

Jan Fiala

„Kalkulačka“ na určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 1, 33–40

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149525>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

„KALKULAČKA“ NA URČOVÁNÍ NEJMENŠÍHO SPOLEČNÉHO NÁSOBKU A NEJVĚTŠÍHO SPOLEČNÉHO DĚLITELE

JAN FIALA

Úvod

Základní poznatky z teorie čísel získávají žáci již od prvního ročníku osmiletého gymnaziálního studia. Dobrým průvodcem jim při učení se základním pojmům speciálně v oblasti dělitelnosti přirozených čísel je učebnice *Matematika. Dělitelnost* (1) autorského týmu z nakladatelství Prometheus. Pro využití dosažených znalostí je ale také vhodné (už vzhledem k věku žáků) zařadit do výuky činnostně orientovanou složku. K učivu o nejmenším společném násobku a největším společném děliteli se dobře hodí vytvoření „kalkulačky“, pomocí níž lze snadno tato čísla určovat.

Teoretická východiska

V procesu osvojování si nových pojmů považují za nejpodstatnější osvojení si (uvědomění si, porozumění) „skrytého“ (hlubšího) významu poznatků, resp. pojmů, které daný poznatek reprezentují.

Postupné procesuální osvojení si pojmů nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele vychází z více pojmů: násobek, dělitel, množina všech dělitelů, znaky dělitelnosti čísel, prvočíslo a číslo složené, prvočíselný rozklad a společný dělitel, konečně tzv. největší společný dělitel vybraný z množiny všech společných dělitelů, resp. nejmenší společný násobek vybraný z množiny společných násobků daných čísel.

Učebnice (1) zavádí oba pojmy tak, že přesně popisuje postup, jak daná čísla najít:

„Největší společný dělitel skupiny čísel je součin všech společných prvočinitelů vybraných z rozkladů jednotlivých čísel. Abychom

zjistili, kolikrát se které prvočíslo bude v tomto rozkladu vyskytovat, určíme, kolikrát se vyskytuje v jednotlivých rozkladech. Z těchto počtů vybereme nejmenší a tolikrát toto prvočíslo zahrneme do výsledného součinu. . . “ (1, 48)

„Nejmenší společný násobek skupiny čísel je součin prvočinitelů vybraných z rozkladů jednotlivých čísel. Abychom zjistili, kolikrát se které prvočíslo v tomto součinu bude vyskytovat, určíme, kolikrát se vyskytuje v jednotlivých rozkladech. Z těchto počtů vybereme největší a tolikrát toto prvočíslo zahrneme do výsledného součinu.“ (1, 54)

Ač bezesporu přesné a správné formulace neposkytují žákům dostatečnou základnu pro hlubší osvojení si, ztotožnění se s významem sledovaných pojmů. Málokterý žák je schopen si soustředěně podle návodu uvědomovat význam pojmu a postupně provádět jednotlivé kroky, natož si obsah celých odstavců zapamatovat či celé formulace opakovat. Při hodnocení výsledků výuky nepovažují proto za příliš cenné produkty čistě paměťových forem učení, ale spíše vlastní uvědomění si hlubších „podtextů“ (principů, algoritmů) nabývaných znalostí.

Nejefektivnější cestou k dosažení takových cílů se mi podle zkušenosti jeví činnostní formy učení, jehož podstata a principy byly naznačeny například v publikaci (2). Přitom se nejedná o nějaký nový typ učení. Zdá se však, že současná praxe vyučování matematice, zvláště individuální potřeby žáků především na základní škole a v nižších ročnících víceletých gymnázií požadují jeho znovuzařazení do spektra forem a metod výuky. Svou strukturou přitom činnostní učení nerezignuje na žádnou z podstatných složek učení: motivační, poznávací, prováděcí i zpětnovazební (sebeevaluační) komponenty jsou samozřejmě zastoupeny.

Skutečností ale zůstává, že zatímco například v učebnicích matematiky německy mluvících zemí lze nalézt řadu námětů na realizaci praktických činností ve výuce, je podobných pobídek směrem k žákům v učebnicích českých jen velmi málo. Zařazení činnostního učení do výuky tak probíhá většinou jen na popud učitele.

Příprava

Učební pomůcku, jejíž vytvoření a funkce budou nyní popsány, budu nadále nazývat „kalkulačka“, i když použitý termín nepostihuje plný význam slova kalkulátor tak, jak je obecně znám. Jedinými funkcemi této speciální kalkulačky budou určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou (nebo skupiny) zvolených čísel.

Základem kalkulačky je průhledný plastický obal o velikosti 8,5 cm na šířku a 11,5 cm na výšku, který žáci běžně používají jako obal na průkazky. Hlavní roli hrají dále průhledné fólie formátu A4, které jsou volně dostupné v obchodech s kancelářským zbožím. Fólie je potřeba nařezat na menší obdélníkové části o rozměrech 8 cm na šířku a 9 cm na výšku, které se budou vkládat do obalu. Zakoupit je třeba dále nesmazatelné fixy, které poslouží k popisu připravených fólií. Šablona o stejných rozměrech jako průhledná fólie slouží jako vzor pro stále stejný popis všech fólií. Každý ze žáků tedy potřebuje 1 obal, aspoň 6 průhledných fólií, fixy a 1 šablonu pro popis. Pro případné vystřížení materiálů jsou potřeba nůžky.

Pracovní list

Žáci pracovali v hodině s dvoustránkovým pracovním listem velikosti A4, na kterém postupně plnili zadané úkoly. Cílem pracovního listu bylo provádět žáka během jeho samostatné práce v hodině.

Záhlaví pracovního listu mělo tuto podobu:

Gymnázium V. Nováka J. Hradec
Matematika, 1. ročník, 1.A

**Kalkulačka na určování nejmenšího společného
násobku a největšího společného dělitele
PRACOVNÍ LIST**

Řeš jednotlivé úkoly. Pracuj pečlivě a přesně!

V prvních třech úkolech si žáci zopakovali pojmy největší společný dělitel a nejmenší společný násobek a nacvičený monotónní postup jejich určování.

1. Co je nejmenší společný násobek a největší společný dělitel dvou (nebo více) přirozených čísel? Jak násobek a dělitel označujeme? Pokud jsi to zapomněl, zjisti význam i označení obou pojmů ve školním sešitě nebo v knize.
2. Písemně urči nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 36 a 48. Využij prvočíselné rozklady jednotlivých čísel.

$$36 =$$

$$n(36, 48) =$$

$$48 =$$

$$D(36, 48) =$$

Proveď zkoušku správnosti! Správnost výsledku ověř u spolužáka. Znovu si uvědom, co daná čísla (výsledky) znamenají.

3. Zapiš prvočíselné rozklady vybraných složených čísel. Jednotlivé prvočinitele uspořádej v součinu od nejmenšího k největšímu.⁸

$$4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$30 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$32 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$33 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Následující úkoly č. 4 až 8 navedly žáka k sestavení vlastní „kalkulačky“. Potřebný materiál připravil v předstihu učitel.

4. Na připravenou papírovou šablonu (Obrázek 1) přilož průhlednou fólii. Do horní části fólie přepiš fixem správný tvar prvočíselného rozkladu čísla 48. Fixem zakroužkuj na fólii ta prvočísla, která tvoří prvočíselný rozklad čísla 48. (Obrázek 2) Prvočísla kroužkuj zleva doprava. Výsledek správně popsané fólie pro číslo 48 je pro kontrolu na obrázku 3.

⁸ Vůči původnímu pracovnímu listu zde byl seznam čísel zkrácen.

Obrázek 1

2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
5	5	5	5	5	5
7	7	7	7	7	7
11	11	11	11	11	11

Obrázek 2

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$					
②	②	②	②	2	2
③	3	3	3	3	3
5	5	5	5	5	5
7	7	7	7	7	7
11	11	11	11	11	11



Obrázek 3

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$					
○	○	○	○		
○					

5. Podle návodu v úkolu 4 vytvoř fólii pro číslo 36. Správná podoba fólie pro číslo 36 je na obrázku 4.

Obrázek 4

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$					
○	○				
○	○				

Obrázek 5

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$					
②	②	②	②	2	2
③	③	3	3	3	3
5	5	5	5	5	5
7	7	7	7	7	7
11	11	11	11	11	11

6. Postupuj podle návodu v úkolu 4 a připrav si fólie s prvočíselnými rozklady alespoň šesti čísel. Vyber si z těchto čísel: 16, 18, 20, 27, 33, 35, 45, 48, 50, 54.

7. Do plastického obalu na průkazky vlož nejdříve papírovou šablonu s prvočísly a na ni pak obě připravené fólie pro čísla 48 a 36. (Obrázek 5) Díky průhlednosti fólií uvidíš, která prvočísla byla dříve zakroužkována. Která prvočísla jsou zakroužkována opakovaně a která jen jednou?

8. Zapiš a urči:

a) součin všech zakroužkovaných prvočísel: =

b) součin prvočísel zakroužkovaných **současně** na obou fóliích? =

Co vyjadřují oba určené součiny prvočísel? Srovnej výsledky v části a) a b) s výsledky úkolu 2. Co ze srovnání vyplývá?

V úkolu 8 dojde k porovnání výsledků z dosud známých a nových postupů práce při hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Žáci objevují, že největším společným dělitelem daných složených čísel je součin všech prvočinitelů současně zakroužkovaných na všech fóliích daných složených čísel a jejich nejmenším společným násobkem je součin všech prvočinitelů, které jsou při překrytí fólií zakroužkovány.

Poslední úkoly pracovního listu, jejichž správnost splnění byla v závěru hodiny ověřena, se zaměřily na využití objevených funkcí kalkulačky. Úloha 10 zůstala žákům za domácí cvičení.

9. Užitím vytvořené „kalkulačky“ urči hledaná čísla. Správnost výsledků ověř výpočtem a u spolužáka.

$$n(16, 18) = \quad D(16, 18) =$$

$$n(16, 36) = \quad D(16, 36) =$$

$$n(20, 35) = \quad D(20, 35) =$$

$$n(45, 50) = \quad D(45, 50) =$$

$$n(27, 33) = \quad D(27, 33) =$$

$$n(48, 54) = \quad D(48, 54) =$$

10. Připrav si potřebné fólie a užitím „kalkulačky“ urči:

$$n(210, 220), \quad D(210, 220).$$

Výsledek ověř písemným výpočtem.

Zkušenosti z výuky

Takto připravená hodina byla realizována v pondělí 20. 12. 2010 se žáky prvního ročníku osmiletého studia (třída 1.A) na Gymnáziu V. Nováka v Jindřichově Hradci v učebně matematiky. Protože se jednalo o poslední hodiny výuky matematiky v roce 2010, vytvořili si tak žáci malý dárek.

Na novou formu práce v hodině matematiky byli žáci v předstihu připraveni. Díky vhodné motivaci a správným pokynům se hned všichni pustili s nadšením do práce a již po krátké době od zahájení hodiny bylo možné sledovat první výsledky jejich samoučení.

Během samostatné práce žáků se neobjevily žádné závažné organizační problémy ani potíže s porozuměním zadaných úkolů. Téměř všichni žáci správně vyřešili závěrečné úkoly a především si uvědomili, prakticky vyzkoušeli a využili „skryté“ funkce vytvořené pomůcky. Někteří žáci při závěrečné diskusi přiznali, že si dříve jen s obtížemi pamatovali postup na hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Nyní si pojmy dělitel a násobek vhodně asociují s principem fungování „kalkulačky“.

Za výrazný motivační efekt pro další práci žáků v hodinách matematiky považují skutečnost, že si všichni po skončení hodiny odnášeli domů s sebou konkrétní výsledek své práce, se kterým se mohli pochlubit například svým rodičům. Ti jistě ocení atraktivitu učitelem připravovaných hodin.

Závěr

K hlavním cílům výuky matematiky řadím nejen „osvojování základních matematických pojmů a vztahů. . .“ (3, 22), ale hlavně vytváření hlubšího vhledu do významu pojmů prostřednictvím činnostních forem vyučování. Úkol sestavit „kalkulačku“ takové cíle naplňuje a lze jej tedy doporučit do všech ročníků 2. stupně ZŠ i do všech nižších ročníků víceletých gymnázií. Činnostní učení navazuje na dříve dosažené znalosti a dovednosti, probouzí a udržuje zájem žáků o studovanou problematiku a rozvíjí žákovu aktivitu a samostatnou činnost při výuce i mimo ni. Velký přínos může mít činnostní učení také k rozvoji emocionální složky osobnosti žáka.

Literatura

- [1] Herman, J. et al., *Dělitelnost*, Prometheus, Praha, 2. vyd., 1994. ISBN 80-7196-261-9.
- [2] Rosecká, Z. et al., *Malá didaktika činnostního učení*, Tvořivá škola, Brno, 1. vyd., 2003. ISBN 80-903397-0-0.
- [3] Kolektiv autorů, *RVP pro gymnázia*, VÚP, Praha, 2007. ISBN 80-87000-11-3.

PhDr. Jan Fiala, Ph.D.
Gymnázium V. Nováka
Husova 333
377 01 Jindřichův Hradec
e-mail: fjjh@post.cz