Vlastimil Dlab

Test matematické gramotnosti

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 3, 173–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149552

TEST MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

Vlastimil Dlab

Téměř každá konference učitelů, každý sborník toho či onoho setkání se zabývá otázkou tak zvané **matematické gramotnosti**. Bohužel, velmi často končí tyto „studie" v obecných frázích. Co tím myslím? Stručně řečeno, postrádám v záplavě uvedených nedefinovaných pojmů a vazeb alespoň v nějaké míře stručné a jasné vysvětlení, co vlastně znamená **být matematicky gramotný či negramotný**.

Doufám, že nikoho nepřekvapí, že i přes svůj pokročilý věk jsem nikdy pojem „matematické gramotnosti" ani neužil, ale ani jej nepotřeboval. A při tom si myslím, že poznám, zda student, učitel či uznávaný pedagog dané matematické látce (opravdu) rozumí a do jaké míry své znalosti umí sdělit a vysvětlit. Nicméně se vyskytnou situace, kdy odpověď není snadná.

Nedávno se mi dostal do ruky *Sborník 8. setkání učitelů matematiky* (Prachatice, 2002), kde jsem se dočetl, že *půvab matematických poznatků může spočívat i v jejich neočekávanosti, novosti, zdánlivém rozporu s představami*, s čímž naprosto souhlasím. Článek ilustruje tento jev na příkladu z prvního ročníku naší Matematické olympiády, který se konal v roce 1951:

V kolika základních prvcích (stranách a úhlech) se mohou shodovat dva trojúhelníky, které nejsou shodné?

Článek pak pokračuje: *Snadno lze ověřit, že dva trojúhelníky, které nejsou shodné, se mohou shodovat v* 5 *základních prvcích, např. ve dvou stranách a třech úhlech. Jednou z takových možností je dvojice podobných trojúhelníků se stranami* $a = 27$, $b = 36$, $c = 48$, $a' = 36$, $b' = 48$, $c' = 64$. *Přijít na tento výsledek je ovšem pěknou ukázkou tvořivého přístupu k elementární matematice.*

Má otázka zní: Rozumí autor této úloze, tj. je matematicky gramotný?

Předpokládám, že úloha (tj. autor) vyžaduje celočíselná řešení. Téměř triviálním užitím řešení kvadratické rovnice (grafu paraboly) dostáváme, že dvojice takových (podobných) trojúhelníků mají strany

$$a = x^3,\ b = x^2y,\ c = xy^2,$$
$$a' = x^2y,\ b' = xy^2,\ c' = y^3, \tag{*}$$

kde $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ jsou celá čísla a $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Tak například pro $x = 5$, $y = 6$ dostáváme

$$a = 125,\ b = 150,\ c = 180,$$
$$a' = 150,\ b' = 180,\ c' = 216.$$

Autorem uvedené řešení obdržíme pro $x = 3$, $y = 4$.

Umíte moji otázku zodpovědět?

Poznámka na závěr. Výše zmíněná úloha dostane plné zadostiučinění, jestliže připustíme reálná řešení, např.

