Vlastimil Dlab; Jindřich Bečvář

Ještě k číslu $\sqrt{2}$: Babylon a řetězové zlomky

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 1, 26–29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149523`

JEŠTĚ K ČÍSLU $\sqrt{2}$: BABYLON A ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Vlastimil Dlab, Jindřich Bečvář

Výpočet čísla $\sqrt{2}$ pomocí rekurzivní posloupnosti $\{a_t \mid 0 \leq t\}$ definované volbou a_0 a vztahem

$$a_{t+1} = \frac{1}{2}\left(a_t + \frac{2}{a_t}\right) \quad \text{pro} \quad t \geq 0 \tag{1}$$

byl pravděpodobně znám už Babyloňanům (viz [1]). Pro volbu $a_0 = 1$ dostáváme tuto posloupnost racionálních aproximací iracionálního čísla $\sqrt{2}$:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{665\,857}{470\,832}, \quad \dots$$

Tyto aproximace se objeví též jako některé konvergenty následujícího nekonečného řetězového zlomku

$$\{1; 2, 2, 2, \dots\} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{\cdots}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}},$$

jehož (limitní) hodnotou je právě iracionální číslo $\sqrt{2}$. Konvergenty

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad c_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}, \quad c_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}, \quad \dots$$

mají postupně hodnoty

$$c_0 = \frac{r_0}{s_0} = \frac{1}{1}, \quad c_1 = \frac{r_1}{s_1} = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{r_2}{s_2} = \frac{7}{5},$$
$$c_3 = \frac{r_3}{s_3} = \frac{17}{12}, \quad \ldots, \quad c_k = \frac{r_k}{s_k}, \quad \ldots$$

Je známo (a je snadné se přesvědčit), že pro čitatele r_k, $k \geq 0$, a jmenovatele s_k, $k \geq 0$, konvergent c_k platí následující rekurzivní předpis:

$$r_{k+2} = 2r_{k+1} + r_k, \qquad s_{k+2} = 2s_{k+1} + s_k, \qquad k \geq 0. \tag{2}$$

Posloupnost $\{r_k \mid 0 \leq k\}$ je tedy určena vztahem (2) a počáteční volbou $r_0 = 1$, $r_1 = 3$; jedná se o Pell-Lucasovu posloupnost

$$r_k = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{2}, \qquad k \geq 0.$$

Posloupnost $\{s_k \mid 0 \leq k\}$ je určena vztahem (2) a počáteční volbou $s_0 = 1$, $s_1 = 2$; jedná se tedy o Pellovu posloupnost

$$s_k = \sqrt{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} - (1-\sqrt{2})^{k+1}}{4}, \qquad k \geq 0.$$

Odvození těchto vzorců je poměrně snadné (viz např. [2]). Posloupnost konvergentů $\{c_k \mid 0 \leq k\}$ iracionálního čísla $\sqrt{2}$ je tedy dána vzorcem

$$c_k = \sqrt{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{(1+\sqrt{2})^{k+1} - (1-\sqrt{2})^{k+1}}, \qquad k \geq 0.$$

Nyní zformulujeme následující zajímavý vztah mezi členy této posloupnosti.

Pomocná věta. *Pro každé $k \geq 0$ je*

$$\frac{1}{2}\left(c_k + \frac{2}{c_k}\right) = c_{2k+1}.$$

Důkaz. Pišme $A = 1 + \sqrt{2}$ a $B = 1 - \sqrt{2}$. Potom

$$\frac{1}{2}\left(c_k + \frac{2}{c_k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{A^{k+1}-B^{k+1}}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{A^{k+1}-B^{k+1}}{A^{k+1}-B^{k+1}}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{A^{k+1}-B^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cdot (A^{2(k+1)} + B^{2(k+1)})}{(A^{k+1} + B^{k+1})(A^{k+1} - B^{k+1})} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{A^{2(k+1)} + B^{2(k+1)}}{A^{2(k+1)} - B^{2(k+1)}} = c_{2k+1}.$$

Odtud už bezprostředně plyne následující hlavní tvrzení.

Věta. *Babylonská posloupnost* $\{a_t \mid 0 \leq t\}$ *definovaná rekurzivně volbou* $a_0 = 1$ *a vztahem* (1) *je podposloupností konvergentů* $\{c_k \mid 0 \leq k\}$ *čísla* $\sqrt{2}$:

$$a_t = c_{2^t-1} = \sqrt{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})^{2^t} + (1-\sqrt{2})^{2^t}}{(1+\sqrt{2})^{2^t} - (1-\sqrt{2})^{2^t}}, \qquad t \geq 0.$$

Babylonská aproximace čísla $\sqrt{2}$ je tedy podstatně rychlejší než aproximace pomocí řetězových zlomků. Pro úplnost uveďme prvních 16 konvergentů čísla $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{1\,393}{985}, \quad \frac{3\,363}{2\,378},$$

$$\frac{8\,119}{5\,741}, \quad \frac{19\,601}{13\,860}, \quad \frac{47\,321}{33\,461}, \quad \frac{114\,243}{80\,782}, \quad \frac{275\,807}{195\,025}, \quad \frac{665\,857}{470\,832}, \quad \dots$$

Podposloupnost babylonských aproximací je tato:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{665\,857}{470\,832}, \quad \dots$$

Literatura

[1] Bečvář J., Dlab V., Babylonský výpočet čísla $\sqrt{2}$, *Učitel matematiky* **19**(2010/11), 66–71.

[2] Dlab V., Každý má svou posloupnost, připravujeme k tisku v časopise *Učitel matematiky*.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz