný pro běh (<http://www.python.org>). Samotné Xasy zatím nabízí pouze omezené možnosti kreslení, hodí se spíše pro doladování již existujících obrázků.



Obrázek 2: Grafické rozhraní Xasy

## Problémy

Práce v programu Asymptote vždy neprobíhá tak hladce, jak by si uživatel přál. Proto si zde uvedme nejčastější problémy a způsoby jejich řešení. Zaměříme se nejdříve na situaci, kdy nám ani **nevznikne výstupní grafický soubor**.

Při práci v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu doporučujeme v této situaci nejdřív promazat všechny dočasné soubory vytvořené Asymptote. Nejedná se však pouze o soubory `.asy`, ale také o některé `.tex`, `.ps`, `.pdf` a jiné soubory. To si můžeme usnadnit například použitím L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xové proměnné `asydir`.

Pokud nezabralo smazání dočasných souborů, jedná se zřejmě o syntaktickou chybu či zapomenutí nějakého balíku. V takovém případě je užitečné generovat grafiku z příkazové řádky a mít celý kód ve zvláštním `.asy` souboru. Pak jednoduše uvidíme chybová hlášení a měli bychom být schopni chybu odhalit. Případně můžeme zvýšit úroveň výpisů pomocí parametrů `-v`, `-vv` až `-vvvvv`. Asymptote dovoluje i ladění z příkazové řádky, včetně nastavení **breakpointů** apod. Více lze nalézt na oficiálních stránkách Asymptote (2004).

Dalším častým zdrojem problémů bývá chybné či nedostatečné nastavení souboru `config.asy`. Může se jednat o nesprávnou cestu k souborům T<sub>E</sub>Xového kompilátoru, Ghostscriptu či samotných souborů Asymptote, více viz část Nastavení `config.asy`. Na závěr si uvedme řešení některých dalších problémů.

**Kompilace se zastaví při zpracovávání programem Ghostscript, na výstupu se objeví seznam čísel a program čeká, až uživatel operaci potvrdí stiknutím klávesy Enter.**

Tento problém nastává na systémech Windows při generování 3D grafiky s T<sub>E</sub>Xovými popisy. Je způsoben použitím `gswin32.exe` místo `gswin32c.exe` v konfiguračním souboru `config.asy`. Po změně by měl problém zmizet.

**Vše se zkompileje, ale při prohlížení v Adobe Readeru je scéna po aktivaci příliš přiblížená.**

Zde se jedná o chybu Javascriptu v linuxových verzích Adobe Readeru a projevuje se v systémech s neanglickým prostředím. Stačí spouštět Adobe Reader pomocí příkazu:

```
LC_NUMERIC=C acroread
```

Pro širší nastavení lze na vhodné místo do souboru `/usr/bin/acroread` vložit řádek:

```
export LC_NUMERIC="C"
```

V případě, že se ani uvedenými způsoby nepodaří problém vyřešit, je stále velká šance, že někdo měl již podobný problém. Doporučujeme proto diskusní fórum k programu Asymptote a často pokládané otázky (viz oficiální stránky Asymptote, 2004).



## Syntaxe

Program Asymptote používá syntaxi velice podobnou jazykům C/C++ a Java, jsou zde však určité rozdíly. Tuto sekci probereme podrobněji, aby i čtenář neznalý jazyků C, C++ či Java mohl Asymptote využít. Přitom však předpokládáme znalosti alespoň základních principů programování.

### Základy

Soubor se zdrojovým kódem Asymptote se skládá z posloupnosti příkazů oddělených středníkem. Příkazem

```
import balik;
```

lze načítat balíky pro nejrůznější potřeby. Balíky nejsou ve skutečnosti nic jiného než zdrojové soubory Asymptote, většinou dodávané tvůrci programu. Předchozí příkaz by tak vložil zdrojový kód ze souboru `balik.asy`. Takové soubory obsahují definice pokročilých typů a funkcí. Podrobnější informace o balících lze nalézt v části Balíky.

Vkládání komentářů se provádí stejně jako v C/C++. První možností je použít značku `//`, která zahajuje komentář, a následný text do konce řádku je tak při kompilaci ignorován. Pro rozsáhlejší komentáře slouží dvojice značek `/*` a `*/`, označujících postupně začátek a konec komentáře.

```
/*  
Zde se se muze nachazet komentar  
i na nekolik radku.  
*/
```

```
prikaz1; //neco se provede zde  
prikaz2; //a neco jineho zde
```

Asymptote ignoruje prázdná místa tvořená z více mezer či zalomením řádků. Pozor však na psaní mezer mezi dvěma čísly, to je chápáno jako násobení. Následující příklady zdrojových kódů tak generují stejný výsledek.

```
//priklad1.asy  
prikaz1;  
prikaz2;  
prikaz3;
```

```
//priklad2.asy  
prikaz1; prikaz2; prikaz3;
```

```
//priklad3.asy  
prikaz1;    prikaz2;  
prikaz3;
```

## Datové typy

Většina proměnných, se kterými v programu Asymptote budeme pracovat, musí mít předem deklarovaný typ. Asymptote nabízí několik předdefinovaných datových typů, běžně známých z jiných programovacích jazyků. Jsou to `int` pro celá čísla, `real` pro čísla v plovoucí desetinné čárce a `bool` pro pravdivostní hodnotu výrazu `true` nebo `false`. Dále nabízí například `pair`, který slouží pro uchovávání dvojice čísel typu `real` a je také chápán jako komplexní číslo. Následuje podrobnější seznam základních datových typů.

**int** -- celé číslo, uloženo ve 64bitovém formátu, mohou se v něm uchovávat celá čísla v rozmezí  $-9223372036854775808$  až  $9223372036854775805$  (tj.  $-2^{63}$  až  $2^{63} - 3$ ). Tyto limity jsou uloženy proměnných v `intMin` a `intMax`.

**real** -- číslo v plovoucí desetinné čárce, bývá implementováno jako nejpřesnější takový typ na dané architektuře. Používá `realDigits` význačných číslic a přesnost `realEpsilon`. Nejmenší a největší číslo tohoto typu je `realMin` a `realMax`.

**bool** -- booleovský typ, může nabývat hodnot `true` a `false`.

**bool3** -- rozšířený booleovský typ, kromě standardních `true` a `false` může nabývat hodnoty `default`.

**pair** -- uspořádaná dvojice čísel typu `real`. Často bývá chápáno jako komplexní číslo. K jednotlivým složkám lze přistupovat přes atributy `x` a `y` přidáním tečky, tj. například `z.x`.

**triple** -- uspořádaná trojice čísel typu `real`. Používáno pro body v prostoru či vektory. K jednotlivým složkám lze přistupovat přes atributy `x`, `y` a `z`.

**string** -- posloupnost znaků zadaná ve dvojitých uvozovkách (`text`).

Deklaraci proměnné provedeme napsáním názvu typu před název proměnné a oddělíme mezerou, tj. například

```
nazev_typu1 promenna1;  
nazev_typu2 promenna2;  
nazev_typu3 promenna3;
```

deklaruje proměnné `promenna1`, `promenna2` a `promenna3`, které mají postupně typy `nazev_typu1`, `nazev_typu2` a `nazev_typu3`. Součástí deklarace může být přiřazení hodnoty (inicializace), které se provede operátorem `=`.

```
int n = 5;  
real x = 0.01;  
bool finished = false;  
pair z = (1,2);  
triple o = (0,1,0);  
string label = "function f(x)";
```

Kromě uvedených typů je k dispozici spousta dalších, uživatelsky definovaných. Existuje typ `struct` podobný jako v C, pro více informací viz oficiální stránky

Asymptote (2004). Pokud nějaký typ definuje atributy nebo metody, přistupujeme k nim pomocí znaku tečky.

```
struct Kruh {
    real r; //polomer

    real obsah(){
        return pi*r^2;
    }
}

Kruh k;
k.r = 5;

write("Polomer: ",k.r); //vypise atribut r
write("Obsah: ",k.obsah()); //spocita a vypise obsah
```

Následuje přehled některých pokročilých typů.

**frame** -- plátno pro kreslení, pracuje v souřadnicích jazyka PostScript.

**picture** -- podobný typ jako **frame**, avšak využívá vlastní souřadný systém.

Pokud není uvedeno jinak, uživatel kreslí do plátna **currentpicture** typu **picture**.

**path** -- představuje kubickou křivku.

**guide** -- představuje také kubickou křivku, avšak uloženou jako posloupnost ne nutně všech kontrolních bodů. Takto zadaná křivka se do typu **path** převádí až těsně před vykreslením.

**pen** -- pero pro kreslení, uchovává tloušťku, barvu, vzor apod. Pokud není uvedeno jinak, kreslí se perem **currentpen**.

Vypsáný seznam není úplný, k dispozici je mnoho užitečných typů, specifických pro danou problematiku a balík. Více typů bude probráno v následujících kapitolách.

## Pole

Deklaraci pole (konečné posloupnosti proměnných stejného typu) provedeme přidáním `[]` za název typu proměnné nebo za samotný název proměnné.

```
int [] pole;
real [] pole2 = {0.1, 0.2};
real pole3 [];
```

Uvedený příklad vytváří tři pole, přitom **pole2** se přímo inicializuje s hodnotami 0,1 a 0,2. Pro přistupování k prvkům využijeme operátor `[]` s příslušným indexem uvnitř závorek. První prvek **pole2** bychom například získali příkazem **pole2[0]**. Pole má metody a atributy pro práci s ním, jako je mazání, vkládání apod.

<code>int length</code>	počet prvků pole
<code>void insert(int i ... T[] x)</code>	vloží prvek či pole prvků x na index i
<code>void delete(int i, int j=i)</code>	smaže prvky mezi indexy i a j
<code>T push(T x)</code>	vloží prvek na konec
<code>T pop()</code>	vyjme a vrátí poslední prvek

Tabulka 3: Základní atributy a metody polí

Můžeme vytvářet i tzv. anonymní pole, což jsou pole, která nemají žádný název, a to vynecháním názvu proměnné a znaku = a přidáním klíčového slova `new` před celý výraz. Následující kód by měl použití ozřejmit. Jedná se o definici čárkovaného pera, při které funkci předáváme pole dvou hodnot typu `real`.

```
pen dashed = linetype(new real [] {8 ,8});
```

## Operátory

Pro práci s předdefinovanými typy nabízí program Asymptote prakticky stejné operátory, jako jsou dostupné v C/C++. Základní přehled poskytuje následující ukázka:

```
int i = 0;
++i; //to same co i=i+1
i += 2; //stejně jako i=i+2
i = 12 % 5; //zbytek po deleni 5
real a = 2pi; //stejně jako 2*pi
```

Zmíněné operátory jsou často použitelné i pro jiné typy operandů, než jsou základní typy. Jak ukazuje následující příklad, je možné objektu typu `pen` nastavit tloušťku pera (podrobněji o perech viz část Pera):

```
pen mypen;
mypen += 2.0;
mypen += red;
```

## Funkce

Při práci s proměnnými využíváme funkce. Jejich základní seznam lze nalézt na oficiálních stránkách Asymptote (2004). Podrobnější seznam lze získat při spuštění programu Asymptote s parametrem `-l`. Ten však neobsahuje funkce z balíků. Proto bývá nejlepší prostudovat dokumentaci k jednotlivým balíkům, případně se podívat přímo do jejich kódu. V této části nebudeme popisovat jednotlivé funkce,

ale rozebereme si jejich syntaxi. S konkrétními funkcemi se setkáme v dalším textu.

Nyní se podívejme, jak hlavičky funkcí vypadají a jak je interpretovat. Zde se Asymptote poměrně liší od jazyka C++ i Javy. Dovoleny jsou implicitní argumenty kdekoliv v hlavičce, explicitní uvedení názvu argumentu při volání funkce či umístění argumentu ne nutně tam, kde je v hlavičce uveden. Nejlépe si to ilustrujeme na příkladech.

Funkce `time` z balíku `math` spočítá  $n$ -tý průsečík křivky a svislé přímky.

```
real time(path g, real x, int n=0);
```

Samotná deklarace začíná typem návratové hodnoty. Jako typ se zde může uvést `void`, což značí, že funkce nevrací žádnou hodnotu. V našem případě funkce vrací typ `real`, tj. reálné číslo. Zde označuje čas na křivce, ve kterém se realizuje průsečík. Dále je uveden název funkce, tj. `time`, následovaný seznamem argumentů v závorkách. Argumenty (s výjimkou funkcí) jsou uvedeny v pořadí název typu, název argumentu a případně implicitní hodnota za znakem `=`. Pokud není uvedena implicitní hodnota, musíme argument vždy zadat. V tomto případě máme celočíselný nepovinný argument `n` (index průsečíku, který chceme spočítat).

Při volání funkce také můžeme explicitně zmínit název argumentu, který zadáváme. To umožňuje například zadávat argumenty v jiném pořadí, než uvádí hlavička. Následující tři volání jsou proto všechna ekvivalentní.

```
real t;
path p = (0,0)..(2,1)..(0,2);

t = time(p, 1);
t = time(p, 1, 0);
t = time(n=0,x=1,g=p);
```

Zde se ještě zastavme u tzv. přetížených funkcí. Tento koncept je převzatý z jazyka C++ a zajišťuje větší flexibilitu a přehlednost. Nemusíme mít funkce s různými jmény k tomu, abychom udělali stejný úkon, jen v jiném kontextu. Například pro vytváření ploch existuje spousta funkcí s názvem `surface()`. Každá se však používá s jinými typy argumentů, takže nenastává konflikt. Výše zmíněná funkce `time()` má také další variantu. Její hlavička vypadá následovně:

```
real time(path g, pair z, int n=0);
```

Slouží k počítání průsečíků, tentokrát křivky a vodorovné přímky. Od předchozí deklarace se liší argumentem `z` typu `pair`. Odpovídající vodorovná přímka je určena bodem  $(0, z.y)$ . První složka `z` je zde nepodstatná, avšak autoři zde nemohli použít typ `real`, poněvadž by nastal konflikt s předchozí verzí funkce `time()`.

```
real t;
```

```
path p = (0,0)..(2,1)..(0,2);
t = time(p, 1); //1. varianta
t = time(p, (0,1)); //2. varianta
```

Funkce se také mohou nacházet v argumentech nebo být vráceny jinou funkcí. Jejich zápis mezi argumenty vypadá podobně jako jejich deklarace, jen je vynechán název jednotlivých argumentů, tj. je uveden typ návratové hodnoty, název funkce a v závorce jednotlivé typy argumentů. Jako příklad uveďme následující variantu funkce `graph()` ze stejnojmenného balíku:

```
guide graph(picture pic=currentpicture, real f(real),
            real a, real b, int n=ngraph,
            real T(real)=identity,
            interpolate join=operator --);
```

Zde vidíme, že dva argumenty jsou funkce. První povinnou funkcí je zde `f`, která musí vracet typ `real` a přebírat jeden argument typu `real`. Zřejmě se jedná o reálnou funkci jedné reálné proměnné, jíž chceme vykreslit graf. Další funkcí je zde `T` a má stejný návratový typ a typy argumentů jako `f`. Význam se samozřejmě liší, jedná se totiž o transformaci nezávislé proměnné a mezi (implicitně identita).

Pokud má funkce jako návratový typ jinou funkci, musí se předem pojmenovat typ takové funkce pomocí klíčového slova `typedef`. Nejlépe bude vše prezentovat opět na příkladu.

```
typedef real func_type(real);

func_type f(int n){
    real temp(real x){
        return n*sin(x/n);
    }
    return temp;
}
```

Zde klíčové slovo `typedef` říká, že pod názvem `func_type` budeme nyní rozumět typ takové funkce, která přebírá argument typu `real` a rovněž vrací hodnotu stejného typu.

Podobně jako u polí, i funkce můžeme vytvářet anonymní. Takové funkce nemají název, protože je využíváme pouze krátkodobě, většinou jako argument pro jinou funkci. Deklarace anonymní funkce se od obyčejné liší pouze tím, že jí chybí název a před celý výraz je přidáno klíčové slovo `new`.

```
/"klasicky" zpusob
real f(real x){
    return sin(x);
}

draw(graph(f, -2pi, 2pi));
```

```
//s využitím anonymní funkce
draw(graph(new real(real x){ return sin(x);}, -2pi, 2pi));
```

## Cykly

Asymptote má syntaxi pro cykly `for`, `while` a `do` shodnou s C/C++ či Javou, od druhého jmenovaného jazyka si navíc propůjčuje syntaxi pro procházení prvků pole. Následující ukázka kódu prezentuje výpis čísel od 0 do 4 pomocí různých cyklů.

```
//ukazka for, while, do a foreach
for(int i = 0; i < 5; ++i){
    write(i);
}

int i = 0;
while(i < 5){
    write(i);
    ++i;
}

int i = 0;
do{
    write(i);
    ++i;
}while(i < 5);

int [] pole = {0,1,2,3,4};
for(int i : pole){
    write(i);
}
```

## Balíky

Asymptote nabízí spoustu předpřipravených balíčků pro různé účely, po jejichž načtení máme k dispozici celou řadu užitečných funkcí, například balík `graph` pro snadnou tvorbu grafů funkcí, `animation` pro vytváření animací nebo třeba `MetaPost`, obsahující funkce kompatibilní s tímto systémem. Asymptote však není prostředek pouze pro vykreslování grafiky, nabízí také různé matematické funkce, například pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic (balík `ode`), řešení úlohy lineárního programování simplexovou metodou (balík `simplex`), či některé obecnější funkce (balík `math`). Dále si uživatel může balíky sám vytvářet, jsou to obyčejné soubory formátu `.asy` (příklad viz část Nespojité funkce). Jejich vkládání se pak provádí příkazem `import`. Například

```
import three;
```

načte balík pro práci s vektory ve 3D (uložený v souboru `three.asy`). V této části si předvedeme základní balíky pro práci ve 2D i ve 3D.

Občas je nutné načíst nejen balíky programu Asymptote, ale také L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xové balíky. K tomu slouží funkce `usepackage()`:

```
void usepackage(string s, string options="");
```

```
usepackage("amssymb");
```

Hodí se nám tehdy, když v popiskách používáme konstrukce, které i v samotném L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu vyžadují nějaký balík.

### Matematické konstanty a funkce

Zde se již nebudeme zabývat syntaxí, ale uvedeme si základní matematické funkce. Jejich význam však není nijak vázán na to, zda pracujeme ve 2D nebo 3D, proto je tato část umístěna zde. Pro některé uvedené funkce a proměnné je potřeba načíst balík `math` příkazem:

```
import math;
```

Co se týče číselných konstant, používá Asymptote následující:

```
pi = 3.14159265358979;  
I = (0,1); //komplexni jednotka
```

Z elementárních funkcí jsou k dispozici:

```
real sin(real x); //goniometricke funkce  
real cos(real x);  
real tan(real x);  
real asin(real x); //cyklometricke funkce  
real acos(real x);  
real atan(real x);  
real exp(real x); //exponencialni funkce  
real log(real x); //prirozeny logaritmus  
real log10(real x);  
real sqrt(real x); //druha odmocnina  
real cbrt(real x); //treti odmocnina
```

Dále jsou definovány také hyperbolické funkce s jejich inverzemi:

```
real sinh(real x); //hyperbolicke funkce  
real cosh(real x);  
real tanh(real x);  
real asinh(real x);  
real acosh(real x);  
real atanh(real x);
```



K uvedeným funkcím `sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log` a `sqrt` existují také jejich komplexní varianty, jen místo argumentu `real` používají typ `pair`.

Výpočet absolutní hodnoty obstará funkce:

```
real abs(real x); //absolutni hodnota
```

Tato funkce má také varianty pro argumenty typu `pair` a `triple`, vracející velikost příslušných vektorů.

Pro převod mezi stupni a radiány lze využít:

```
real degrees(real radians);  
real radians(real degrees);
```

Pro zaokrouhlování jsou k dispozici:

```
int floor(real x);  
int ceil(real x);  
int round(real x);
```

Faktoriál a kombinační čísla lze vytvořit funkcemi:

```
int factorial(int n);  
int choose(int n, int k);
```

Náhodná čísla můžeme generovat použitím:

```
void srand(int seed); //(nepovinna) inicializace seminkem  
int rand(); //nahodne cele cislo v intervalu [0,randMax]  
real unitrand(); //nahodne cislo v intervalu [0,1]
```

## Práce ve 2D

### Plátna

Vše, co v programu *Asymptote* kreslíme, se odehrává na nějakém plátně. Pro reprezentaci plátna existují dva typy. Jsou jimi `frame` a `picture`. Liší se od sebe tím, že `frame` interpretuje všechny délky v jednotkách bp jazyka *PostScript*, zatímco `picture` umožňuje definovat vlastní jednotky. Ty se pak samy převádějí na jednotky jazyka *PostScript*. Většinou se používá právě typ `picture`.

### Jednotky a typ `picture`

Pokud žádné jednotky nespecifikujeme, všechna čísla se budou chápat v jednotkách `bigpoint` jazyka *PostScript* (1 bp = 1/72 palce). Praktičtější je však nastavit vlastní jednotky v rámci plátna typu `picture`. Slouží k tomu funkce `unitsize`.

```
void unitsize(picture pic=currentpicture,
              real x, real y=x);
```

Pokud nespecifikujeme plátno `pic`, automaticky se použije `currentpicture`. Argumenty `x` a `y` určují, jaké jednotky se použijí ve směru osy `x`, případně `y`. Můžeme tak například napsat:

```
unitsize(1cm);
//stejne jako
//unitsize(1cm,1cm)
```

Vše, co potom vykreslíme na implicitním plátně `currentpicture`, bude v jednotkách centimetrů. Kromě `cm` lze použít také `mm`, `inches`, `bp` a `pt`. Další funkce se zdá být v praxi užitečnější, nastaví totiž výstupní rozměry pro daný obrázek.

```
void size(picture pic=currentpicture, real x, real y=x,
         bool keepAspect=Aspect);
```

Výsledný obrázek nebude mít šířku přesahující `x` a výšku přesahující `y`. Pokud se za proměnnou `x`, příp. `y` předá 0, nebude v daném směru kladeno žádné omezení. Pokud se za proměnnou `keepAspect` použije hodnota `Aspect` nebo `true`, bude zachován poměr stran a obrázek se vykreslí tak, aby šířka ani výška nepřesáhly zadané hranice. Pokud se použije hodnota `IgnoreAspect` nebo `false`, poměr stran se upraví tak, aby šířka i výška obrázku odpovídaly zadaným `x` a `y`.

```
void draw(picture pic=currentpicture, Label L="", path g,
         align align=NoAlign, pen p=currentpen,
         arrowbar arrow=None, arrowbar bar=None,
         margin margin=NoMargin, Label legend="",
         marker marker=nomarker);
```

Do obrázku `pic` vykreslí křivku předanou v parametru `g`. Přitom je možno nastavit pero `p`, případně popisek `L`. Jde o základní funkci pro vykreslování.

Jednotky jsou implementovány jako předdefinované konstanty typu `real` a jsou to násobky `bigpointu`. Například hodnota konstanty `mm` je přibližně 2,83, poněvadž  $1\text{ mm} \approx 2,83\text{ bp}$ . Z tohoto důvodu je při použití `unitsize` nežádoucí, uvádět kdekoliv jinde v kódu jednotky (s výjimkou míst, která jsou na jednotkách plátna nezávislé). Z povahy implementace by totiž takto vynásobená čísla s největší pravděpodobností neodpovídala zamýšlené délce. Ze stejného důvodu je nevhodné pro názvy proměnných používat jednotky.

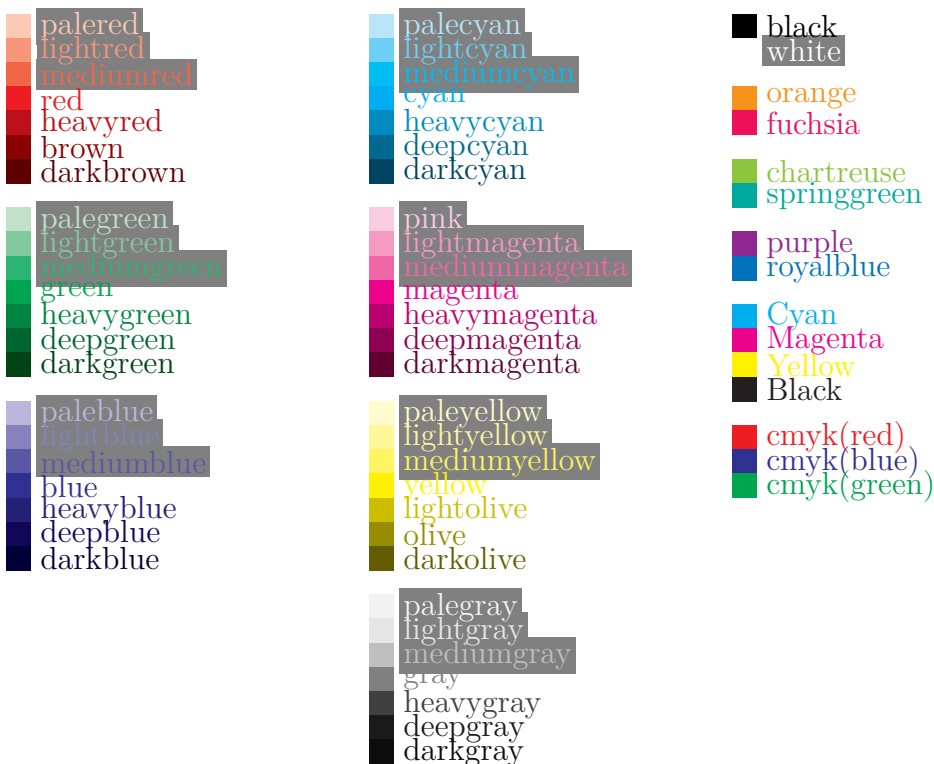
## Pera

Pera hrají při kreslení velmi důležitou roli.. S jejich pomocí uživatel nastaví tloušťku, barvu, velikost písma a mnoho dalších. Pera mají typ `pen` a nejčastěji se používají jako argumenty čtyř základních funkcí pro vykreslování `draw()`,

`fill()`, `clip()` a `label()`. Pokud při kreslení nevedeme žádné pero, je použito `currentpen`. Můžeme také globálně nastavit, aby `currentpen` mělo požadované vlastnosti.

V dalších částech si popíšeme, jak se vytvářejí pera určitých vlastností. Takto vytvořená pera se dají kombinovat binárním operátorem `+`, případně operátorem `*` pro násobení hodnot barevných složek číslem.

## Barvy



Obrázek 3: Barevná paleta

Pera určité barvy můžeme vytvářet na základě RGB i CMYK příslušnými funkcemi.

```
pen rgb(real r, real g, real b);
```

```
pen cmyk(real c, real m, real y, real k);
```

Argumenty *r*, *g*, *b*, případně *c*, *m*, *y*, *k* leží v intervalu [0;1]. Pokud chceme definovat například pero s červenou barvou, můžeme napsat:

```
pen cervena = rgb(1,0,0);
```

Většinou však využijeme předpřipravené palety, případně namícháme barvy pomocí operátoru `+`. Například

```
pen p = red+green;
```

vytvoří žlutou barvu. Následuje přehled předdefinovaných barev.

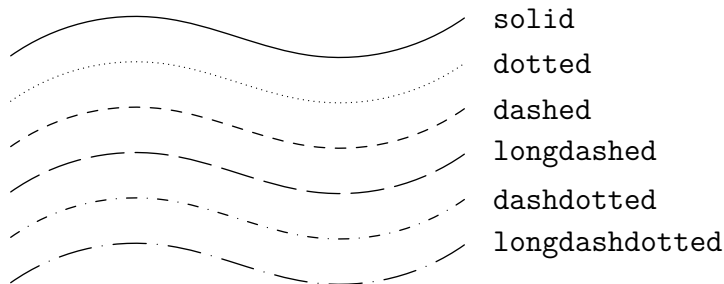
## Typy čar

Typy čar jsou v programu *Asymptote* určeny posloupností čísel typu *real* (polem) spolu s dodatečnými parametry. Uvedme si nejdříve hlavičku funkce pro sestrojení pera s určitým typem čáry. Potom popíšeme význam jednotlivých argumentů.

```
pen linetype(real [] a, real offset=0,  
             bool scale=true, bool adjust=true);
```

Pole čísel *a* odpovídá délkám po sobě jdoucích úseků, kde první číslo udává délku viditelného úseku, druhé číslo pak délku následujícího neviditelného úseku, třetí číslo opět délku následujícího viditelného úseku atd. Zde 0 odpovídá tečce. Argument *offset* určuje počáteční posunutí. Pomocí *scale* nastavíme, jestli se zadané délky úseků mají chápat jako násobky tloušťky čáry (pro *scale=true*). Argument *adjust* zajistí, aby se délky mezer mezi úseky přizpůsobovaly délce dané křivky, takže se nestane, aby křivka skončila mezerou nebo jen částečnou čárkou. Důležité také je, že zadané délky nejsou nijak svázané s jednotkami plátna a jsou tak v jednotkách *bp* jazyka *PostScript*.

Podobně jako u barev i zde *Asymptote* nabízí předdefinované konstanty pro nejpoužívanější typy čar. Implicitně se využívá typ *solid*.



Obrázek 4: Typy čar

Pro lepší pochopení původní definice se ještě podívejme, jak je definován čárkovaný (`dashed`) a čerchovaný (`dashdotted`) typ čar.

```
pen dashed=linetype(new real[] {8,8});
pen dashdotted=linetype(new real[] {8,8,0,8});
```

U obou typů je argument `scale` implicitně roven `true`, a proto se zadané délky budou chovat jako násobky aktuální tloušťky pera `linewidth(p)`. Čárkovaná čára je tedy definovaná tak, že úsek délky  $8 \cdot \text{linewidth}(p)$  je vždy viditelný a následuje ho prázdný úsek délky  $8 \cdot \text{linewidth}(p)$ . Podobně je to s čerchovanou čárou, kde 0 znamená tečku.

## Křivky

Základním útvarem, který budeme v programu *Asymptote* konstruovat, přímo či nepřímo, jsou křivky. Všechny úsečky, grafy funkcí nebo třeba i popisky jsou uloženy jako segmenty kubických křivek. Pro křivky v rovině má *Asymptote* typy `guide` a `path`. Typ `guide` pouze uchovává posloupnost bodů, ale nemá ještě dopočítány všechny údaje (je vhodnější ve fázi sestrojování křivky). Typ `guide` se těsně před vykreslením převádí na typ `path`, ve kterém už jsou dopočítány všechny kontrolní body.

Křivku tvoříme navazováním bodů pomocí vhodných operátorů, které mezi nimi určují způsob interpolace. Pokud má být křivka uzavřená, jako poslední bod uvedeme `cycle`. Pro lineární interpolaci (spojení úsečkou) používáme operátor `--`. Například jednotkový čtverec můžeme vytvořit takto:

```
path ctverec = (0,0)--(1,0)--(1,1)--(0,1)--cycle;
```

Jednotkový čtverec je mimochodem v *Asymptote* předdefinovaný právě tímto způsobem, a to v proměnné `unitsquare`.

Pro interpolaci Bézierovou kubikou používáme operátor `..`; ten se dá použít s různými parametry, popíšeme si ho proto podrobněji.

Bézierova kubika je zadaná celkem čtyřmi kontrolními body. Vždy budeme muset zadat krajní body, kterými prochází. Zbytek může Asymptote dopočítat. Pokud chceme zadat i kontrolní body, použijeme zápis:

```
a .. controls c0 and c1 .. b
```

V případě, že nezadááme kontrolní body přímo, vypadá zápis s parametry takto:

```
a{dir1} .. tension t1 and t2 .. {dir2}b
```

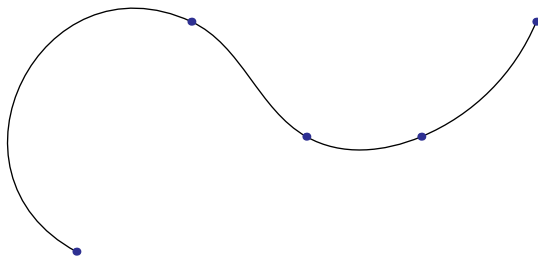
Parametry `dir1` a `dir2` udávají směry tečných vektorů segmentu v prvním a druhém krajním bodě (jsou typu `pair`). Parametry `t1` a `t2` určují míru zakřivení v podobě reálného čísla většího nebo rovného 0,75. Čím větší tato hodnota je, tím víc se tvar blíží přímce. Pokud nejsou zadány, volí se hodnota 1. Žádný z těchto parametrů však zadávat nemusíme, nezadané směry a výsledné kontrolní body se určí pomocí tzv. Hobbyho algoritmu.

Pro samotné vykreslování křivek slouží funkce `draw()`.

```
void draw(picture pic=currentpicture, Label L="",
          path g, align align=NoAlign,
          pen p=currentpen, arrowbar arrow=None,
          arrowbar bar=None, margin margin=NoMargin,
          Label legend="", marker marker=nomarker);
```

Tato varianta vykreslí křivku `g` do plátna `pic`. Před popisem dalších argumentů si uvedme jednoduchý příklad.

```
size(200,0);
pair[] z = {(0,0),(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)};
path p =z[0]..z[1]..z[2]..z[3]..z[4];
draw(p);
dot(z,blue);
```



Obrázek 5: Vykreslení typu `path` spolu s kontrolními body

Mezi další argumenty patří popisek `L` a jeho směr zarovnání `align`. Dále `arrow` umožňuje přidat na křivku šipku. Možné hodnoty jsou vidět na obrázku 6. Každá z těchto šipek jde navíc volat jako stejnojmenná funkce s argumenty určující velikost, tvar apod. Pro více informací doporučujeme balík `plain_arrows`.

```

picture left, right;

size(left,3cm);
size(right,3cm);

path p = (0,0)--(2,0);

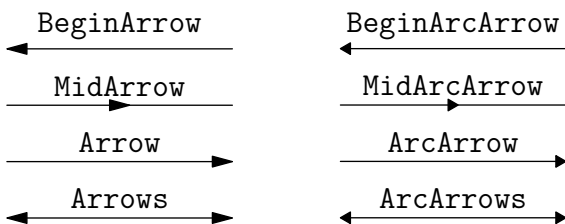
pair align = N;

draw(left, "\tt BeginArrow", p, align, BeginArrow);
draw(left, "\tt MidArrow", shift(0,-0.5)*p, align, MidArrow);
draw(left, "\tt Arrow", shift(0,-1)*p, align, Arrow);
draw(left, "\tt Arrows", shift(0,-1.5)*p, align, Arrows);

draw(right, "\tt BeginArcArrow", p, align, BeginArcArrow);
draw(right, "\tt MidArcArrow", shift(0,-0.5)*p, align, MidArcArrow);
draw(right, "\tt ArcArrow", shift(0,-1)*p, align, ArcArrow);
draw(right, "\tt ArcArrows", shift(0,-1.5)*p, align, ArcArrows);

add(left.fit(), (0,0), 20W);
add(right.fit(), (0,0), 20E);

```



Obrázek 6: Šipky

Použitím `bar` můžeme přidat příčku na konci křivky:

```

size(3cm);

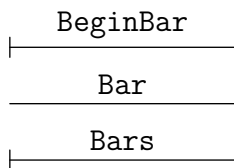
path p = (0,0)--(2,0);

pair align = N;

draw("\tt BeginBar", p, align, bar=BeginBar);
draw("\tt Bar", shift(0,-0.5)*p, align, bar=Bar);

```

```
draw("\tt Bars",shift(0,-1)*p,align,bar=Bars);
```



Obrázek 7: Příčky

Jelikož jsou křivky orientované a často určují nějakou oblast (například pro vyplnění), hodí se nám funkce `reverse` pro změnu parametrizace na opačný směr.

```
path reverse(path p);
```

Další funkce (pro počítání průsečíků apod.) lze nalézt na oficiálních stránkách Asymptote (2004).

## Vyplňování

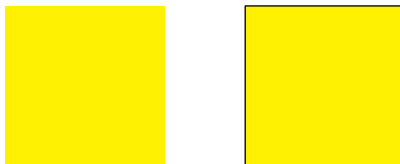
Uzavřené křivky můžeme vyplnit funkcí `fill()`, případně `filldraw()`.

```
void fill(picture pic=currentpicture, path g,  
         pen p=currentpen);
```

```
void filldraw(picture pic=currentpicture, path g,  
             pen fillpen=currentpen,  
             pen drawpen=currentpen);
```

Liší se od sebe pouze tím, že druhá funkce vykreslí i obrys, viz obr. 8.

```
size(150);  
fill(unitsquare,yellow);  
filldraw(shift(1.5,0)*unitsquare,yellow,black);
```



Obrázek 8: Vyplnění funkcemi `fill()` a `filldraw()`



Funkci můžeme předat i křivky, které jsou vytvořené funkcemi pro tvorbu grafů. Následující příklad ilustruje, jak vyplnit oblast mezi grafy funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$  (podrobněji o grafech viz část Grafy funkcí).

```
import graph;

size(250,0);

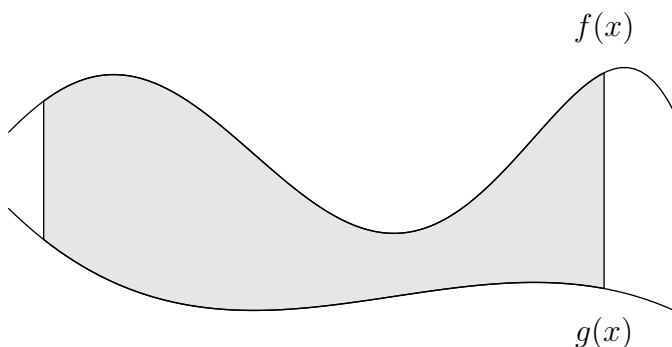
real f(real x){
    return -1/40*x^5+1/4*x^4-2/3*x^3+9/8*x+2;
}

real g(real x){
    return -1/20*x^3+9/20*x^2-6/5*x+2;
}

filldraw(graph(f,0.5,4.5)--graph(g,4.5,0.5)--cycle,
    lightgray);

draw(graph(f,0.25,5),black);
draw(graph(g,0.25,5),black);

label("$f(x)$", (4.5, f(4.5)), 3N);
label("$g(x)$", (4.5, g(4.5)), 3S);
```



Obrázek 9: Vyplnění funkcí fill

Pero nemusí obsahovat jen základní informace jako barvu, ale může definovat i vzor pro vyplnění, kterým může být prakticky libovolný obrázek.

```
import patterns;

size(0,150);
```

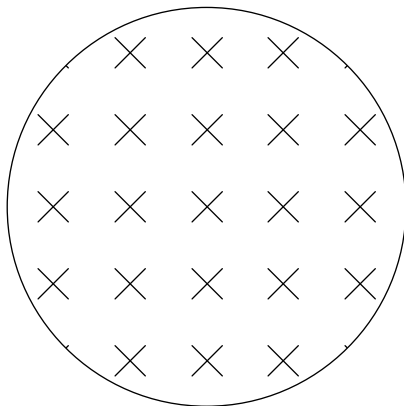
```

//krizek
picture custom;
real h = 2mm;
path[] cross = (-1,-1)--(1,1)^(1,-1)--(-1,1);
draw(custom,scale(h)*cross);

//pridani do vzoru
add("custompattern",custom,(3h,3h));

filldraw(unitcircle,pattern("custompattern"));

```



Obrázek 10: Vyplnění vlastním vzorem

V uvedeném příkladu jsme do vlastního plátna nakreslili křížek. Použitím funkce `add` jsme ho pak přidali do seznamu vzorů. Funkce `pattern` potom vytvořila příslušné pero, se kterým byla vyplněna kružnice. Pro praktické použití máme v balíku `patterns` k dispozici funkce pro vytváření obrázků, které se nám hodí pro různé typy šrafování.

```

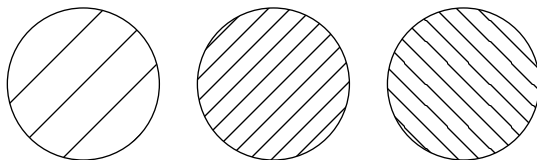
import patterns;

size(200,0);

add("hatch",hatch());
add("hatch2",hatch(2mm));
add("hatchback2",hatch(2mm,NW));

filldraw(unitcircle,pattern("hatch"));
filldraw(shift(2.5,0)*unitcircle,pattern("hatch2"));
filldraw(shift(5,0)*unitcircle,pattern("hatchback2"));

```



Obrázek 11: Šrafování

## Ořezávání

```
void clip(picture pic=currentpicture, path g, stroke=false,
         pen fillrule=currentpen);
```

Funkcí `clip` můžeme oříznout obsah plátna `pic` křivkou `g`. Pro matematickou grafiku jsou však zajímavější následující dvě funkce.

```
void xlimits(picture pic=currentpicture, real min=-infinity,
            real max=infinity, bool crop=NoCrop);
```

```
void ylimits(picture pic=currentpicture, real min=-infinity,
            real max=infinity, bool crop=NoCrop);
```

```
void crop(picture pic=currentpicture);
```

Tyto funkce nastaví meze obrázku ve směrech os  $x$  a  $y$  a následně volání funkce `crop` ořeže existující křivky na plátně podle zadaných mezí. To je praktické zejména při kreslení grafů, kdy chceme, aby graf nepřesahoval zadané meze. Použití lze vidět např. na obrázku 14 v části Nespojité funkce.

## Transformace

Pro účely afinních transformací existuje typ `transform`. Proměnnou tohoto typu můžeme vynásobit zleva libovolnou proměnnou typu `pair`, `guide`, `path`, `pen`, `string`, `frame` nebo `picture`. Po provedení dané transformace obdržíme proměnnou stejného typu. Popišme si, co transformace pro konkrétní typy znamená.

**pair** -- transformace se aplikuje na bod v rovině.

**guide, path** -- transformace se aplikuje na všechny body daných křivek včetně kontrolních bodů (Bézierovy křivky jsou však invariantní vůči afinním transformacím).

**string** -- převede se na typ `Label`, což není nic jiného než křivka, na kterou se následně aplikuje transformace.

**frame, picture** -- transformace se aplikuje na obsah plátna (těsně před vykreslením).

Uživatel si samozřejmě může definovat vlastní transformace. Obecná afinní transformace

$$t(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

se vytvoří příkazem:

```
transform t = (b1,b2,a11,a12,a21,a22);
```

Pro jednodušší práci jsou nejpoužívanější transformace předdefinovány. Následuje seznam a popis funkcí, které vytvářejí a vracejí příslušné transformace.

```
transform identity();
```

Identická transformace. Slouží víceméně jen proto, aby se dala použít jako implicitní transformace.

Translace (posunutí) určené buď vektorem **z**, nebo jednotlivými složkami **x**, **y** zvlášť:

```
transform shift(pair z);
transform shift(real x, real y);
```

Otočení o úhel **angle** (ve stupních) kolem bodu **z**:

```
transform rotate(real angle, pair z=(0,0));
```

Změna měřítka, opět je možno zadat více způsobů. Funkce **scale()** mění měřítko ve směru obou os. Zbylé funkce umožňují měnit měřítko pro obě osy zvlášť:

```
transform scale(real s);
transform scale(real x, real y);
transform xscale(real x);
transform yscale(real y);
```

Převrácení kolem přímky určené body **a** a **b**:

```
transform reflect(pair a, pair b);
```

K dané transformaci **t** můžeme získat inverzní transformaci pomocí funkce **inverse**:

```
transform inverse(transform t);
```

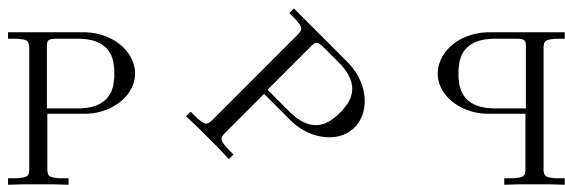
Transformace můžeme skládat, a to pomocí operátoru násobení (**\***). Na závěr uveďme ilustrační příklad.

```
size(0,200);
Label l = scale(7)*"P";
```

```
//pismeno "P"
label(1);

//otocene "P" o -45 stupnu
label(shift(80,0)*rotate(-45)*1);

//prevracene "P"
label(shift(160,0)*reflect((0,0),(0,1))*1);
```



Obrázek 12: Transformace

## Grafy funkcí

Funkce dané explicitně

Při vykreslování grafů funkcí budeme využívat balík `graph`. Pro vykreslení reálné funkce v explicitním tvaru  $y = f(x)$  využijeme následující variantu funkce `graph()`:

```
guide graph(picture pic=currentpicture, real f(real), real a,
            real b, int n=ngraph, real T(real)=identity,
            interpolate join=operator --);
```

Funkce spočítá funkční hodnoty podle zadaných parametrů a vrátí vytvořenou křivku. Argument `f` musí být funkce s jedním argumentem typu `real` a vracející hodnotu stejného typu (tj. odpovídající reálná funkce jedné reálné proměnné). Argumenty `a` a `b` určují meze na ose  $x$ . Mezi nepovinnými argumenty můžeme zadat plátno `pic`, případně dělení `n`. Předvedme si použití na vykreslení grafu funkce  $f(x) = e^x$ .

```
import graph;

size(200);

real f(real x){
```

```

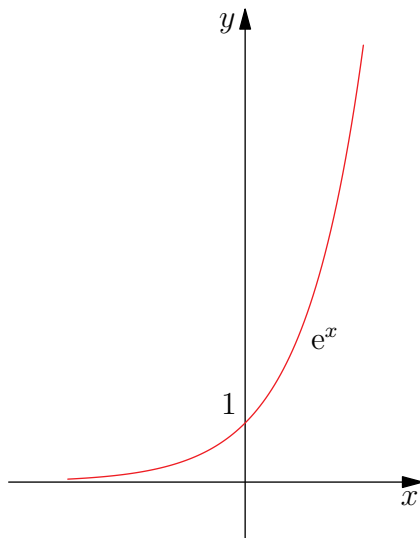
    return exp(x);
}

draw(graph(f, -3, 2), red);

xaxis("$x$", -4, 3, Arrow);
yaxis("$y$", -1, 8, Arrow);

labely("$1$", 1, NW);
label("$\mathrm{e}^x$", (1, f(1)), SE);

```



Obrázek 13: Funkce  $f(x) = e^x$

### Nespojité funkce

V případě nespojitých funkcí (příp. funkcí nedefinovaných na celém zadaném intervalu) je situace komplikovanější. Program Asymptote totiž při počítání funkčních hodnot v bodech, kde není definována funkční hodnota, vyvolá chybu a graf se nevykreslí. U nespojitých funkcí mu naopak chybí informace o tom, že v daném místě nemá části grafu spojovat. To se dá vyřešit několika způsoby.

Řešením prvního problému by mohlo být přidání definic funkčních hodnot pro ty body, kde funkční hodnota není definována. Jedná se o však o zcela nevhodné řešení, protože pak dostáváme jiný graf. Trochu lepším řešením je vykreslovat části grafu zvlášť, a to na intervalech, kde je funkce definována. Řešením, které

umožňuje vypořádat se i s druhým zmíněným problémem, je argument `cond` ve funkci `graph()`. Jeho hlavička je očekávána ve tvaru:

```
bool3 cond(real x);
```

Tato, námi zadaná funkce umožňuje sdělovat funkci `graph()`, které hodnoty na ose  $x$  smí či nesmí vyhodnocovat. To vše navíc tak, že bude vědět, kdy začíná další větev grafu, takže nedojde k jejich propojení. Pro lepší pochopení následujícího příkladu (a pro opětovnou využitelnost) si definujeme vlastní jednoduchý balík `discont`, který za nás provede výše popsany postup. My pouze specifikujeme seznam intervalů, na nichž není funkce spojitá nebo není definována (tj. intervaly, kde její graf nechceme vykreslovat).

```
//discont.asy
//verejne promenne pro nastaveni
pair[] discontIntervals;
int discontLastIndex = 0;

//funkce pouzitelna jako argument cond v graph()
bool3 discontCond(real x){
    if (discontLastIndex >= discontIntervals.length){
        //za poslednim intervalem nespojitosti
        return true;
    }

    if (x <= discontIntervals[discontLastIndex].x){
        //stale vlevo od pristiho intervalu nespojitosti
        return true;
    } else if (x >= discontIntervals[discontLastIndex].y) {
        //interval nespojitosti prekrocen
        ++discontLastIndex;
        return default;
    }

    //v okoli bodu nespojitosti
    return false;
}
```

Balík umístíme do stejné složky s hlavním souborem, příp. do složky s ostatními balíky programu `Asymptote`. V hlavním souboru balík načteme, nastavíme příslušný seznam intervalů `discontIntervals` a nakonec funkci `graph()` předáme jako argument funkci `discontCond` z našeho balíku. Seznam je implementován jako pole hodnot typu `pair`, kde jednotlivé složky značí krajní body daného intervalu (bod můžeme zadat jako interval s totožnými krajními body). V případě více grafů navíc před každým kreslením vynulujeme pozici aktuálního intervalu, a to příkazem `discontLastIndex = 0`. Ukažme si použití na funkci  $y = \lfloor x \rfloor$ .

```
import graph;
import discont;
```

```

size(200);

real f(real x){
    return floor(x);
}

//intervaly kolem hodnot -4,-3,...,4
real eps = 0.01;
for(int i=-4;i<=4;++i){
    discontinervals.push((i-eps,i+eps));
}

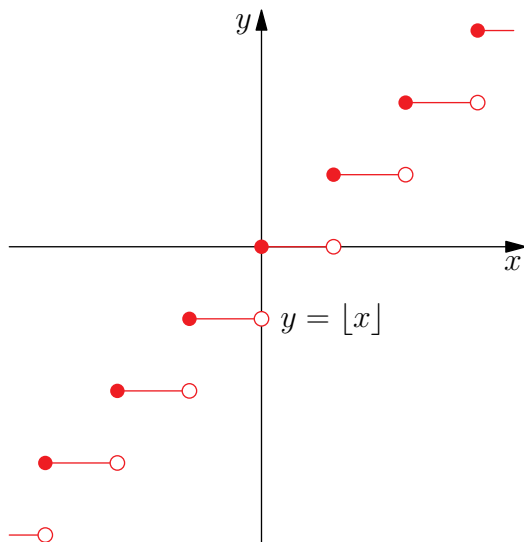
draw(graph(f,-3.5,3.5,n=2000,discontCond),red);

path circle = scale(0.1)*unitcircle;
for(int i=-3;i<=3;++i){
    fill(shift((i,f(i)))*circle,red);
    filldraw(shift((i,f(i)-1))*circle,white,red);
}

xaxis("$x$",Arrow);
yaxis("$y$",Arrow);

label("$y=\lfloor x \rfloor$",(0,-1),2E);

```



Obrázek 14: Graf funkce  $y = \lfloor x \rfloor$



V seznamu jsme tedy jako intervaly nespojitosti zadali  $(n - \epsilon, n + \epsilon)$  pro  $n = -4, -3, \dots, 4$  a  $\epsilon = 0,01$ . V těch se při sestrojování grafu nevyhodnocovaly funkční hodnoty a zároveň byly okolní větve správně odděleny. Pro použití u jiné funkce stačí pouze nahradit pole `discontIntervals` vlastními intervaly či body. Uživatel musí zajistit, aby intervaly byly disjunktní a seřazené dle krajních hodnot od nejmenší po největší. Následující příklad ukazuje použití na gamma funkci

$$y = \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (2)$$

která v bodech  $-4, -3, \dots, 0$  není definována.

```
import graph;
import discont; //vlastni balik

size(0,200,IgnoreAspect);

real f(real x){
    return 1/x;
}

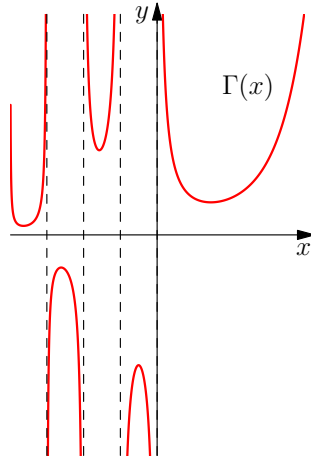
//intervaly kolem hodnot -4,-3,-2,-1 a 0
real eps = 0.01;
for(int i=-4;i<=0;++i){
    discontIntervals.push((i-eps,i+eps));
}

draw(graph(gamma,-4,4,n=2000,discontCond),red+1.0);

ylimits(-6,6);
crop();
xaxis("$x$",Arrow);
yaxis("$y$",Arrow);

for(int i=-3;i<=0;++i){
    xequals(i,dashed);
}

label("$\Gamma(x)$", (3.5, gamma(3.5)), 2NW);
```



Obrázek 15: Graf funkce  $y = \Gamma(x)$

Křivka zadaná parametricky

Graf křivky  $f(t) = (x(t), y(t))$  vytvoříme následující verzí funkce `graph()`:

```
guide graph(picture pic=currentpicture, real x(real),
            real y(real), real a, real b,
            int n=ngraph, real T(real)=identity,
            interpolate join=operator --);
```

Od předešlé verze `graph()` se liší jen možností zadat dvě reálné funkce. Například graf asteroidy, zadané parametricky

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

můžeme vykreslit takto:

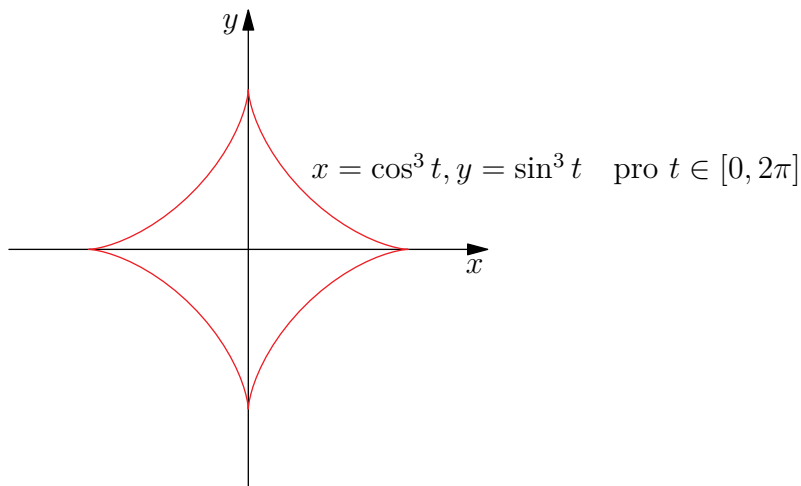
```
import graph;

size(0,180);

real x(real t) {return cos(t)^3;}
real y(real t) {return sin(t)^3;}

label("$x=\cos^3 t, \ y=\sin^3 t$
      \quad\mbox{pro } $t\in [0,2\pi]$",
      (x(pi/4),y(pi/4)),NE);

draw(graph(x,y,0,2pi),red);
xaxis("$x$",-1.5,1.5,Arrow);
yaxis("$y$",-1.5,1.5,Arrow);
```



Obrázek 16: Parametrická křivka

### Implicitní funkce

Graf funkce v implicitním tvaru  $F(x, y) = 0$  můžeme vykreslit pomocí funkce `contour` ze stejnojmenného balíku. Ta slouží pro vytváření vrstevnic ve tvaru  $F(x, y) = C$ .

```
guide [] contour(real F(real, real), pair a, pair b,
    real [] c, int nx=ngraph, int ny=nx,
    interpolate join=operator --,
    int subsample=1);
```

V poli `c` předáváme množinu hodnot pro  $C$ , pro které chceme vytvořit vrstevnice  $F(x, y) = C$ , v rozsazích hodnot od `a` do `b`.

```
import contour;
import graph;

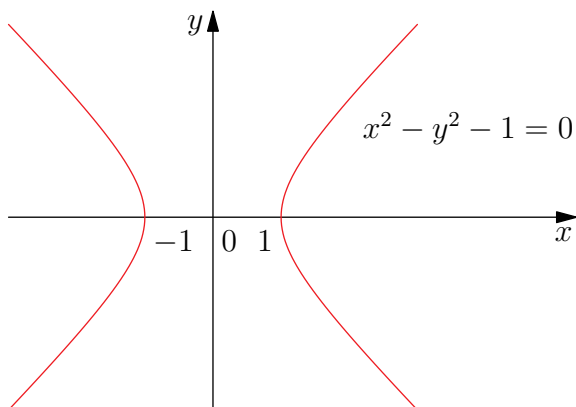
size(0,150);

real f(real x, real y){
    return x^2-y^2-1;
}

draw(contour(f,(-3,-3),(3,3),new real []{0},join=operator ..),red);

xaxis("$x$",Arrow);
yaxis("$y$",Arrow);
label("$x^2-y^2-1=0$",(2,sqrt(3)),2SE);
```

```
labelx(-1,SE);
labelx(0,SE);
labelx(1,SW);
```



Obrázek 17: Implicitní funkce

Křivka zadaná v polárních souřadnicích

Křivku v polárních souřadnicích, zadanou ve tvaru  $r = r(\varphi)$  pro  $\varphi \in [a, b]$ , můžeme vytvořit pomocí funkce `polargraph` z balíku `graph`.

```
guide polargraph(picture pic=currentpicture,
                 real r(real), real a,
                 real b, int n=ngraph,
                 interpolate join=operator --);
```

Křivku zadanou v polárních souřadnicích jako  $r = \varphi$  můžeme vytvořit například takto:

```
import graph;

size(0,150);

real r(real phi){
    return phi;
}

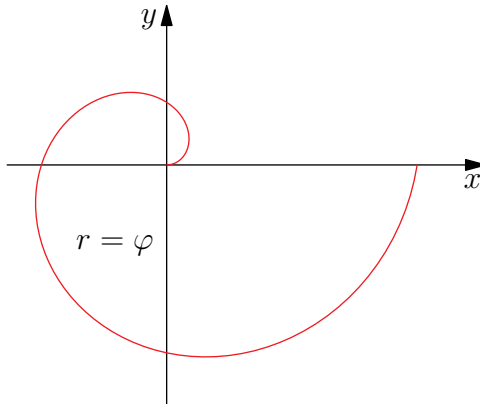
draw(polargraph(r,0,2pi),red);

xaxis("$x$",-4,8,Arrow);
yaxis("$y$",-6,4,Arrow);
```

```

pair polarpoint(real r, real phi){
    return (r*cos(phi),r*sin(phi));
}
label("$r=\varphi$", polarpoint(5pi/4,r(5pi/4)),3NE);

```



Obrázek 18: Křivka v polárních souřadnicích

Osy

Pro vykreslení os nabízí program Asymptote několik funkcí. Především jsou to `xaxis()` a `yaxis()`.

```

void xaxis(picture pic=currentpicture, Label L="",
    axis axis=YZero, real xmin=-infinity,
    real xmax=infinity, pen p=currentpen,
    ticks ticks=NoTicks, arrowbar arrow=None,
    bool above=false);

```

```

void yaxis(picture pic=currentpicture, Label L="",
    axis axis=XZero, real ymin=-infinity,
    real ymax=infinity, pen p=currentpen,
    ticks ticks=NoTicks, arrowbar arrow=None,
    bool above=false, bool autorotate=true);

```

Jak je vidět z deklarací, nemají tyto funkce žádné povinné argumenty. Pro základní osy bez popisek a šipek je tak možné zavolat pouze:

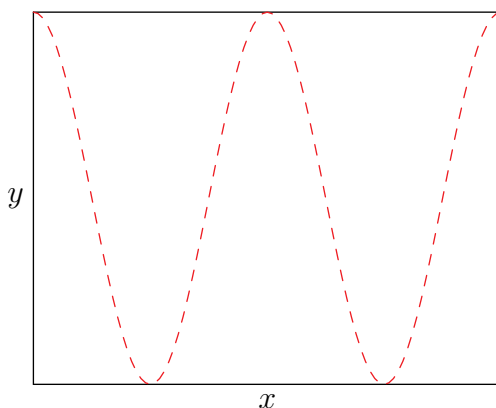
```

xaxis();
yaxis();

```

Popišme zde zbylé argumenty pro osu  $x$  (osa  $y$  analogicky). Specifikovat můžeme popisek `L`, rozsah vykreslení `xmin` a `xmax`. Dále můžeme nastavit styl šipky `arrow`, pero `p`, argument `above` určující, zda se má osa vykreslit nad již existující objekty na plátně. Argument `axis` určuje umístění osy. Implicitně se osa  $x$  vykreslí na přímce  $y = 0$ . Pomocí tohoto argumentu je možné nechat vykreslit osu nahoře anebo dole na plátně. Slouží k tomu hodnoty `Bottom`, `Top` a `BottomTop` (pro osu  $y$  jsou to `Left`, `Right` a `LeftRight`). Běžné použití os je vidět na obrázku 16. Zde si ukažme umístění os do krajů.

```
import graph;
size(0,150);
draw(graph(new real(real x){return 5*cos(x);},-2pi,2pi),dashed+red)
;
xaxis("$x$",axis=BottomTop);
yaxis("$y$",axis=LeftRight);
```



Obrázek 19: Umístění os

Posledním argumentem je `ticks`, tj. čárkování. Pro základní použití máme několik předdefinovaných hodnot: `LeftTicks`, `RightTicks` a `Ticks`. V takovém případě čárky budou nalevo, napravo anebo obojí. Širší možnosti nabízejí stejnojmenné funkce `LeftTicks()`, `RightTicks()` a `Ticks()`. Význam argumentů je u všech analogický, popišme si proto jen první z nich.

```
ticks LeftTicks(Label format="", ticklabel ticklabel=null,
                bool beginlabel=true, bool endlabel=true,
                int N=0, int n=0, real Step=0, real step=0,
```

```

bool begin=true, bool end=true,
tickmodifier modify=None, real Size=0,
real size=0, bool extend=false,
pen pTick=nullpen, pen ptick=nullpen);

```

Použitím `N` uvádíme, na kolik intervalů se osa rozdělí velkými čárkami. S `n` je to podobné, udává počet intervalů mezi dvěma velkými čárkami, které budou odděleny malými čárkami. Jiný způsob je specifikovat vzdálenosti pomocí `Step` a `step` mezi velkými, resp. malými čárkami. Parametry `Size` a `size` určují velikost čárek.

```

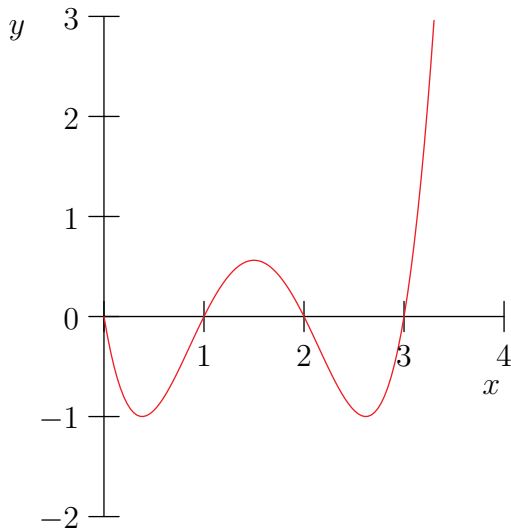
import graph;
size(0,200);

real f(real x){
    return x*(x-1)*(x-2)*(x-3);
}

draw(graph(f,0,3.3),red);

xaxis("$x$",0,4,Ticks(beginlabel=false,n=1));
yaxis("$y$",-2,3,Ticks(n=1));

```



Obrázek 20: Čárkování na osách

## Popisky

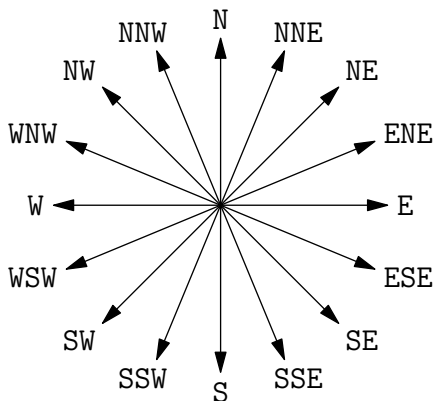
Pro vložení popisku na zadanou souřadnici můžeme použít funkci `label()`, pro vykreslení podél os funkce `labelx()` a `labeledy()`.

```
void label(picture pic=currentpicture, Label L,  
           pair position, align align=NoAlign,  
           pen p=nullpen, filltype filltype=NoFill);
```

```
void labelx(picture pic=currentpicture, Label L="",  
            real x, align align=S, string format="",  
            pen p=nullpen);
```

```
void labeledy(picture pic=currentpicture, Label L="",  
              real y, align align=W, string format="",  
              pen p=nullpen);
```

Rozeberme si nejprve funkci `label()`. Ta má jako povinné argumenty pouze popisek `L` (který můžeme zadat jako typ `string`) a souřadnice pro vykreslení `position`. Důležitý je také argument `align`, který určuje, v jakém směru a vzdálenosti od zadané pozice má být popisek umístěn. Většinou se používají konstanty odpovídající světovým stranám v angličtině (viz obr. 21), příp. jejich násobky.



Obrázek 21: Přehled předdefinovaných směrů

Pro vykreslování popisků podél os využitím `labelx()`, příp. `labeledy()` stačí zadat směr zarovnání a pozici na dané ose. Pokud například na ose `y` budeme chtít v bodě `y = 1` vykreslit popisek 1, můžeme použít jednu z variant:

```
labeledy(1, E);  
label("$1$", (0, 1), E);
```

Pro další příklady odkazujeme na ukázky v předchozích částech.



## Práce ve 3D

V této části uvedeme postupy pro generování 3D grafiky. Většinou se bude jednat o obdobu toho, co již bylo napsáno v předchozí části.

Popišme stručně, jak program Asymptote pracuje při generování 3D grafiky pro PDF dokumenty. Nejprve se vygeneruje 3D model ve formátu PRC<sup>2</sup>. Pokud pracujeme v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu, vygeneruje se také náhledový obrázek. Ten se při další kompilaci L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu automaticky vloží do dokumentu. Scéna se pak aktivuje až po kliknutí na tento obrázek. Někdy však můžeme chtít dokument bez interaktivního 3D modelu (kvůli velikosti, nebo protože tam není potřebný či je přímo nežádoucí). V takovém případě stačí přidat na začátek `asy` bloku pro daný obrázek příkaz:

```
settings.prc = false;
```

Jindy naopak můžeme chtít, aby se v dokumentu nacházel jen samotný model, tj. bez náhledového obrázku. V takovém případě stačí do kódu obrázku na začátek přidat:

```
settings.embed = false;
```

Ve 3D se také neobejdeme bez balíku `three`, který definuje zobecněné typy známé z 2D. Proto se téměř v celé této kapitole předpokládá jeho načtení:

```
import three;
```

### Kamera

Nastavení kamery se provádí pomocí promítání typu `projection`. Promítání se mění pomocí proměnné `currentprojection`, kterou můžeme nastavit na rovnoběžné nebo perspektivní promítání.

```
orthographic(triple camera, triple up=Z,  
             triple target=0, real zoom=1,  
             pair viewportshift=0, bool showtarget=true,  
             bool center=false);
```

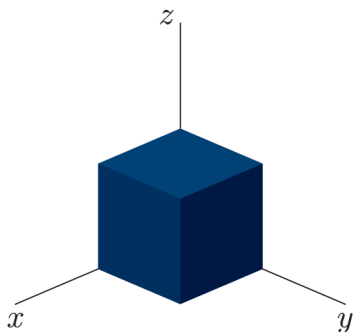
```
perspective(triple camera, triple up=Z,  
            triple target=0, real zoom=1,  
            real angle=0, pair viewportshift=0,  
            bool showtarget=true, bool autoadjust=true,  
            bool center=autoadjust);
```

Kamera bude umístěna do bodu (příp. ve směru bodu pro rovnoběžné promítání) `target+camera`, natočena směrem k `target`. Vektor `up` na obrazovce určuje směr

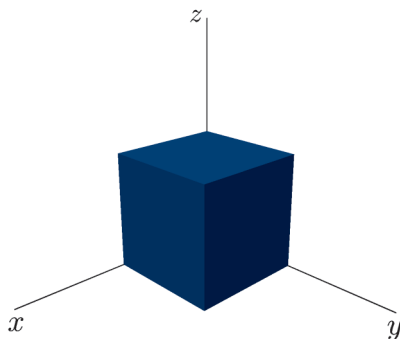
---

<sup>2</sup>Viz Specifikace formátu PRC (2008).

nahoru (implicitně  $(0,0,1)$ ). Oběma těmito funkcím můžeme zadat jednotlivé složky vektoru **camera** zvlášť, výsledek je ale stejný. Pokud neuvedeme žádné promítání, použije se `perspective(5,4,2)`.



Obrázek 22: `orthographic(3,3,2)`



Obrázek 23: `perspective(3,3,2)`

Tím možností promítání nekončí. K dispozici je dále kosoúhlé promítání `obliqueX`, `obliqueY`, `obliqueZ`, případně si uživatel může definovat vlastní. Pro vyčerpávající popis viz oficiální stránky Asymptote (2004).

## Světla

Nastavení světel je reprezentováno typem `light`, který je zadáván ve vykreslovacích příkazech. Pokud jej nezádáme, využije se `currentlight`, které je implicitně nastaveno na `Headlamp`. Další předdefinovaná světla jsou `Viewport`, `White` a pro scénu bez světel `nolight` (přesněji pro scénu bez stínů). Pro vlastní osvětlení můžeme využít funkci `light`:

```
light light(pen diffuse=white, pen ambient=black,  
            pen specular=diffuse, pen background=nullpen,  
            bool viewport=false, real x, real y, real z);
```

To umožňuje nastavit pera (především barvy) `diffuse`, `ambient`, `specular` a pero pro pozadí – `background`. Argument `viewport` uvádí, zda se má zdroj světla pohybovat společně s pohybem kamery. Zbylé argumenty určují souřadnice cíle světla. Pokud chceme ve scéně používat jedno nastavení světel, například `nolight`, stačí na začátku kódu uvést příkaz:

```
currentlight = nolight;
```



Obrázek 24: nolight



Obrázek 25: White



Obrázek 26: Headlamp



Obrázek 27: Viewport

## Pera

Pro většinu kreslení ve 3D se využívá typ `pen`, známý ze 2D (viz část Pera). Pro některé případy však balík `three_light` (importován balíkem `three`) zavádí rozšířený typ `material`. Ten uchovává především 4 pera/barvy `diffuse`, `ambient`, `emissive` a `specular` (uloženo v podobě per, umožňuje definovat i vzor). Dále uchovává (ne)průhlednost `opacity` a lesklost `shininess`. Materiál těchto vlastností vytvoříme pomocí:

```
material material(pen diffusepen=black, pen ambientpen=black,
                 pen emissivepen=black,
                 pen specularpen=mediumgray,
                 real opacity=opacity(diffusepen),
                 real shininess=defaultshininess);
```

Většinou si vystačíme s materiálem indukovaným z pera typu `pen`. Takový materiál pak převezme zadané pero pro popis `diffuse` barvy a zbylé hodnoty doplní implicitními. Provedeme to například takto:

```
material m = black; //black je typu pen
```

Případně předáme typ `pen` přímo v místě, kde se zadává materiál, a převod se provede automaticky.

Zastavme se zde ještě u balíku `palette`. Ten nám umožňuje vykreslit oblasti či plochy se zadanou (nejen) barevnou paletou. Můžeme tak například zvýraznit výškové rozdíly v grafu, jak ilustruje následující ukázka. Více informací o tomto balíku viz oficiální stránky *Asymptote* (2004).

```
import graph3;
import palette;

size(250, IgnoreAspect);

currentprojection=orthographic(2,4,1);
currentlight=Viewport;

real f(pair z) {
    real x=z.x,y=z.y;
    return sin(x)*sin(y);
}

surface s=surface(f,(0,0),(2pi,2pi),40,Spline);
s.colors(palette(s.map(zpart),Rainbow()));

draw(s);
```

## Křivky

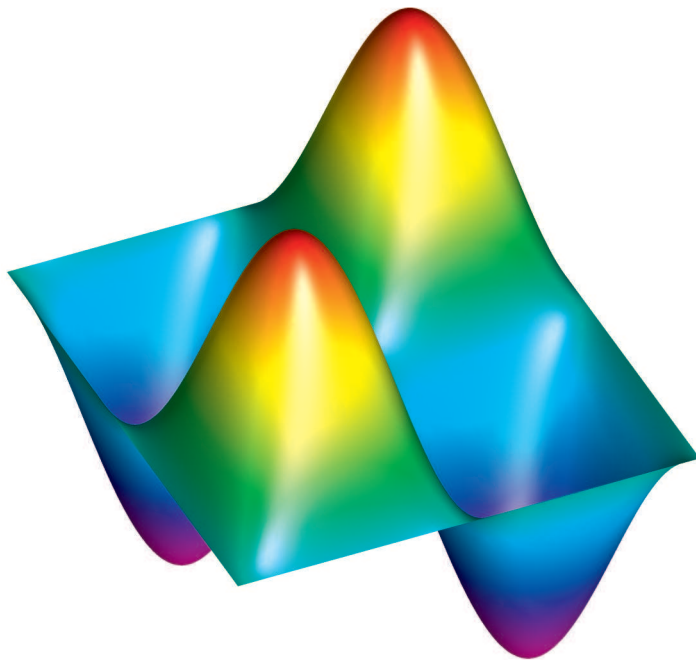
Stejně jako ve 2D je i ve 3D základním kamenem všeho křivka. Balík `three` definuje typy `guide3` a `path3`, se kterými se pracuje téměř identicky jako s jejich 2D verzemi `guide` a `path`.

Stejně jako tomu bylo ve 2D, i zde můžeme při vykreslování dané křivky specifikovat typ šipky, případně příčky. Ty zadáváme při vykreslování pomocí `draw()` nebo při používání nějaké vyšší funkce jako například `graph()` (viz Grafy funkcí). Použitelné hodnoty jsou `BeginArrow3`, `MidArrow3`, `EndArrow3`, `Arrow3` a `Arrows3` pro obyčejné šipky, dále `BeginArcArrow3`, `EndArcArrow3`, `ArcArrow3`, `MidArcArrow3` a `ArcArrows3` pro šipky s kratším hrotem. Pro příčky slouží `None`, `Blank`, `BeginBar3`, `EndBar3` a `Bar3`.

Více o křivkách vytvořených ze zadaného předpisu viz část Grafy funkcí.

## Transformace

Transformace ve 3D se velice podobají těm ve 2D. Jejich typ je `transform3`. Uvedme si zde jen v krátkosti seznam nejdůležitějších z nich.



Obrázek 28: Využití balíku palette

```
transform3 shift(triple v);
```

```
transform3 xscale3(real x);  
transform3 yscale3(real y);  
transform3 zscale3(real z);  
transform3 scale3(real s);  
transform3 scale(real x, real y, real z);
```

```
transform3 rotate(real angle, triple v);  
transform3 rotate(real angle, triple u, triple v);
```

```
transform3 reflect(triple u, triple v, triple w);
```

Použití lze vidět, mimo jiné, na obr. 39 a 40.

## Plochy

Plochy jsou v balíku `three` reprezentovány typem `surface`. Zde jsou uloženy jako pole Bézierových plátů (typ `patch`). Funkce v balících pro práci ve 3D často produkují typ `surface`, případně takový typ, který se na typ `surface` převádí, když je to potřeba (viz část Rotační tělesa). Následující funkce slouží pro vytvoření plochy výčtem kontrolních bodů.

```
surface surface(triple [][] P,
               triple[][] normals=new triple[][],
               pen[][] colors=new pen[][],
               bool3 planar=default);
```

Tato varianta je vhodná pro případ, kdy chceme zadat plochu výčtem všech kontrolních bodů všech Bézierových plátů. Trojrozměrné pole `P` se očekává jako pole plátů, kde je každý z plátů očekáván jako pole čtyř čtveřic bodů. Dále lze pro rohové body nastavit normálové vektory `normals` a také barvy `colors`. Následuje ukázka vytvoření jednoho Bézierova plátu zadáním kontrolních bodů.

```
import three;

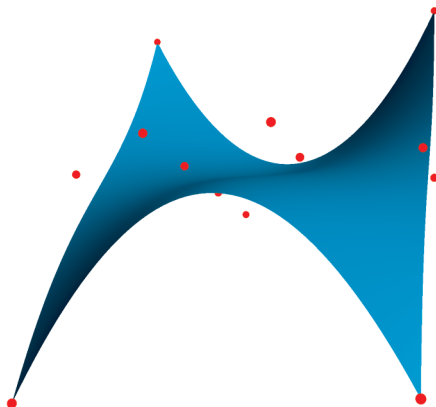
size(0,150);

currentprojection = perspective(5,2,-1);

triple[][] P={
  {
    {(0.0, 0.0, 1.0),(0.5, 0.0, 0.0),
     (1.0, 0.0, 0.0),(1.5, 0.0, -1.0)},},
  {(0.0, 0.5, 0.0),(0.5, 0.5, 0.0),
   (1.0, 0.5, 0.0),(1.5, 0.5, 0.0)},},
  {(0.0, 1.0, 0.0),(0.5, 1.0, 0.0),
   (1.0, 1.0, 0.0),(1.5, 1.0, 0.0)},},
  {(0.0, 1.5, 1.0),(0.5, 1.5, 0.0),
   (1.0, 1.5, 0.0),(1.5, 1.5, -1.0)},}
};

draw(surface(P),cyan);

for(int i=0;i<4;++i)
  for(int j=0;j<4;++j)
    dot(P[0][i][j],red);
```



Obrázek 29: Bézierův plát zadán šestnácti kontrolními body

Plochy lze dále vytvářet generováním grafu funkce, vytažením ze zadaných křivek či rotací křivek, jak ukážeme v následujících částech.

## Grafy funkcí

Při kreslení grafů funkcí v prostoru využijeme balík `graph3`<sup>3</sup>, jenž je obdobou balíku `graph` pro kreslení grafů funkcí v rovině.

Funkce  $f(x, y)$

Graf funkce dvou proměnných vykreslíme tak, že pomocí funkce z balíku `graph3` vygenerujeme Bézierovu plochu typu `surface`, kterou posléze vykreslíme příkazem `draw`. Použijeme k tomu následující funkci:

```
surface surface(real f(pair z), pair a,
               pair b, int nx=nmesh, int ny=nx,
               splinetype xsplintype,
               splinetype ysplintype=xsplintype,
               bool cond(pair z)=null);
```

Povinné argumenty jsou zde funkce dvou proměnných `f` a meze `a` (dolní meze) a `b` (horní meze). Celočíslné argumenty `nx` a `ny` určují dělení ve směru os `x` a `y`. Ukažme si použití na příkladu funkce  $f(x, y) = |xy|^2$ :

```
import graph3;
size(200,200,keepAspect=false);
```

<sup>3</sup>Balík `graph3` v sobě již zahrnuje načítání balíku `three`, a ten tak není nutno načítat zvlášť.

```

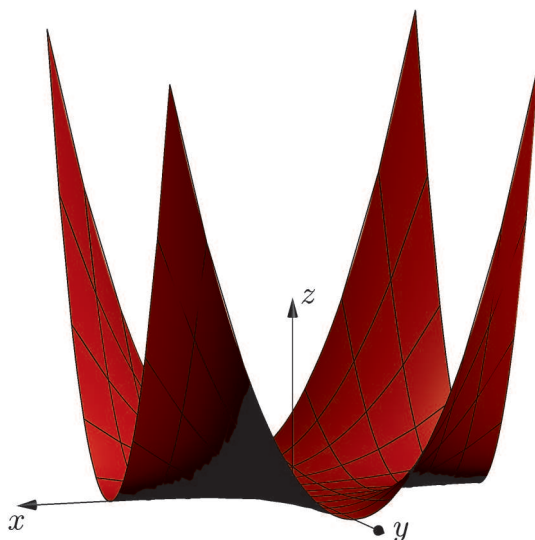
currentprojection=orthographic(3,9,5);

real f(pair z){
  real x=z.x,y=z.y;
  return abs(x*y)^2;
}

draw(surface(f,(-2,-2),(2,2),xsplinetype=Spline),
red, meshpen=black+0.5);

xaxis3("$x$",-2,3,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,3,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,7,Arrow3);

```



Obrázek 30: Funkce  $f(x, y) = |xy|^2$

### Nespojité funkce

Pro nespojité funkce je v současné verzi programu Asymptote 2.14 pouze mizivá podpora a výsledky nevypadají příliš povedeně. Existuje sice stejný argument `cond`, jako byl popsán v části Nespojitá funkce na straně 30, avšak graf je zpravidla velmi nekvalitní („zubatý“).

Proto doporučujeme použít vhodné parametrické vyjádření plochy či rozdělení plochy na části. Jedná-li se o odstranitelnou nespojitost, je možné také rozšíření definice funkce, jak ukazuje druhý řádek těla funkce v následujícím příkladu grafu



funkce  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ .

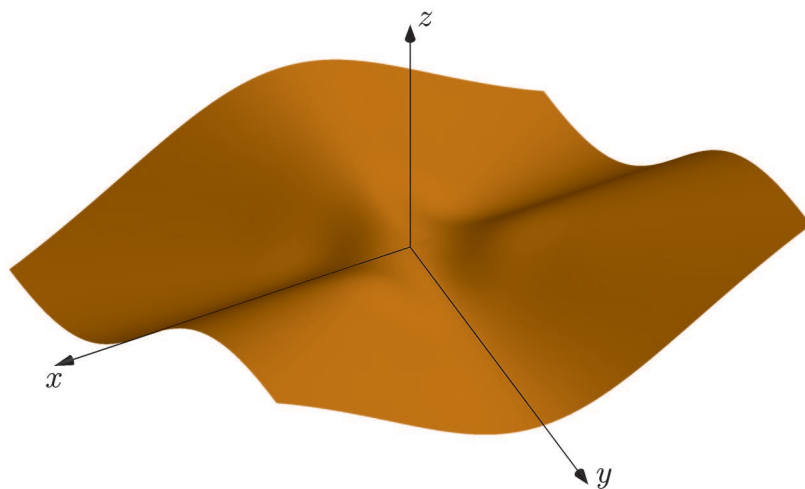
```
import graph3;

size(300);
currentprojection=orthographic(3,6,6);

real f(pair z){
    real x=z.x,y=z.y;
    if (x==0.0 && y==0.0) return 0;
    return (x^2*y)/(x^2+y^2);
}

draw(surface(f,(-3,-3),(3,3),xsplinetype=Spline),orange);

xaxis3("$x$",0,4,Arrow3);
yaxis3("$y$",0,4,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,3,Arrow3);
```



Obrázek 31: Funkce  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Parametrická křivka

Pro parametrickou křivku  $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$  máme následující variantu funkce `graph()`.

```
guide3 graph(picture pic=currentpicture, real x(real),
    real y(real), real z(real), real a, real b,
    int n=ngraph, interpolate3 join=operator --);
```

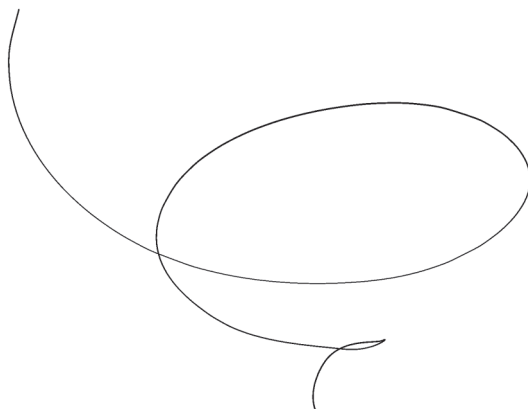
Předáváme tři funkce  $x()$ ,  $y()$  a  $z()$ . Ty musí mít jeden argument typu `real` a vrátet hodnotu typu `real` (tj. odpovídající reálné funkce jedné reálné proměnné). Dále zadáme meze intervalu  $a$  a  $b$ , případně dělení  $n$  a také typ interpolace `join`.

```
import graph3;

size(0,150);

triple f(real t){
    return (t*cos(t),t*sin(t),t);
}

draw(graph(f,0,4pi,join=operator .. ,n=10));
```



Obrázek 32: Prostorová křivka

### Parametrická plocha

Plochu zadanou ve tvaru  $F(u, v)$  můžeme vytvořit následující variantou funkce `surface()` z balíku `graph3`:

```
surface surface(triple f(pair z), pair a, pair b,
               int nu=nmesh, int nv=nu,
               splinetype[] usplinetype,
               splinetype[] vsplinetype=Spline,
               bool cond(pair z)=null);
```

Zde dvojice hodnot  $a$ , příp.  $b$  určuje dolní, příp. horní meze pro oba parametry. Jemnost dělení lze nastavit pomocí  $nu$  a  $nv$ . Typ interpolace nastavíme pomocí `usplinetype`, příp. `vsplinetype`. U těchto argumentů je dobré si všimnout, že jsou to pole typu `splinetype`, přesněji je očekáváno tříprvkové pole. Hodnota

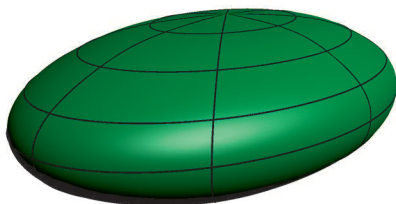
Spline je však přetížena a lze ji zde použít (hodnoty `Straight`, `operator..` ani `operator-` však nelze). Pokud budeme chtít striktně lineární interpolaci, můžeme použít podobnou verzi `surface`, která se liší jen v tom, že nevyžaduje `usplinetype` ani `vsplinetype`.

```
import graph3;

size(150,0);

real a=3,b=2,c=1;
triple F(pair z){
    real phi=z.x, theta=z.y;
    return (a*cos(phi)*cos(theta),
            b*cos(phi)*sin(theta),
            c*sin(phi));
}

draw(surface(F,(-pi/2,0),(pi/2,2pi),nu=8,Spline),green,meshpen=
    black+0.5);
```



Obrázek 33: Plocha zadaná parametricky

### Implicitní funkce

Plochu zadanou v implicitním tvaru  $F(x, y, z) = 0$  můžeme vykreslit funkcí `countour3` ze stejnojmenného balíku.

```
vertex[][] contour3(real F(real, real, real),
                    triple a, triple b,
                    int nx=nmesh, int ny=nx, int nz=nx,
                    projection P=currentprojection);
```

Body `a` a `b` jsou rohy příslušného kváдру, ze kterého se při sestřování grafu volí hodnoty  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

```
import graph3;
import contour3;
```

```

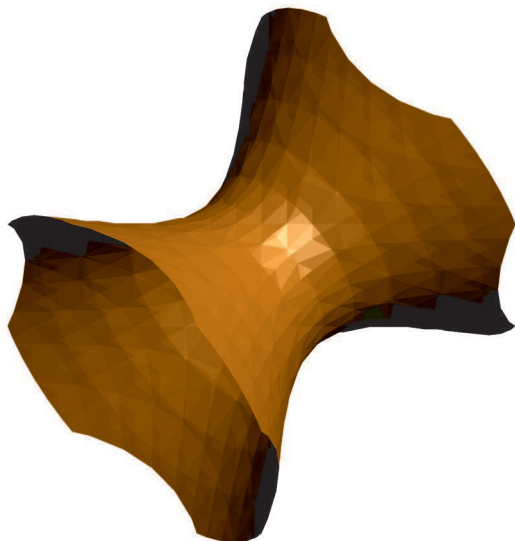
size(0,200);

currentprojection = orthographic(1,1,2);

real F(real x, real y, real z){
    return -x^2+y^2+z^2-1;
}

draw(surface(contour3(F,(-2,-2,-2),(2,2,2),nx=10)),orange);

```



Obrázek 34: Plocha zadaná implicitně

Pro lepší výsledky se však doporučuje použít parametrické vyjádření plochy.

Sférické a cylindrické souřadnice

Pro kreslení křivek zadaných ve sférických souřadnicích máme k dispozici funkci `polargraph` z balíku `graph3`. Očekávaný tvar křivky je

$$\theta = f(t), \varphi = g(t), r = h(\theta, \varphi), \quad t \in [0, 1]$$

a příslušná funkce pro vytvoření

```

guide3 polargraph(real r(real,real), real theta(real),
    real phi(real), int n=ngraph,
    interpolate3 join=operator --);

```

Následuje příklad použití na křivce dané předpisem

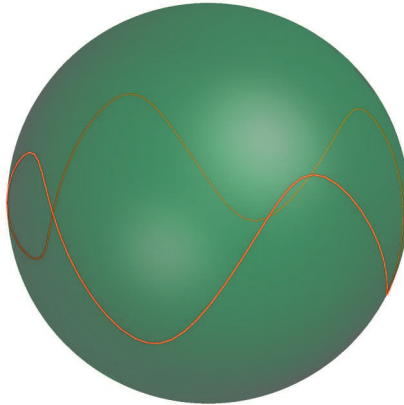
$$\theta = \frac{1}{8} \sin(8\pi t)\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 2\pi t, \quad r = 1, \quad t \in [0, 1].$$

```
import solids;
import graph3;

size(0,150);

real phi(real t){return t*2pi;}
real theta(real t){return 1/8*sin(4*t*2pi)*pi+pi/2;}
real r(real theta, real phi){return 1;}

draw(surface(sphere(1)),green+opacity(0.5));
draw(polargraph(r,theta,phi),red);
```



Obrázek 35: Křivka ve sférických souřadnicích

Balíky Asymptote v současné verzi nenabízejí funkce pro vytváření křivek v cylindrických souřadnicích ani pro plochy ve sférických či cylindrických souřadnicích. Není však těžké využít parametrického tvaru v kartézských souřadnicích, a pomocí nich vytvořit vlastní funkce. Následující dva příklady ilustrují takové dvě funkce, `sphericalgraph` a `cylindricalgraph`. První příklad představuje plochu danou předpisem  $r(\theta, \varphi) = \frac{1}{5}\varphi$  ve sférických souřadnicích.

```
import graph3;

size(0,160);
```

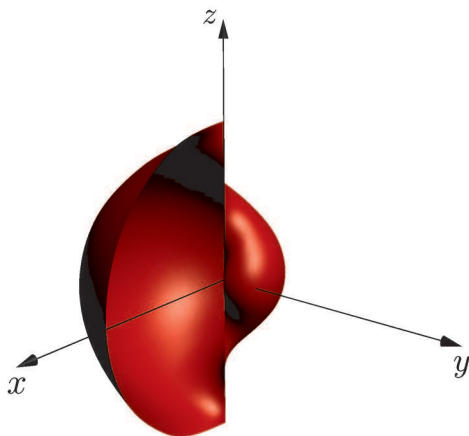
```

surface sphericalgraph(real f(real, real), pair a, pair b,
int nu=nmesh, int nv=nu, splinetype[] usplinetype=Spline,
splinetype[] vsplinetype=Spline, bool cond(pair z)=null){
  triple F(pair z){
    real phi=z.x,theta=z.y;
    real r = f(phi,theta);
    return (r*cos(phi)*sin(theta),
            r*sin(phi)*sin(theta),
            r*cos(theta));
  }
  return surface(F,a,b,nu,nv,usplinetype,vsplinetype,cond);
}

real r(real phi,real theta){ return phi/5;}
draw(sphericalgraph(r,(0,0),(2pi,pi),nu=10),red);

xaxis3("$x$",0,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",0,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,2,Arrow3);

```



Obrázek 36: Plocha ve sférických souřadnicích

Druhá ukázka představuje plochu danou předpisem  $r(\varphi, z) = z \sin(\varphi)$  v cylindrických souřadnicích.

```

import graph3;

size(0,200);

surface cylindricalgraph(real f(real, real), pair a, pair b,
int nu=nmesh, int nv=nu, splinetype[] usplinetype=Spline,

```

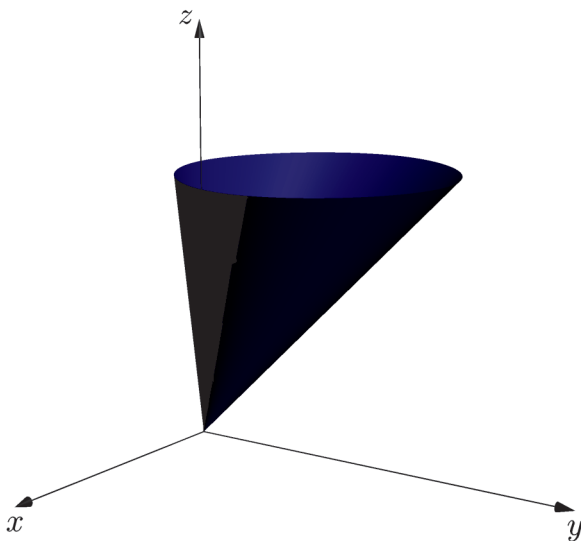
```

splineType[] vsplineType=Spline, bool cond(pair z)=null){
triple F(pair t){
    real phi=t.x,z=t.y;
    real r = f(phi,z);
    return (r*cos(phi),r*sin(phi),z);
}
return surface(F,a,b,nu,nv,usplineType,vsplineType,cond);
}

real r(real phi,real z){ return sin(phi)*z;}
draw(cylindricalGraph(r,(0,0),(2pi,1),nu=8,nv=4),blue);

xaxis3("$x$",0,1,Arrow3);
yaxis3("$y$",0,1.5,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,1.5,Arrow3);

```



Obrázek 37: Plocha v cylindrických souřadnicích

Osy

Pro vykreslení os ve 3D použijeme funkce `xaxis3()`, `yaxis3()` a `zaxis3()` z balíku `graph3()`. Formát jejich hlavičky je analogický, uveďte si jej pro `xaxis3()`.

```

void xaxis3(picture pic=currentpicture, Label L="",
            axis axis=YZZero, real xmin=-infinity,
            real xmax=infinity, pen p=currentpen,

```

```
ticks3 ticks=NoTicks3, arrowbar3 arrow=None,
bool above=false);
```

Funkce se podobá funkci `xaxis()` pro 2D případ, jen `axis`, `ticks` a `arrow` používají své trojrozměrné varianty. Šipka `arrow` může nabývat jedné z hodnot uvedených v části Křivky. Popíšme si zbylé argumenty pro určení polohy os a čárkování.

