Emil Calda

O jednom trojúhelníku eukleidovsky nesestrojitelném

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 1, 23–25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149522`

O JEDNOM TROJÚHELNÍKU EUKLEIDOVSKY NESESTROJITELNÉM

EMIL CALDA

V následujících řádcích se budeme zabývat konstrukcí trojúhelníku z daných délek jeho stran a, b a poloměru ϱ vepsané kružnice. Tento trojúhelník – říkejme mu krátce trojúhelník *ábéró* – je známý nejen proto, že se nedá sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka, ale i kvůli tomu, že mnozí členové matematické obce se navzájem slovem *Ábéró* zdraví. Vděčíme za to kolegovi Dagu Hrubému, který úvodem svých přednášek začal takto oslovovat matematické publikum; díky jemu toto oslovení postupně přejímali další významné osobnosti a zdá se, že je pouze otázkou času, kdy *Ábéró* bude jako pozdrav používáno všemi členy matematické obce. Věnujme se však nejprve vysvětlení, proč konstrukce trojúhelníku *ábéró* není eukleidovsky proveditelná.

Jak známo, problém eukleidovské řešitelnosti konstrukčních úloh se pomocí analytické geometrie převádí na problém algebraický – zjišťuje se, zda rovnice, která se tímto způsobem získá, má kořeny, které lze pravítkem a kružítkem sestrojit. Jednoduchá situace nastává v případě, že získaná rovnice s racionálními koeficienty je lineární nebo kvadratická; o nich totiž platí, že mají pouze kořeny, které jsou eukleidovsky sestrojitelné. Rovnice kubická tuto vlastnost nemá, neboť platí věta (dokázaná v roce 1837 francouzským matematikem Wantzelem):

Věta: *Jestliže rovnice třetího stupně s racionálními koeficienty nemá racionální kořeny, nemá ani kořeny eukleidovsky sestrojitelné.*

Tento výsledek použijeme k tomu, abychom ukázali, že existuje taková volba hodnot a, b, ϱ, že zbývající stranu c trojúhelníku *ábéró* nelze pomocí pravítka a kružítka sestrojit; tím bude dokázáno, že trojúhelník *ábéró* není možné zkonstruovat eukleidovsky.

Vyjdeme z rovnice

$$\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=\frac{\varrho\cdot(a+b+c)}{2}$$

s neznámou c a parametry a, b, ϱ, kde $s=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)$.

Volbou $a=6$, $b=3$, $\varrho=1$, o níž později ukážeme, že trojúhelník této vlastnosti existuje, a umocněním na druhou přejde tato rovnice na tvar

$$\frac{9+c}{2}\cdot\frac{c-3}{2}\cdot\frac{c+3}{2}\cdot\frac{9-c}{2}=\frac{(9+c)^2}{4},$$

odkud dostaneme

$$c^3-9c^2-5c+117=0.$$

Podle známé věty o racionálních kořenech rovnice s racionálními koeficienty mohou být jejími racionálními kořeny pouze dělitelé čísla $117=1\cdot3\cdot3\cdot13$; a protože přicházejí v úvahu pouze čísla kladná, mohou to být pouze čísla: 1, 3, 9, 13, 39, 117. Čtenář snadno zjistí, že žádné z nich této rovnici nevyhovuje. Znamená to, že tato rovnice nemá žádný eukleidovsky sestrojitelný kořen, takže trojúhelník s hodnotami $a=6$, $b=3$, $\varrho=1$, pokud existuje, nelze pomocí pravítka a kružítka sestrojit. Zbývá dokázat, že takový trojúhelník existuje; k tomu stačí se přesvědčit, že rovnice $c^3-9c^2-5c+117=0$ má aspoň jeden kladný reálný kořen.

Za tím účelem vyšetříme průběh funkce $f(c)=c^3-9c^2-5c+117$. Známým způsobem zjistíme, že tato funkce v bodě $\frac{1}{3}\cdot\left(9+4\sqrt{6}\right)$ nabývá svého lokálního minima, jehož hodnota je záporná; a protože funkce f v intervalu $\left\langle\frac{1}{3}\cdot\left(9+4\sqrt{6}\right),+\infty\right)$ roste nade všechny meze, existuje takové kladné číslo c, že $f(c)=0$.

Shrnutím předcházejících úvah a výpočtů dostáváme výsledek: Trojúhelník *ábéró* pro hodnoty $a=6$, $b=3$, $\varrho=1$ existuje, ale není eukleidovsky sestrojitelný; znamená to, že pro každé hodnoty a, b, ϱ nelze trojúhelník *ábéró* sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka.

Přejděme nyní od trojúhelníku *ábéró* k pozdravu *Ábéró*. Je zřejmé, že nepostrádá jistou vznešenost – řecké písmeno ϱ evokuje Homérovu Iliadu, Euklidovy Základy, Platónův svět idejí a také bitvu u Marathónu, v níž Řekové na hlavu porazili perské dobyvatele. *Ábéró* je nepochybně vznešenější, než kdybychom říkali *Ábécé*, nebo dokonce *Ábévécé*, kteréžto oslovení evokuje něco úplně jiného. Ti, kteří se zdraví *Ábéró*, také vědí, že některé trojúhelníky sestrojit nemohou, takže stojí v jiné morální rovině než ti, kteří se domnívají, že mohou všechno. Uveďme dále, že vzhledem k tomu, že některé osoby tento pozdrav dosud neznají, je vhodné dbát na jasnou a zřetelnou výslovnost. Bylo by jistě nepříjemné, kdyby nedbalá artikulace způsobila, že některá VIP by si náš pozdrav vyložila ve smyslu *Tě péró* nebo dokonce *Daj péró* a že některý kašlající důchodce by ho mohl považovat za netaktní otázku *Tubéró*? Pochopí-li zasmušilé osoby sedící na břehu řeky nad nehybným splávkem náš pozdrav *Ábéró* jako dotaz *Nebéró?*, pravděpodobně nám vůbec neodpoví. Podotkněme pro úplnost, že někteří fyzikové se domnívají, že *Ábéró* vyjadřuje hmotnost homogenní obdélníkové desky s rozměry a, b a s jednotkovou výškou zhotovené z materiálu o hustotě ϱ.

Na závěr ještě uveďme, že uvedeným oslovením můžeme svá sdělení matematickým kolegům nejen začínat, ale i končit. Což tímto činím i já. *Ábéró*.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz