Vlastimil Dlab

Pozoruhodné výrazy: každý si může sestrojit svoji „rovnost“!

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 4, 206–212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149514`

POZORUHODNÉ VÝRAZY: KAŽDÝ SI MŮŽE SESTROJIT SVOJI „ROVNOST"!

VLASTIMIL DLAB[1]

Patrně jste se už setkali s podivným („pseudomatematickým") výrazem

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{1}$$

či

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots}}}}} = 1,$$

či

$$\sqrt[5]{30+\sqrt[5]{30+\sqrt[5]{30+\sqrt[5]{30+\sqrt[5]{30+\cdots}}}}} = 2,$$

anebo

$$\sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{12+\cdots}}}}} = 3.$$

Číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve výrazu (1) je kladný kořen kvadratické rovnice $x^2 = x + 1$, tak zvané *zlaté číslo*. Výraz (1) při tom představuje následující (matematické) tvrzení:

[1] Tento příspěvek volně navazuje na článek E. Caldy uvedený v literatuře.

Je-li $a_0 = \sqrt{1}$ *a* $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ *pro* $n \geq 2$*, potom*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Výraz (1) by tedy mohl být poněkud srozumitelněji zapsán takto:

$$\cdots\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

A podobně by mohly být zapsány ostatní shora uvedené výrazy.

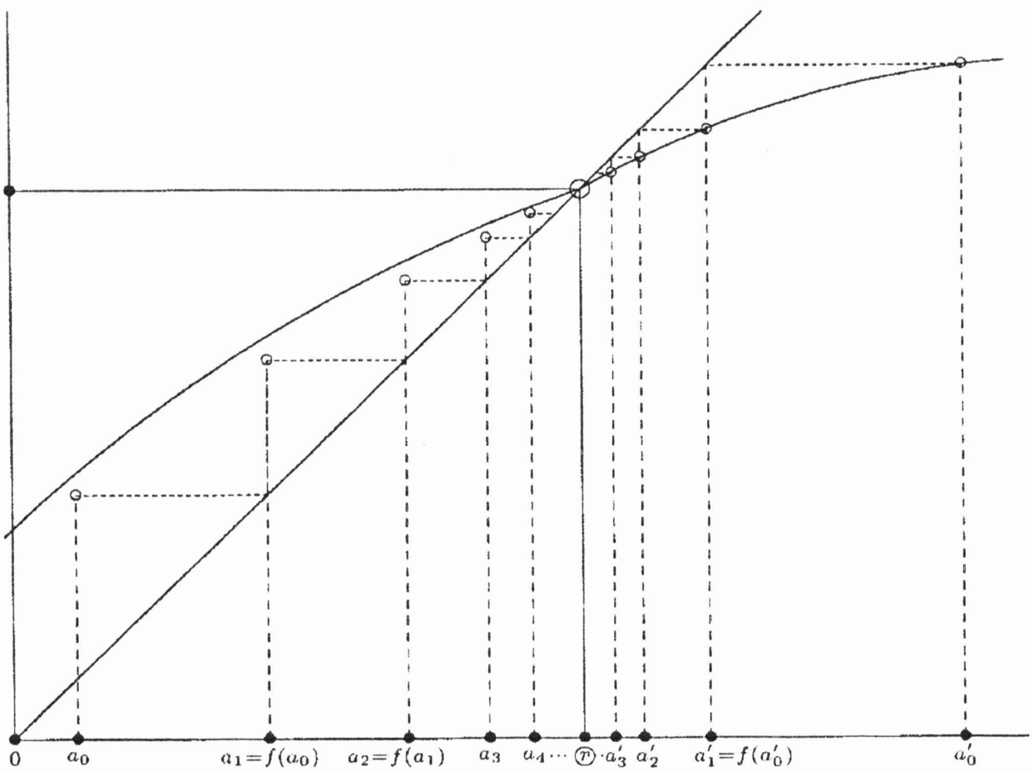
Tyto výrazy (a jim podobné) lehce zbavíme jejich mystiky a zároveň popíšeme postup, jak je vytvářet. Vše plyne z následujícího tvrzení (které je možno různým způsobem zobecňovat a upřesňovat).

Nechť f *je rostoucí spojitá funkce definovaná pro všechna nezáporná reálná čísla* $x \geq 0$*. Nechť* $f(0) > 0$ *a nechť existuje právě jedno reálné číslo* r*, pro něž* $f(r) = r$*.*

Definujme následující rekurentní posloupnost $\{a_n \mid 0 \leq n\}$*: Zvolme libovolné* $a_0 \geq 0$ *a položme* $a_{n+1} = f(a_n)$ *pro* $n \geq 0$*. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r.$$

Důkaz plyne bezprostředně z následujícího obrázku.



Graf funkce $y = f(x)$ a funkce $y = x$

Obrázek ukazuje, že pro posloupnost $\{a_n\}$ nastávají tři možnosti: posloupnost je rostoucí pro $a_0 < r$, stacionární pro $a_0 = r$ (tj. $a_n = r$ pro všechna n) a klesající pro $a_0 > r$ (na obrázku označené a'_0).

Ve všech případech postupujeme stejně. Omezená monotonní posloupnost má (konečnou) limitu. Označme ji s. Jelikož je funkce f spojitá,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s \quad \text{implikuje} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(s).$$

Posloupnosti $\{a_n \mid n \geq 1\}$ a $\{f(a_n) \mid n \geq 0\}$ jsou však identické, a tedy je $f(s) = s$. V důsledku našeho předpokladu proto dostáváme rovnost $s = r$, čímž je tvrzení dokázáno.

Vraťme se k našim výrazům. Nyní stačí např. zvolit funkci $f(x) = \sqrt{x+1}$ a $a_0 = f(0)$, abychom dostali výraz (2). Poznamenejme, že v posloupnosti $\{a_n\}$ můžeme zaměnit konečný počet členů, aniž bychom změnili její limitu. Tedy např.

$$\cdots\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{100000+\sqrt{\pi+\sqrt{0.277}}}}}}}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zcela obecně, pro libovolné přirozené číslo $k \geq 2$, položme

$$f(x) = \sqrt[k]{ax+b}, \quad \text{kde} \quad a > 0, b > 0 \text{ jsou libovolná reálná čísla.}$$

Pro $k = 2$ tedy dostáváme výraz

$$\cdots\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{\cdots a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b}}}}}}}} =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2},$$

a speciálně pro $a = b = \frac{1}{2}$,

$$\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}} = 1.$$

Pro libovolné kladné reálné číslo r, libovolné $0 < a < r$ a $b = r(r-a)$,

$$\cdots\sqrt{b+a\sqrt{\cdots a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b+a\sqrt{b}}}}}}} = r; \quad (3)$$

např. pro libovolné celé číslo $r \geq 2$, $a = 1$, $b = r(r-1)$ je

$$\cdots\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{\cdots\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b}}}}}}}} = r.$$

Tedy

$$\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}} = 2,$$

či

$$\cdots\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\cdots\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}}}} = 3 \quad \text{atd.}$$

Obecněji,

$$\cdots\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\cdots 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}}}}} = 3,$$

či

$$\cdots\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\cdots 3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10}}}}}}} = 5.$$

Výraz (3) lze též obdržet volbou libovolného čísla $0 < b < r^2$ a $a = \dfrac{r^2 - b}{r}$.

Pro $k > 2$ dostáváme další neomezené možnosti voleb čísel r, a a b. Uveďme alespoň několik příkladů. Pro libovolné kladné reálné číslo r je

$$\cdots\sqrt[k]{b+\sqrt[k]{\cdots\sqrt[k]{b+\sqrt[k]{b+\sqrt[k]{b+\sqrt[k]{b+\sqrt[k]{b}}}}}}} = r,$$

kde $b = r^k - r$. To odpovídá funkci $f(x) = \sqrt[k]{x+b}$ pro $b > 0$. Např.

$$\cdots\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}}} = 2,$$

$$\cdots\sqrt[5]{240+\sqrt[5]{240+\sqrt[5]{\cdots\sqrt[5]{240+\sqrt[5]{240+\sqrt[5]{240+\sqrt[5]{240}}}}}}} = 3,$$

nebo

$$\cdots\sqrt[9]{510+\sqrt[9]{510+\sqrt[9]{\cdots\sqrt[9]{510+\sqrt[9]{510+\sqrt[9]{510+\sqrt[9]{510}}}}}}} = 2.$$

Poznamenejme, že pro $k = 1$ je nutné předpokládat $0 < a < 1$. Potom dostaneme naším postupem součet geometrické řady

$$\left(\cdots + a^n + \cdots + a^3 + a^2 + a + 1\right) b = \frac{b}{1-a}.$$

Pestrost výrazů obohatíme náročnější volbou funkce f. Už funkce

$$f(x) = \sqrt{c + \sqrt{ax+b}}$$

přináší do výrazů nové prvky. **Sestrojte si svoji „rovnost"!**

Závěrečná poznámka. Výrazy zcela jiného typu obdržíme např. volbou

$$f(x) = x^2 + a \quad \text{pro} \quad 0 \leq a < \frac{1}{4}.$$

Pro $a = \frac{1}{8}$ a $\frac{2-\sqrt{2}}{4} \leq d < \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ dostáváme

$$\cdots\left(\cdots\left(\left(\left(d^2+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\right)^2+\cdots = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Pro $a = \frac{3}{16}$ a $\frac{1}{4} \leq d < \frac{3}{4}$ je

$$\cdots\left(\cdots\left(\left(\left(d^2+\frac{3}{16}\right)^2+\frac{3}{16}\right)^2+\frac{3}{16}\right)^2+\cdots+\frac{3}{16}\right)^2+\cdots = \frac{1}{4}.$$

Literatura

[1] Calda, E., Zlaté číslo a limity dvou posloupností, *Učitel matematiky* **79**(2011), 146–149.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca

ABSTRACT

The article presents a theorem which concerns functions and sequences. This theorem can be used in order to create equalities with a fractional numerical expression or a natural number on the one side and a nested radical on the other.