Argument `axis` může nabývat hodnoty `YZZero` a potom osa  $x$  leží na přímce  $y = 0, z = 0$  (jde o implicitní hodnotu). Analogicky, pro osy  $y$  a  $z$  máme hodnoty `XZZero` a `XYZero`. Pro specifikaci vlastního umístění můžeme použít funkce `YZEquals()`, `XZEquals()` nebo `XYEquals()`.

```
axis YZEquals(real y, real z);
axis XZEquals(real x, real z);
axis XYEquals(real x, real y);
```

Případné použití by pak mohlo vypadat třeba takto:

```
//osa x bude lezet na primce y=2, z=3
xaxis3("$x$",YZEquals(2,3));
```

Zbývajícím typem umístění je `Bounds`, které umístí osu do všech čtyř pozic podle rozměrů aktuálního modelu. Jedná se o trojrozměrnou analogii k `BottomTop` či `TopRight`.

```
import graph3;

size(0,150);

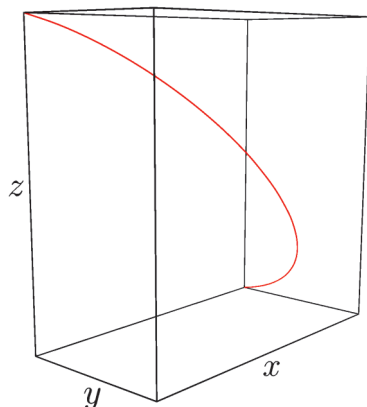
draw((0,0,0)..(1,1,1)..(2,0,2),red);

xaxis3("$x$",Bounds);
yaxis3("$y$",Bounds);
zaxis3("$z$",Bounds);
```

Zbylý argument `ticks` určuje styl čárkování na osách. Přednastavené hodnoty jsou `NoTicks3`, `InTicks`, `OutTicks` a `InOutTicks`. Pro pokročilejší čárkování můžeme volat stejnojmenné funkce a specifikovat například počet čárek, krokování apod. Uvedme si hlavičku alespoň jedné z nich.

```
ticks3 InOutTicks(Label format="", ticklabel ticklabel=null,
    bool beginlabel=true, bool endlable=true,
    int N=0, int n=0, real Step=0, real step=0,
    bool begin=true, bool end=true,
    tickmodifier modify=None, real Size=0,
    real size=0, bool extend=false,
    pen pTick=nullpen, pen ptick=nullpen);
```





Obrázek 38: Osy s využitím Bounds

Význam argumentů je zde totožný jako ve 2D. Důležité jsou zde především  $N$ ,  $n$  (počet dílků oddělených velkými, příp. malými čárkami), **Step**, **step** (vzdálenost mezi velkými, příp. malými čárkami), **Size** a **size** (velikost velkých, příp. malých čárek).

### Popisky

Obdobně, jako tomu bylo ve 2D, také ve 3D můžeme sázet  $\text{\LaTeX}$ ové popisky. Využijeme k tomu:

```
void label(picture pic=currentpicture, Label L,
           triple position, align align=NoAlign,
           pen p=currentpen, light light=nolight,
           string name="", render render=defaultrender,
           interaction interaction =
           settings.autobillboard ? Billboard : Embedded);
```

Význam je analogický jako v odpovídající 2D variantě, popisek  $L$  se vysází na pozici **position**. Za povšimnutí stojí argument **interaction** určující, zda se má popisek natáčet s pohybem kamery (hodnota **Billboard**, implicitní chování), nebo zda se má natočit staticky ve směru zadané projekce (hodnota **Embedded**).

Po načtení balíku **graph3** máme k dispozici i varianty pro snazší sázení popiseků kolem os.

```
void labelx(picture pic=currentpicture, Label L="", triple v,
            align align=-Y, string format="", pen p=nullpen);
```

Analogicky **labely()** a **labelz()**.

## Rotací tělesa

S využitím typu `revolution` z balíku `solids` můžeme vytvářet plochy vzniklé rotací křivky kolem zadaného vektoru. Typ `revolution` v sobě obsahuje právě tyto údaje, tj. křivku, která se otáčí, a vektor, kolem kterého se otáčí. Abychom získali plochu, musíme ho převést na typ `surface`. Podívejme se, jak vytváříme proměnné typu `revolution`.

```
revolution cylinder(triple c=0, real r,  
                   real h, triple axis=Z);
```

```
revolution cone(triple c=0, real r,  
               real h, triple axis=Z,  
               int n=nslice);
```

```
revolution sphere(triple c=0, real r, int n=nslice);
```

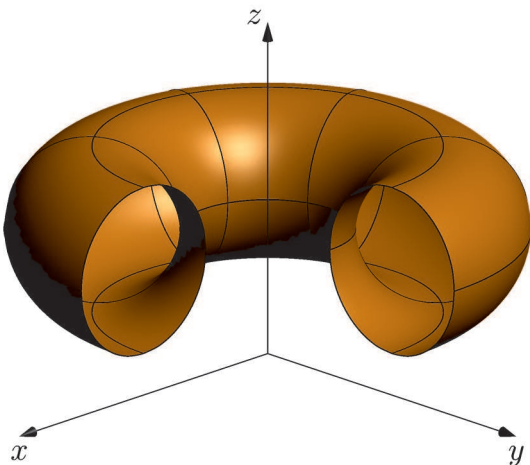
V případě válce (`cylinder`) zadáváme střed podstavy `c`, poloměr podstavy `r`, výšku `h` a směr osy válce `axis`. Podobně je to s kuželem (`cone`) a koulí (`sphere`), kde můžeme navíc zadat jemnost dělení stran `n`.

S těmito základními tvary bychom si však těžko vystačili. Ukažme si proto, jak vytvořit plochu vzniklou rotací obecné křivky kolem zadané osy.

```
revolution revolution(triple c=0, path3 g, triple axis=Z,  
                    real angle1=0, real angle2=360);
```

Funkci předáme střed otáčení `c` (bod, z něž povede osa otáčení), křivku `g`, osu otáčení `axis` (implicitně ve směru osy `z`, vektor však může být libovolný) a rozsah úhlů otáčení `angle1` a `angle2` ve stupních.

```
import solids;  
  
size(0,175);  
currentprojection=orthographic(2,2,1);  
  
path3 p = rotate(90,(1,0,0))*shift(2,1.5,0)*unitcircle3;  
  
revolution r=revolution(p,90,360);  
  
draw(surface(r,n=5),orange, meshpen=black+0.5);  
  
xaxis3("$x$",0,4,Arrow3);  
yaxis3("$y$",0,4,Arrow3);  
zaxis3("$z$",0,4,Arrow3);
```



Obrázek 39: Plocha vzniklá rotací kružnice

Ukažme si ještě, jak vytvořit plochu vzniklou rotací funkce  $z = f(x)$ .

```
revolution revolution(triple c=0, real f(real x),
                    real a, real b, int n=ngraph,
                    interpolate3 join=operator --,
                    triple axis=Z, real angle1=0,
                    real angle2=360);
```

Zde  $c$  je střed otáčení,  $f$  je příslušná funkce v mezích  $a$  až  $b$  s jemností dělení  $n$ . Dále je možné specifikovat typ interpolace argumentem `join`, osu otáčení `axis` a meze úhlu rotace `angle1` a `angle2`.

### Vytažené plochy

Dalším užitečným způsobem, jak vytvářet plochy, je vytažení vhodných křivek v určitém směru, případně mezi dvěma křivkami. Balík `three` pro tento účel definuje několik verzí funkce `extrude()`. Uvedme si dvě základní varianty.

```
surface extrude(path3 p, triple axis=Z);
surface extrude(path3 p, path3 q);
```

V první verzi je křivka `p` vytažena ve směru `axis` (o délku vektoru `axis`). Druhá verze vytváří přímkovou plochu mezi dvěma zadanými křivkami. Pro ilustraci opět uvádíme příklad.

```
import three;
```

```

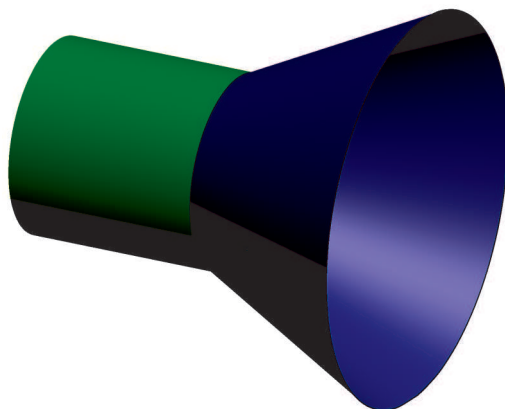
size(0,150);
currentprojection = orthographic(1,-2,1);

//dve kruznice
path3 p = rotate(90,(0,1,0))*unitcircle3;
path3 q = shift((2,0,0))*scale3(2)*p;

draw(p);
draw(q);

draw(extrude(p,(-2,0,0)),green);
draw(extrude(p,q),blue);

```

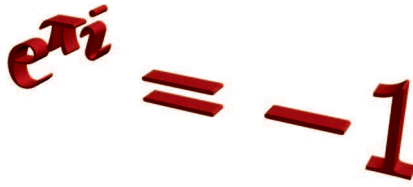


Obrázek 40: Vytažené plochy

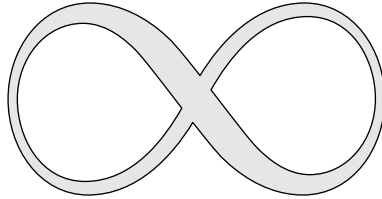
## Algoritmy pro 3D reprezentaci rovinných oblastí

Jednou z vlastností programu Asymptote odlišujících ho od podobných programů je schopnost převádět rovinné systémy křivek (jakými je například font) do reprezentace plochami. S takovými objekty je možno pracovat jako s jinými 3D objekty, tj. aplikovat transformace, vytažení apod.

K tomu Asymptote používá algoritmus BEZULATE. BEZULATE přebírá jednoduše souvislou oblast a postupem podobným triangulaci ji převádí na systém menších, jednodušších oblastí (Bézierových plátů). Prvotní oblast je určena systémem jednoduše uzavřených křivek. Těm však obecně neodpovídá jednoduše souvislá oblast (obr. 42). Z tohoto důvodu se před BEZULATE provádí algoritmus PARTITION, který zadané oblasti rozdělí tak, že už budou jednoduše souvislé.


$$e^{\pi i} = -1$$

Obrázek 41: 3D text vytažený z  $e^{\pi i} = -1$



Obrázek 42: Oblast určená znakem  $\infty$

### Rozdělení (PARTITION)

Předpokládejme konečnou množinu jednoduše uzavřených křivek. Těm odpovídají nějaké oblasti. Tento algoritmus je rozdělí na menší, jednoduše souvislé oblasti (ve tvaru množiny křivek). Proveďte se to tak, že se křivky nejdříve seřadí podle toho, jak jsou v sobě vzájemně obsaženy. Takové rekurzivní seřazení provádí procedura SORT. Pak se mezi vnějšími a vnitřními křivkami vytváří vhodné úsečky, které dané oblasti propojují (procedura MERGE).

---

#### Algoritmus 1 PARTITION(D)

---

**Vstup:** množina jednoduše uzavřených křivek D

**Výstup:** množina uzavřených křivek A

```
1: A  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
2: for G  $\in$  SORT(D) do
3:   innerGroups  $\leftarrow$  SORT(G.inners)
4:   for H  $\in$  innerGroups do
5:     A  $\leftarrow$  A  $\cup$  PARTITION(H.inners)
6:   innerTops  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
7:   for K  $\in$  innerGroups do
8:     innerTops  $\leftarrow$  innerTops  $\cup$  {K.top}
9:   A  $\leftarrow$  A  $\cup$  MERGE(G.top, innerTops)
10: return A
```

---

Popišme si použité procedury SORT a MERGE. Jak již bylo zmíněno, procedura SORT seřadí křivky v závislosti na tom, jak jsou v sobě obsaženy. To se dá provést efektivně, protože křivky jsou jednoduše uzavřené. Na test pak stačí použít libovolný bod křivky.

---

### Algoritmus 2 SORT(D)

---

**Vstup:** množina jednoduše uzavřených křivek D

**Výstup:** množina A dvojic „vrchních“ a příslušných, v nich obsažených křivek

```

1:  $G \leftarrow \emptyset$ 
2: for  $C \in D$  do
3:   found  $\leftarrow$  false
4:   for  $H \in G$  do
5:     if C leží uvnitř H.top then
6:        $H.inners \leftarrow H.inners \cup \{C\}$ 
7:       found  $\leftarrow$  true
8:       break
9:     else if H.top leží uvnitř C then
10:       $H.inners \leftarrow H.inners \cup \{H.top\}$ 
11:       $H.top \leftarrow C$ 
12:      for  $H' \in G \setminus \{H\}$  do
13:        if  $H'.top$  leží uvnitř C then
14:           $H.inners \leftarrow H.inners \cup H'.inners$ 
15:           $H.inners \leftarrow H.inners \cup \{H'.top\}$ 
16:           $G \leftarrow G \setminus \{H'\}$ 
17:        found  $\leftarrow$  true
18:        break
19:      if not found then
20:         $G \leftarrow G \cup \{(C, \emptyset)\}$ 
21: return G

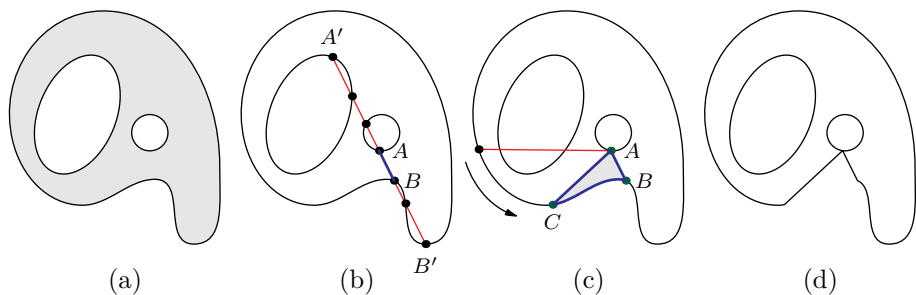
```

---

Procedura MERGE prochází křivky *inners*, které jsou obsaženy v křivce *top*, a snaží se je vhodnými úsečkami propojit (obr. 43).

Libovolný bod na vnější křivce spojí s libovolným bodem na vnitřní křivce. Výsledná přímka obsahuje dva průsečíky, *A* s vnitřní, *B* s vnější křivkou takové, že mezi *A* a *B* se již jiné průsečíky nenacházejí (b). Dále se hledá bod *C* na vnější křivce takový, že přímka *AC* kromě krajních bodů neprotíná žádnou z křivek, a zároveň oblast určená úsečkami  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  a křivkou  $\overline{BC}$  (úsek na vnější křivce) neobsahuje žádnou další z křivek v *inners* (c). To se nám po případném opakovaném dělení segmentů sousedících s *B* vždy podaří. Nakonec se nalezená oblast oddělí a pokračuje se se zbylými křivkami (d).

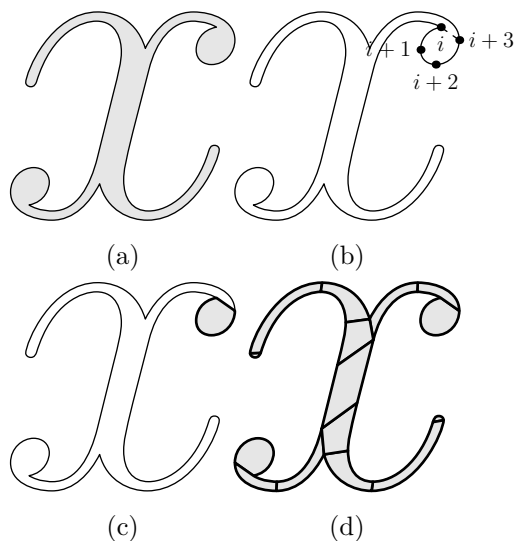
Ve výsledku se tedy PARTITION redukuje na zjištění, zda bod leží uvnitř



Obrázek 43: procedura MERGE

křivky, a na počítání průsečíků přímky a křivky. Počítání průsečíků Bézierovy kubiky s přímkou vede k hledání kořenů kubického polynomu, které dovedeme spočítat. Pro zjištění, zda bod leží uvnitř oblasti zadané uzavřenou křivkou, se může použít např. Winding number (způsob použitý v programu Asymptote).

### Algoritmus BEZULATE



Obrázek 44: Algoritmus BEZULATE

Dostáváme se k popisu algoritmu BEZULATE, hlavního algoritmu této části. Na

---

**Algoritmus 3 MERGE(top, inners)**

---

**Vstup:** křivka top a množina křivek inners obsažených v top

**Výstup:** množina A uzavřených křivek

```
1: A ← ∅
2: while inners ≠ ∅ do
3:   D ← libovolná křivka z inners
4:    $\overline{A'B'}$  ← úsečka mezi libovolnými body B' na top a A' na D
5:   B ← ten z průsečíků  $\overline{A'B'}$  a top nejbliž bodu A'
6:   t ← čas bodu B na křivce top
7:   A ← ten z průsečíků  $\overline{BA'}$  s křivkami z inners nejbliž bodu B
8:   D' ← křivka z inners, na které se realizuje průsečík A
9:   Δ ← 2
10: found ← false
11: repeat
12:   Δ ← Δ/2
13:   for sgn ∈ {-1, 1} do
14:     C ← bod na křivce top v čase t+sgnΔ
15:     l ← subpath(top, B, C) +  $\overline{CA}$  +  $\overline{AB}$ 
16:     if l neobsahuje ani neprotíná žádnou křivku
       z inners s výjimkou bodu A then
17:       found ← true
18: until found
19: A ← A ∪ {l}
20: top ← subpath(top, C, B) +  $\overline{BA}$  + subpath(D', A, A) +  $\overline{AC}$ 
21: inners ← inners \ {D'}
22: A ← A ∪ {top}
23: return A
```

---

vstupu již předpokládáme jednoduše uzavřenou křivku  $C$ , již odpovídá jednoduše souvislá oblast. Účelem tohoto algoritmu je převést oblast na sjednocení menších oblastí ohraničených nejvýše čtyřmi Bézierovými kubikami. Popišme, jakým způsobem BEZULATE sestavuje tyto ohraničující křivky.

Nechť křivka  $C$  prochází  $n$  kontrolními body  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  (body mezi jednotlivými segmenty). Algoritmus postupně prochází body  $P_i$  a testuje, zda oblast určená segmenty  $P_i P_{i+1}$ ,  $P_{i+1} P_{i+2}$ ,  $P_{i+2} P_{i+3}$  a úsečkou  $\overline{P_{i+3} P_i}$ , leží uvnitř křivky  $C$ . Na to stačí zkontrolovat jen zmíněnou úsečku. V případě, že tam oblast leží, vhodnou rekonstrukcí křivky se tato oblast „vyjme“, a algoritmus se opakuje pro zbylou část. Pokud se vhodnou oblast, tj. trojici, případně čtveřici bodů nepodaří nalézt, křivka  $C$  se zjemní přidáním dodatečného bodu doprostřed každého segmentu. Celý proces se pak opakuje, dokud délka původní křivky neklesne na



4 a méně. Při dostatečně jemném dělení se původní křivka stává nerozlišitelnou od mnohoúhelníku a celý proces se redukuje na triangulaci. Algoritmus se proto vždy dokončí.

---

#### Algoritmus 4 BEZULATE(D)

---

**Vstup:** množina uzavřených křivek D

**Výstup:** množina uzavřených křivek A délek 3 nebo 4

```

1: A ← ∅
2: for C ∈ D do
3:   while C.length > 4 do
4:     found ← false
5:     for n = 3 to 2 do
6:       for i = 0 to C.length-1 do
7:         L ← úsečka mezi uzly i a i+n na C
8:         if L protíná C právě ve dvou bodech and
           prostřední bod L leží uvnitř C then
9:           p ← subpath(C,i,i + n)
10:          q ← subpath(C,i + n,i + C.length)
11:          A ← A ∪ {p + L}
12:          C ← L + q
13:          found ← true
14:          break
15:         if found then
16:           break
17:       if not found then
18:         zjemni C přidáním bodu doprostřed každého segmentu
19: return A

```

---

#### Coonsova bilineární plocha

Posledním krokem je získání Bézierova plátu ze čtyř okrajových Bézierových křivek. K tomu využijeme obecný postup, tzv. Coonsovu bilineární plochu, která je určena vztahem:

$$\begin{aligned}
 Q(u, v) = & (1 - u, u) \begin{pmatrix} Q(0, v) \\ Q(1, v) \end{pmatrix} + (Q(u, 0), Q(u, 1)) \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix} - \\
 & (1 - u, u) \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

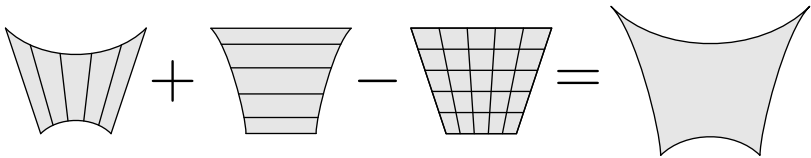
kde  $u, v \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Body  $Q(0, v)$ ,  $Q(1, v)$ ,  $Q(u, 0)$  a  $Q(u, 1)$  známe, poněvadž leží na okrajových křivkách.

V našem případě však chceme plochu v podobě Bézierova plátu. Proto potřebujeme z předchozího obecného zápisu vyjádřit 4 vnitřní body pro speciální případ s Bézierovými okrajovými křivkami. Bézierův plát je zadán šestnácti body  $P_{i,j}$  a předpisem:

$$f(u, v) = \sum_{i,j=0}^3 B_i(u)B_j(v)P_{i,j} \quad \text{pro } u, v \in [0, 1] \quad (5)$$

kde  $B_i(t) = \binom{3}{i}t^i(1-t)^{3-i}$  je Bernsteinův polynom třetího stupně. Známe všechny body  $P_{i,j}$  kromě vnitřních  $P_{1,2}$ ,  $P_{2,1}$ ,  $P_{1,1}$  a  $P_{2,2}$ . Položením rovnosti s výrazem 4 a porovnáním koeficientů dostaneme příslušné vztahy.

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= \frac{1}{9}(6P_{0,2} + 6P_{1,3} - 4P_{0,3} + 3P_{1,0} + 3P_{3,2} - 2P_{0,0} - 2P_{3,3} - P_{3,0}) \\ P_{2,1} &= \frac{1}{9}(6P_{2,0} + 6P_{3,1} - 4P_{3,0} + 3P_{0,1} + 3P_{2,3} - 2P_{0,0} - 2P_{3,3} - P_{0,3}) \\ P_{1,1} &= \frac{1}{9}(6P_{0,1} + 6P_{1,0} - 4P_{0,0} + 3P_{1,3} + 3P_{3,1} - 2P_{3,0} - 2P_{0,3} - P_{3,3}) \\ P_{2,2} &= \frac{1}{9}(6P_{3,2} + 6P_{2,3} - 4P_{3,3} + 3P_{2,0} + 3P_{0,2} - 2P_{3,0} - 2P_{0,3} - P_{0,0}) \end{aligned}$$

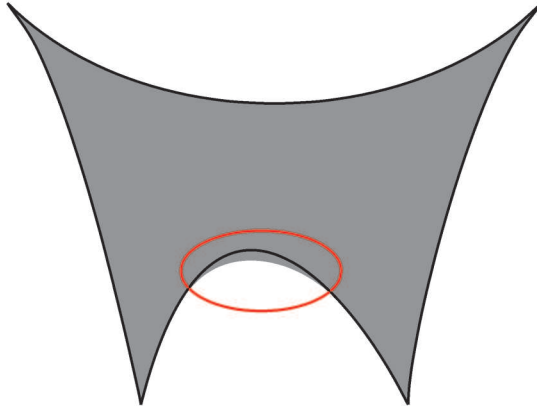


Obrázek 45: Coonsova bilineární plocha

Tím celý algoritmus ještě nekončí. V případě, kdy by byl výsledný Bézierův plát degenerovaný, tj. nebyl by difeomorfizmem ze čtverce  $[0, 1] \times [0, 1]$ , vznikaly by při renderování grafické artefakty (obr. 46). Z tohoto důvodu se v programu Asymptote kontroluje postačující podmínka pro degenerovanost. Podmínka je založena na faktu, že Jakobián pro zmíněnou plochu musí být všude nenulový (více viz Surface Parametrization . . . , 2011).

Výrazy

$$\sum_{i+k=p} \sum_{j+l=q} [(P_{i+1,j} - P_{i,j}) \times (P_{k,l+1} - P_{k,l})]_3 \binom{2}{i} \binom{3}{k} \binom{3}{j} \binom{2}{l} \quad (6)$$



Obrázek 46: Grafický artefakt degenerovaných ploch

pro  $p, q = 0, 1, \dots, 5$ , musí mít stejné znaménko, pokud je plocha nedegenerovaná. Zde operace  $[\cdot \times \cdot]_3$  na vektorech z  $\mathbb{R}^2$  odpovídá třetí složce vektorového součinu příslušných vektorů v  $\mathbb{R}^3$ , tj.  $[u \times v]_3 = u_x v_y - u_y v_x$ . V případě, že se podaří degenerovanost zjistit, zkouší se dále degenerovanost na okraji plochy. K tomu slouží následující věta.

**Věta 1.** *Necht  $p$  je uzavřená kladně orientovaná rovinná křivka délky 4. Dále necht vnitřní úhly svírané vcházející a vycházející tečnou jsou ve všech jejích uzlech menší nebo rovny  $180^\circ$ . Dále necht  $J(u, v)$  je Jakobíán odpovídajícího Bézierova plátu s kontrolními body  $P_{i,j}$ . Položme*

$$f(u) = \frac{1}{3} J(u, 0) = \sum_{i,j=0}^3 B'_i(u) B_j(u) P_{i,0} \times (P_{j,1} - P_{j,0}). \quad (7)$$

*Jestliže pro všechna  $u \in (0, 1)$  taková, že  $f'(u) = 0$ , platí  $f(u) \geq 0$ , pak  $J(u, 0) \geq 0$  na  $[0, 1]$ . V opačném případě se minimální hodnota  $J(u, 0)$  nachází v některém  $u$  takovém, že  $f'(u) = 0$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme, že pro všechna  $u \in (0, 1)$ ,  $f'(u) = 0$  platí  $f(u) \geq 0$ . Dále předpokládejme, že  $J(u, 0) < 0$  pro nějaké  $u \in [0, 1]$ . Jelikož  $J(u, 0)$  je spojitá funkce, nabývá svého minima v nějakém  $\bar{u} \in [0, 1]$ . Jistě je pak  $J(\bar{u}, 0) < 0$ . Dále platí

$$\begin{aligned} J(0, 0) &= 3f(0) = 9(P_{1,0} - P_{0,0}) \times (P_{0,1} - P_{0,0}) \geq 0 \\ J(1, 0) &= 3f(1) = 9(P_{3,0} - P_{2,0}) \times (P_{3,1} - P_{3,0}) \geq 0 \end{aligned}$$

poněvadž se jedná o vektorové součiny tečných vektorů na křivce  $p$ , která je kladně orientovaná, a úhly svírané těmito tečnami nepřesahují  $180^\circ$ . Proto  $\bar{u} \in (0, 1)$ . Protože však  $J(u, 0) = 3f(u)$ , nabývá svého minima v  $\bar{u}$  i funkce  $f$ . Potom zřejmě  $f'(\bar{u}) = 0$  a  $f(\bar{u}) < 0$ , což je spor.  $\square$

Nejdřív tedy rozdělíme okraj v uzlech, kde úhel mezi vcházející a vycházející tečnou přesahuje  $180^\circ$ . Potom se numerickými metodami naleznou kořeny polynomu 4. stupně  $f'(u)$  na  $(0, 1)$ . V nalezených bodech  $u$  se potom zkontrolují znaménka  $f(u)$ . V případě zápornosti již stačí spočítat  $J(u, 0)$  ve všech nalezených kořenech, a zjistit tak, kde je Jakobián nejmenší. Takto spočítané body určují optimální rozdělení okrajových křivek. Daným způsobem se počet výsledných plátů snižuje oproti jiným, rychlejším metodám. To je v našem konkrétním případě výhodné, protože chceme vytvořit pouze reprezentaci původní oblasti a časová složitost je tu méně podstatná. Uvedenou Větu použijeme analogicky pro nalezení degenerace i na zbylých třech okrajových křivkách.

V případě, že se degenerace na okraji nezjistí, musí být degenerace uvnitř plochy. V takovém případě se rozdělení provede náhodně ve zvolených místech na okraji. Celý proces se potom rekurzivně opakuje.

## Summary: Mathematical graphics with the Asymptote program

The aim of this paper is to describe creating of mathematical graphics with the program Asymptote with emphasis on 3D graphics. The task of this text is to make learning of the program easier with various examples used, while at the same time providing a solid description of the background of techniques used. In the first part, the basic syntax rules are explained, then in following chapters the routines for 2D and 3D are described. In the last chapter, algorithms converting planar regions into 3D surfaces are explained.

## Literatura

- ASYMPTOTE – *Galleries d'exemples* [on-line]. 2011. [cit. 2011-12-15]. Dostupné na: <http://marris.org/asymptote/>.
- Asymptote [Oficiální stránky]* [on-line]. 2004. [cit. 2011-12-15]. Dostupné na: <http://asymptote.sourceforge.net/>.
- KUTAL, O. *Tvorba matematické grafiky pomocí programu Asymptote*. (Diplomová práce.) Brno: Masarykova univerzita, 2012. 105 s.
- Specifikace formátu PRC* [on-line]. 2008. [cit. 2012-02-16]. Dostupné na: [http://livedocs.adobe.com/acrobat\\_sdk/9/Acrobat9\\_HTMLHelp/API\\_References/PRCReference/PRC\\_Format\\_Specification/](http://livedocs.adobe.com/acrobat_sdk/9/Acrobat9_HTMLHelp/API_References/PRCReference/PRC_Format_Specification/).

*Surface Parametrization of Nonsimply Connected Planar Bézier Regions* [on-line].  
2011. [cit. 2011-12-15]. Dostupné na: <http://www.math.ualberta.ca/~bowman/publications/cad10.pdf>.

*Ondřej Kutal, [kutal@math.muni.cz](mailto:kutal@math.muni.cz)*