Irena Budínová

Osvojování vědomostí o lineárních funkcích žáky gymnázia

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 1, 13–22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149521

OSVOJOVÁNÍ VĚDOMOSTÍ O LINEÁRNÍCH FUNKCÍCH ŽÁKY GYMNÁZIA

IRENA BUDÍNOVÁ

Když jsem učila asi druhým rokem matematiku na základní škole, řekla mi v souvislosti s učivem o funkcích jedna paní učitelka: „Toho učiva, co by si žáci měli osvojit, je tak strašně moc. A navíc je to pro ně těžké.“ Tento postřeh mě zaujal a od té doby jsem se začala zajímat o další zkušenosti s učivem funkcí mých kolegů. Poslouchala jsem nářky v kabinetu a zaznamenávala jsem chyby, které žáci v tomto učivu dělali.

Když jsem si vzpomněla na své vlastní studium, uvědomila jsem si, že jsem funkce z duše nenáviděla. Co se týká základní školy, ani se nepamatuji, že by se o nich mluvilo. Zato záplava grafů na střední škole, které mi samy o sobě nedávaly vůbec žádný smysl, mě dokonale od porozumění tomuto učivu odradila. Na vysoké škole jsem sice začala studovat fyziku, ale matematice jsem se pochopitelně nevyhnula. Úmorným samostudiem jsem doháněla středoškolské (a mnohdy i základoškolské) studium a v pátém ročníku jsem se přistihla při tom, že jsem ve funkcích nalezla zalíbení.

Mnohé české i zahraniční výzkumy ukazují, že žáci mají v oblasti funkcí mnoho špatných představ. Např. výzkum A. Kopáčkové (Kopáčková, 2002, s. 157, Kopáčková, 2003) poukazuje na fakt, že žáci mají poněkud zkreslené povědomí o tom, co je a není funkce. Např. při rozhodování žáků o tom, který graf je či není grafem funkce, hrála roli známost modelu, spojitost, symetrie, hladkost grafu apod. Diskrétnost nebo konstantnost grafu vzbuzovala v žácích pocit „nefunkce“. Obdobně americký výzkum (Carslon, Oehrtman, 2005) odhalil, že žáci konstantní funkci nepovažují za funkci, neboť očekávají, že předpis funkce má obsahovat symbol „x“, že mají problémy s rozlišením závisle a nezávisle proměnné, že jejich představy o funkcích jsou omezeny na specifické funkce (zejména lineární a kvadratickou).

Při výuce na gymnáziu jsem dostala možnost důkladně se problematikou výuky funkcí zabývat. Sestavila jsem jednak několik didaktických testů, kterými jsem se snažila určit hlavní nedostatky ve vědomostech a dovednostech žáků, také jsem však navrhla a realizovala výukovou metodu, kterou jsem zamýšlela dosáhnout lepších studijních výsledků u žáků. Stejně jako výsledky mě zajímal průběh výuky, potíže žáků s novými pojmy nebo jejich schopnost neformálně pracovat s prekoncepty.

Při výuce jsem po žácích požadovala samostatnou práci. To se zejména ze začátku jevilo jako problematické jednak pro velkou časovou náročnost a jednak proto, že řada žáků o takový přístup vůbec neměla zájem, raději by něco opisovali z tabule než během výuky přemýšleli. Úlohy, které jsem ve výuce využívala, jsem částečně vytvářela sama a částečně jsem se inspirovala v učebnici pro gymnázia *Funkce* (Odvárko, 1993). Výuka, která probíhala po dobu dvou měsíců ve druhém ročníku gymnázia, se rozložila do několika fází, které nyní popíšu.

Fáze 1: Osvojení základních pojmů

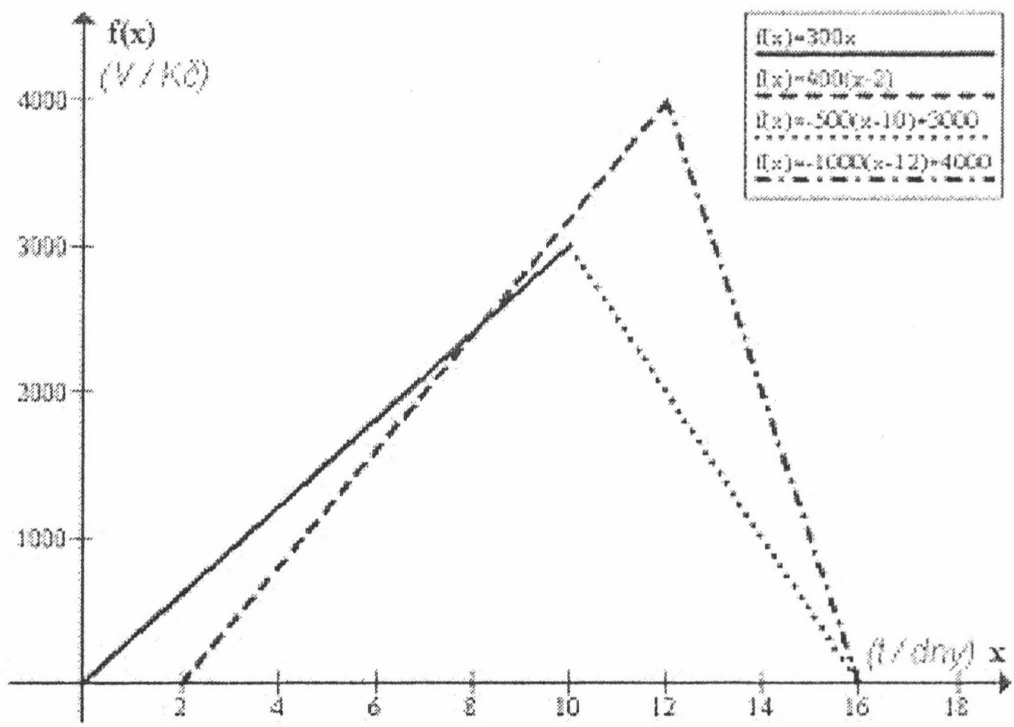
Základní pojmy (jako jsou nezávisle a závisle proměnná, definiční obor, graf funkce apod.) byly zavedeny pomocí úloh, v nichž měli žáci možnost použít strategií řešení bez využití funkčního myšlení[1].

1. Učivo: *Závislosti dvou proměnných – vztah závisle a nezávisle proměnné. Jak poznat, která je která? Je podstatné je odlišovat? Graf funkce.*

Metoda: Odvozování základních pojmů na časových závislostech.

[1]**Funkční myšlení** popisuje Smith (2003, in Blanton, Kaput, 2004, s. 135) jako *„názorné myšlení, které se zaměřuje na vztah mezi dvěma (nebo více) proměnnými a pro které funkce znamenají názorný systém objevený nebo osvojený dětmi, který reprezentuje zobecnění vztahu mezi veličinami.“* V České republice se funkčním myšlením zabývají např. Eisenmann a Kopáčková (Eisenmann 2005/2006, 2006, Eisenmann, Kopáčková, 2006).

- *Úloha 1:* Alice chodí na brigádu. Každý odpracovaný den vydělá průměrně 300 Kč. Zapiš tabulku závislosti vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů a zakresli graf.
- *Úloha 2:* Bára začala chodit na brigádu o 2 dny později, ale denně vydělá průměrně 400 Kč. Zapiš tabulku, zakresli graf a zjisti, který den má Bára stejně peněz jako Alice.
- *Úloha 3:* Alice chodila na brigádu 10 dnů a pak začala peníze utrácet. Za jak dlouho by všechny utratila, kdyby denně utratila průměrně 500 Kč? Zakresli graf.
- *Úloha 4:* Bára pracovala také 10 dnů. Kolik by mohla denně utratit, aby všechny peníze utratila zároveň s Alicí? Zakresli graf.



Obr. 1: Grafy pro úlohy 1–4[2]

[2]Pro větší přehlednost je zde uveden spojnicový graf. Při práci v hodině sestrojili žáci graf pomocí izolovaných bodů (tak jak odpovídá danému diskrétnímu jevu) a při zobecnění konkrétních úloh na funkční předpis již pracovali se spojnicovým grafem.

2. Učivo: *Funkční předpis pomocí rovnice – pochopení významu zápisu $y = ax + b$.*

Metoda: Zobecnění výsledků předchozích příkladů.

- *Úloha 5:* Nalezni funkční předpis pro závislost vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů ve všech předešlých případech.

3. Učivo: *Definiční obor a obor hodnot. Co je a není funkce.*

Metoda: Zavedení důležitých pojmů na konkrétních příkladech, kterým žáci porozuměli.

- *Úloha 6:* Zapiš definiční obory (tj. všechny hodnoty, kterých může nabývat nezávisle proměnná) a obory hodnot (tj. všechny hodnoty, kterých nabývá závisle proměnná) v předešlých případech.
- *Úloha 7:* Zakresli graf se svislou úsečkou a interpretuj jej[4].

Při řešení těchto úloh byl na žáky kladen požadavek samostatné práce ve skupinách. Žáci měli možnost se mezi sebou domlouvat, navrhovat a odůvodňovat řešení. Při této činnosti jsem je pouze pozorovala, nezasahovala do ní, nekomentovala nesprávná řešení, protože obvykle se našel spolužák, který upozornil, že myšlenka není správná. Důsledkem tak bylo, že vyřešení uvedených úloh bylo značně časově náročné.

Ze začátku museli být žáci upozorněni na to, jak mají popisovat osy. Buď je totiž nepopisovali vůbec, nebo tak, jak byli zvyklí ze základní školy – písmeny x a y. Takové označení však neumožní zpětné vyčtení informací z grafu. Žáci měli osy popisovat pomocí „veličiny“ i „jednotky“ (např. výdělek v korunách). Zjistilo se, že žáci vůbec netuší, jak mají poznat nezávisle a závisle proměnnou. Vysvětlit jim, které proměnné přísluší která osa, trvalo několik vyučovacích hodin. Teprve po několika týdnech dokázali v podstatě

[4]Žáci si zakreslili graf, kde nezávislou proměnnou byl čas a závislou např. vydělané peníze. Dokázali vyčíst, že podle grafu se svislou úsečkou sice čas neplyne, ale mění se množství vydělaných peněz, což není možné.

všichni žáci správně popsat osy a pochopili rozdíl mezi nezávisle a závisle proměnnou.

Při řešení žáci používali výpočtových metod nebo tabulky. Např. úlohu 3 žáci řešili obvykle tak, že nejdříve pomocí tabulky zjistili, kolik peněz měla Alice po 10 dnech (je to 3 000 Kč) a potom už jednoduše vydělili 3 000 : 500, aby určili, kolik dnů by je utrácela.

U úlohy 5 si někteří žáci vzpomněli ze základní školy, co je to funkční předpis. Pokud ne, připomněla jsem jim, že jestliže si denně vydělám 300 Kč, za 2 dny je to $300 \cdot 2$ Kč, za x dnů $300 \cdot x$ Kč. S větší či menší pomocí byli žáci schopni pochopit také to, že pro Báru platí $400 \cdot (x-2)$, protože například 5. uvažovaný den pracuje Bára teprve 3 dny. Pro zbytek případů už byla většina žáků schopna pracovat samostatně.

Hlavní problém byl pro žáky v zakreslení grafu tak, aby se jim celý vešel do sešitu. Jako by nedokázali dopředu přemýšlet o tom, jaký je definiční obor a obor hodnot funkce, začali kreslit a teprve potom zjistili, že si graf špatně rozmístili a museli začít znovu.

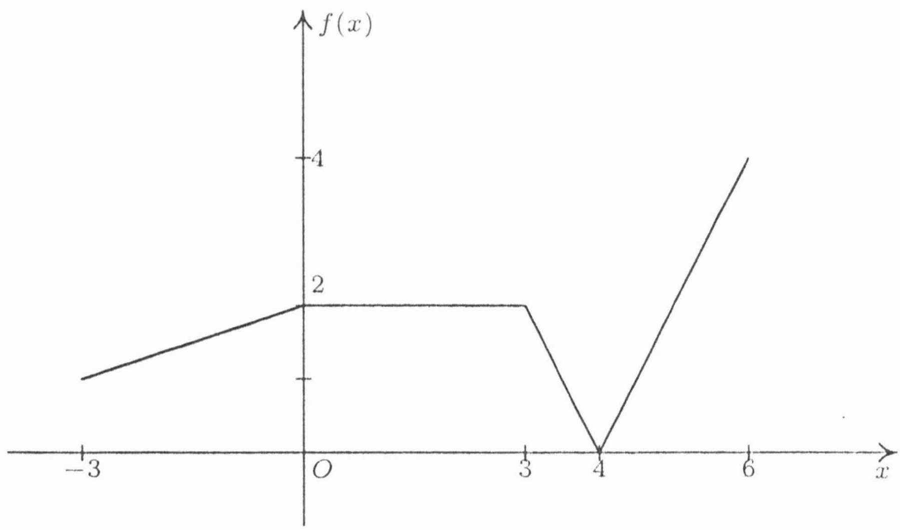
Fáze 2: Procvičování pojmů

Přestože se po určité době zdálo, že žáci již pojmy pochopili a rozumí jim, při procvičování se vynořila celá řada dalších problémů. Jednalo se zejména o zápisy jako $y = f(x)$, $\mathsf{D}(f)$ a $\mathsf{H}(f)$, neustále zaměňovali symboly $=$ a $\in$. Dále žáci zaměňovali interval a n-prvkovou množinu, takže pro dva grafy, z nichž jeden byl zakreslen pomocí úsečky a druhý pomocí tří bodů, zapsali naprosto stejné definiční obory. Celkově měli problémy s chápáním spojitosti a diskrétnosti, měli velké nedostatky v množinových zápisech $(\{\}, (), =, \in)$. To pro učitele, který vidí jasný rozdíl mezi grafem spojitým a diskrétním, není zcela pochopitelné. Sama jsem byla překvapena tím, jak moc jsou žákům pojmy množinové matematiky cizí. Pokud jsem chtěla docílit toho, aby pro ně různě formulované úlohy nebyly pouze velkým bludištěm, znamenalo to další časové zdržení. Považovala jsem však za důležité opakovat stejné úlohy tak dlouho, jak bylo potřeba. Např. velmi problematická byla úloha, kdy žáci měli z grafu na obr. 2 vyčíst následující informace:

a) určit $\mathsf{D}(f)$ a $\mathsf{H}(f)$,

b) určit hodnotu funkce v bodech -2; -1 (stačilo přibližně odhadnout, žáci se obvykle bavili vymýšlením čísel jako $f(-2) = 1{,}333$); 0,5; 1; 2,

c) zjistit všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $f(x) = -2; 0; 1; 2; 3$.



Obr. 2

Fáze 3: Používání dynamických postupů[5] při zakreslování grafů elementárních funkcí

Při odvozování zákonitostí pro lineární funkci jsme se vrátili k řešení aplikačních úloh. Úkolem bylo zakreslit graf, určit funkční předpis a definiční obor funkce.
Do jednoho grafu zakresli následující závislosti:

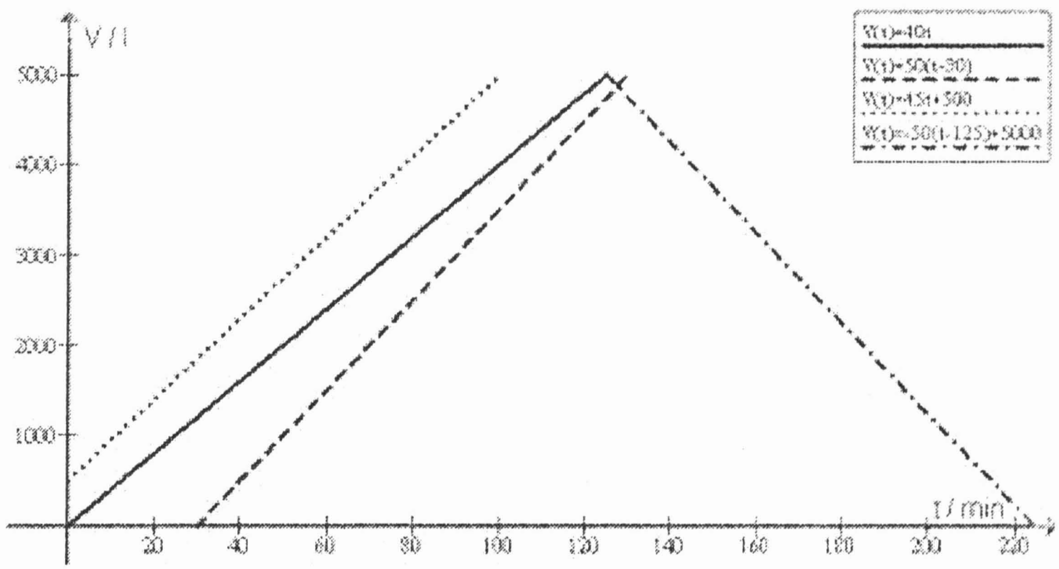
[5] Dynamickými postupy myslíme postupy, při nichž je používáno funkčního myšlení, zatímco statické postupy nahrazují funkční myšlení jinými výpočtovými metodami (Budínová, 2010, s. 26). Např. při zakreslování grafu lineární funkce může žák postupovat tak, že získá souřadnice bodů dosazením několika diskrétních hodnot za proměnnou x (statický postup), nebo že chápe význam symbolů ve formuli $y = ax + b$ a graf zakreslí bez dosazování konkrétních hodnot (dynamický postup).

a) Do bazénu přitéká voda rychlostí 40 l/min, na začátku je bazén prázdný. Objem bazénu je 5 000 l. ($V(t) = 40t$, $\mathsf{D}(V) = \langle 0; 125 \rangle$)

b) Do bazénu přitéká voda rychlostí 50 l/min, přitéká o 30 min. později než do bazénu a). ($V(t) = 50(t - 30)$, $\mathsf{D}(V) = \langle 30; 130 \rangle$)

c) Do bazénu přitéká voda rychlostí 45 l/min, na počátku plnění bylo v bazénu 500 l vody. ($V(t) = 45t + 500$, $\mathsf{D}(V) = \langle 0; 100 \rangle$)

d) Z bazénu a) začíná po naplnění voda vytékat rychlostí 50 l/min. ($V(t) = 50t + 5\,000$, $\mathsf{D}(V) = \langle 0; 100 \rangle$, pokud by graf zakreslovali do stejného obrázku jako v části a), pak $V(t) = 50(t - 125) + 5\,000$, $\mathsf{D}(V) = \langle 125; 225 \rangle$)



Obr. 3: Grafy pro závislosti a)–d)

Žáci na základě těchto úloh pochopili význam koeficientů v zápise $y = ax + b$ a souvislost s grafem. Dlužno poznamenat, že správná řešení byla většina žáků schopna určovat samostatně.

V učivu lineárních funkcí jsem od studentů od počátku požadovala, aby graf nezakreslovali pomocí bodů, ale rovnou ze zápisu $y = ax + b$, ze kterého určí směrnici a posunutí. Tento postup je výhodný pro další funkce a lze jej použít jako šablonu, neboť všechny další funkce se chovají obdobně. Mnohem snáze si proto zapamatovali i zakreslování grafů dalších elementárních funkcí.

Na příkladu funkce $y = 2x + 1$ ukážeme, jakým způsobem studenti postupovali:

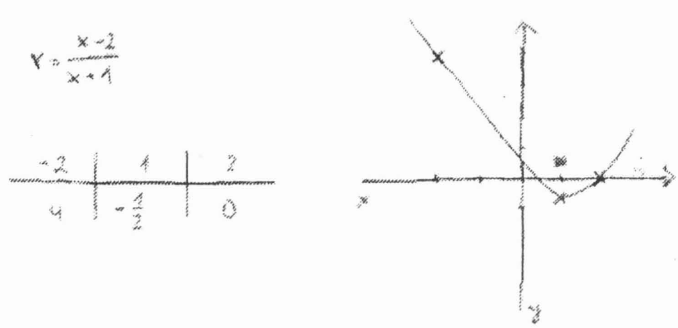
a) Nakreslili graf funkce $y = x$.

b) Nakreslili graf funkce $y = 2x$, který má oproti předchozí funkci dvojnásobnou směrnici. Na tento fakt přišli bez větších potíží sami žáci, neboť pro ně nebyl problém představit si, že tato funkce roste dvakrát rychleji.

c) Nakreslili graf funkce $y = 2x + 1$, který je oproti předchozímu posunut o 1 na ose y. Tento fakt vyplynul z aplikačních úloh, kdy žáci sami učinili závěr, co ve funkčním předpisu znamená koeficient b. Také byli upozorněni, že zápis si můžou přepsat jako $y = 2(x + \frac{1}{2})$, z čehož poznají posunutí po ose x. I tento fakt vyplynul z aplikačních úloh.

Dále měli žáci u každého zadání určit vlastnosti funkce.

Tento postup má využití i u některých dalších elementárních funkcí, se kterými se žáci seznamují na gymnáziu. Pokud se od začátku dbá na to, aby žáci používali dynamické postupy a nezakreslovali grafy pomocí několika bodů, které se spojí, může se předejít např. tomu, že žáci u lineárně lomené funkce dosadí dvě nebo tři hodnoty za x a získané body spojí jedinou křivkou, jak se s tím často setkávám a jak to ukazuje obr. 4.



Obr. 4

Závěr

Přestože na začátku došlo k velkému časovému zdržení (i při časové dotaci 4 hodiny matematiky týdně), později jsem měla dojem, že žáci dokáží daleko rychleji uchopit nové učivo. Proto konečná časová ztráta oproti učebnímu plánu byla nulová.

Na závěr jsem použila didaktický test k ověření osvojených vědomostí. Test sestával z problémové úlohy[6], dále měli žáci na základě grafu určit definiční obor funkce, funkční hodnoty v určitých bodech a naopak pro funkční hodnoty najít příslušná x, zakreslit několik grafů lineární funkce, kvadratické funkce a lineárně lomené funkce (různé obtížnosti) a určit jejich vlastnosti.

Žáci ve velké většině využívali pro řešení úloh dynamických postupů, neměli větší problémy s určením definičního oboru nebo oboru hodnot funkce, se čtením údajů z grafu, ať už šlo o určování hodnot nezávisle nebo závisle proměnné (ve všech případech vždy jen několik žáků třídy řešení neumělo najít nebo v něm učinili nějakou chybu). Také při zakreslování grafů funkcí a určování jejich vlastností byli velmi úspěšní. I nadále však byly pro žáky obtížné problémově formulované úlohy, přestože se s nimi setkávali po celou dobu výukové metody. Žáci stále upřednostňovali úlohy, u nichž je možno přesně kopírovat určitý algoritmus.

Přestože se jednalo o poměrně krátkodobou sondu do výukové metody, která byla uplatněna na omezeném počtu žáků (1 třída, 30 žáků), domnívám se, že závěry zde uvedené by stálo za to ověřovat na dalších žácích. Při výuce jsem se totiž setkala s tím, že žáci dokázali po určité době sami formulovat své myšlenky v oblasti funkčního myšlení a projevovali poměrně vysokou míru samostatnosti při řešení úloh.

[6] Problémově formulovaná úloha: Pan Hruška se rozhoduje, zda má koupit jablka v místním zelinářství, kde stojí 25 Kč jeden kilogram, nebo jet na farmu, kde stejná jablka prodávají za 15 Kč za jeden kilogram, ale za cestu by zaplatil 250 Kč. Při jakém množství jablek se mu vyplatí jet na farmu? Zapiš předpis pro funkční závislosti ceny na množství jablek. Zakresli graf těchto závislostí.

Literatura

[1] Blanton, M. L., Kaput, J. J., Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking., In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* University of Massachusetts Dartmouth, 2004, 135–142.

[2] Budínová, I., *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ*, Disertační práce, Brno, 2010.

[3] Carlson, M., Oehrtman, M., Key Aspect of Knowing and Learning the Concept of Function, In *MAA online*, `http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html`, 2005.

[4] Eisenmann, P., Test funkčního myšlení žáků a studentů, *Matematika – fyzika – informatika* **15**(2005/2006), 323–327.

[5] Eisenmann, P., Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole, In *Sborník příspěvků celostátní konference Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let*, JČMF, Hradec Králové, 2006, 53–62.

[6] Eisenmann, P., Kopáčková, A., *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole*, Studijní materiály k projektu *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP* Praha,, JČMF, 2006.

[7] Kopáčková, A., Nejen žákovské představy o funkcích, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **47**(2002), Praha, 149–161.

[8] Kopáčková, A., How Not Only Czech Students Think about Functions, *The Autumn Conference in Mathematics Education* Praha, 2003, 47–52.

[9] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia: Funkce*, Praha, Prometheus, 1993.

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.
Katedra matematiky PedF MU, Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: sytarova@ped.muni.cz