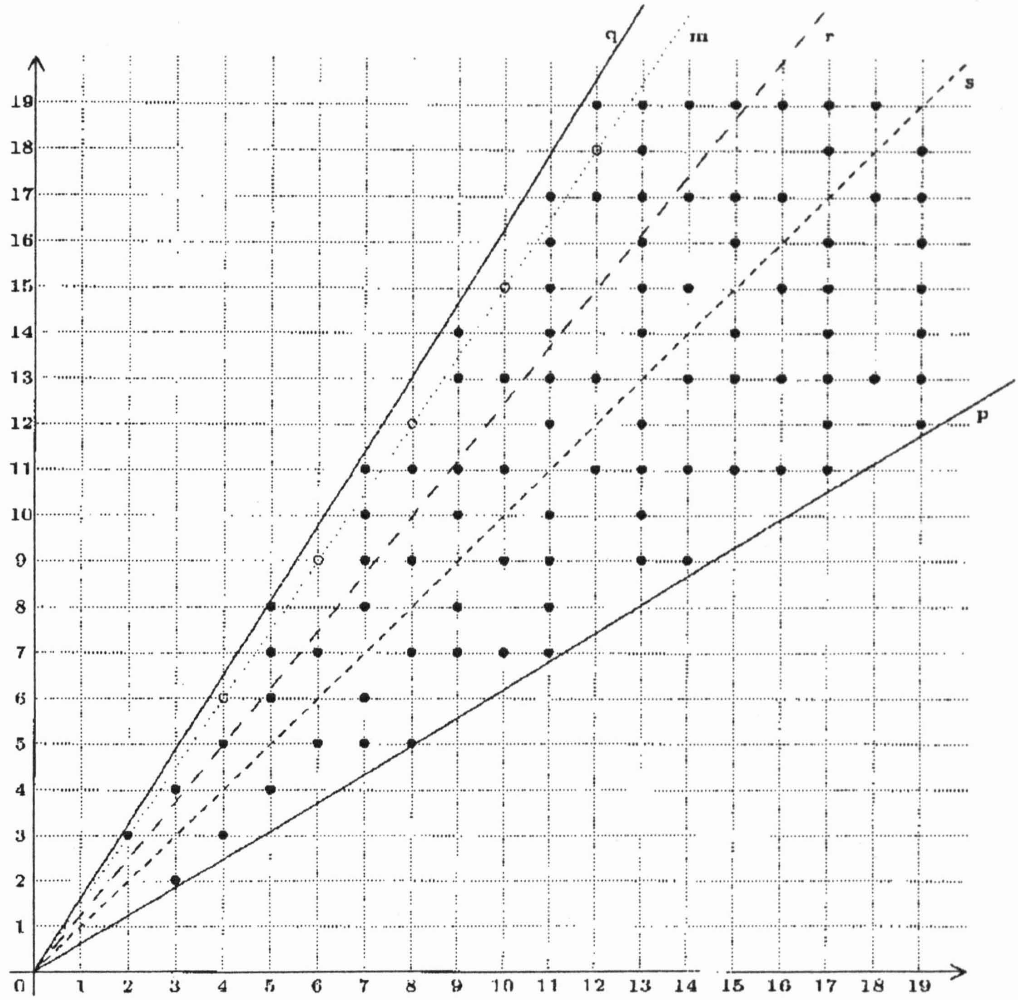
$$a = \pi^3,\ b = \sqrt{10}\pi^2,\ c = 10\pi,$$
$$a' = \sqrt{10}\pi^2,\ b' = 10\pi,\ c' = 10\sqrt{10}.$$

Všechna řešení lze snadno znázornit graficky – viz obr. 1.

Řešení odpovídají bodům (x, y) ležícím mezi polopřímkami p a q danými rovnicemi

$$y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x \quad \text{a} \quad y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x,$$

kromě bodů ležících na polopřímce (ose) s, která je dána rovnicí $x = y$: tyto body odpovídají „degenerovanému" řešení, kdy jsou oba trojúhelníky rovnostranné, a tudíž shodné. Podobně lze interpretovat body na polopřímkách p a q: ty odpovídají situaci, kdy příslušné trojúhelníky degenerují na úsečky.



Obr. 1

Řešení odpovídající bodům, jež leží na téže polopřímce vedené počátkem $(0,0)$, jsou podobná, tj. liší se pouze (kladným) koeficientem podobnosti: poměry stran příslušných trojúhelníků jsou konstantní. Tuto situaci ilustruje na obrázku polopřímka m odpovídající celočíselným řešením $a = 8t$, $b = 12t$, $c = 18t$, $a' = 12t$, $b' = 18t$, $c' = 27t$, kde t je libovolné přirozené číslo.

Mřížové body odpovídají celočíselným řešením. Nejmenší (nesoudělná) řešení dané třídy odpovídají bodům označeným černou tečkou.

Nutno ještě dodat, že polopřímky, jejichž směrnice jsou navzájem inverzní, tj. polopřímky, které jsou symetrické vzhledem k ose s, vedou ke stejnému řešení. Je tedy možno se omezit na řešení odpovídající bodům mezi polopřímkami q a s, či mezi s a p.

Body blízké ose s odpovídají řešením, v nichž jsou trojúhelníky blízké rovnostranným. Takovým řešením je (pro libovolně malá ε)

$$a = 1,\ b = 1 + \varepsilon,\ c = (1 + \varepsilon)^2,$$
$$a' = 1 + \varepsilon,\ b' = (1 + \varepsilon)^2,\ c' = (1 + \varepsilon)^3. \qquad (**)$$

Zde vidíme, že každá volba racionálního čísla $\varepsilon = \frac{u}{v}$, které splňuje $0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vede po vynásobení celým číslem v^3 k celočíselnému řešení. Tak např. volba $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vede k výše zmíněnému řešení $a = 8$, $b = 12$, $c = 18$, $a' = 12$, $b' = 18$, $c' = 27$. Důležité je si uvědomit, že **každé** celočíselné řešení (*) splňující $0 < x < y$ lze získat tímto způsobem. Stačí zvolit ve výchozím řešení (**) $\varepsilon = \frac{y-x}{x}$.

Neexistuje řešení, při kterém by (neshodné) trojúhelníky byly rovnoramenné. Existuje však třída podobných (reálných) řešení, kdy jsou trojúhelníky pravoúhlé (příslušné body leží na polopřímce r). Ta je určena např. řešením

$$a = 1,\ b = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ c = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$a' = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ b' = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ c' = \sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca