Barbora Divišová

Fraktály a jak o nich učit

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 3, 144–158

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149504`

FRAKTÁLY A JAK O NICH UČIT

BARBORA DIVIŠOVÁ

1. Úvod

Tento článek rozhodně nemá být přehledem poznatků teorie fraktálů. Ta je příliš rozsáhlá a zasahuje do velkého množství matematických disciplín. Setkáváme se s ní například při studiu složitého analytického vyjádření dynamických systémů, jako jsou reálné paraboly, komplexní paraboly či Mandelbrotovy[1] množiny. Tato teorie však přesahuje také do mnoha jiných oborů. Velice často se dnes využívá v počítačové grafice a pomáhá při studiu dělení organizmů.

Popisy dynamických systémů, zejména právě Mandelbrotovy množiny, můžeme nalézt v mnohých knihách a článcích zabývajících se touto problematikou, například ve sborníku *Matematika na vysokých školách*, zaměřeném na determinismus a chaos (Herbertov, 2005) či v jiné níže uvedené literatuře. Po přečtení tohoto článku by měl však čtenář objevit, že fraktály jsou součástí každodenního života, krajiny kolem nás i chování nejrůznějších organismů a že tyto skutečné prvky všech geosfér je jimi možné popsat mnohem lépe než jakoukoliv jinou známou geometrií či algebrou. Navíc zde chci naznačit možnost uvedení náhledu do teorie fraktálů na základní a střední škole a poukázat na existenci fraktálů v naší bezprostřední blízkosti.

Pro čtenářovu lepší orientaci v článku jsem text proložila třemi rámečky s vysvětlením užívaných matematických pojmů tak, abych nenarušila obsah článku.

[1] Benoît Mandelbrot (1924–2010), matematik polsko-litevského původu, působil nejprve ve Francii, později v USA jako profesor matematických věd na Yaleské univerzitě a ve vývojovém středisku Thomase J. Watsona.

2. Vymezení pojmu fraktál

Při studiu literatury jsem získala dojem, že si každý autor z teorie fraktálů vezme jen tu část či úroveň, která je nezbytná pro jeho práci. Dokonce i vymezení pojmu fraktál je u každého odlišné, i když se navzájem jednotlivé články nevylučují. V literatuře jsem našla tři hlavní vysvětlení (zavedení, pochopení) fraktálu: striktně geometrické, geometricko-praktické a obecné[2].

2.1 Striktně geometrické vymezení pojmu fraktál

Při takovém vymezení fraktálu hraje hlavní roli neomezená soběpodobnost, kdy část je podobná celku (Kůrková, 1991). Základem jsou tvary, u nichž detail reprodukuje část a část reprodukuje celek (Mandelbrot, 2003).

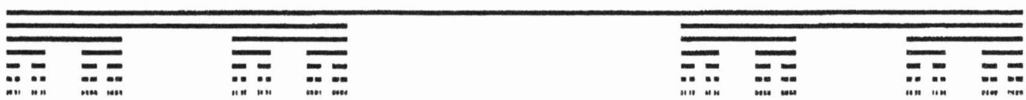
Soběpodobnost (*self-similarity*)
Platónská geometrie se zabývala ideálními pravidelnými útvary, které jsou invariantní vůči symetriím, zatímco fraktální geometrie se zabývá studiem útvarů invariantních vůči změně měřítka (Kůrková, 1991). Tato invariance způsobuje, že při pohledu na daný geometrický útvar z různé vzdálenosti vidíme vždy stejný geometrický útvar. Jednoduchými příklady jsou přímka a rovina, složitějšími příklady jsou Cantorovo diskontinuum, Peanova, Hilbertova nebo Kochova křivka. Při jejich tvorbě neomezeně aplikujeme generátor vytvářející stále menší detaily (Mandelbrot, 2003).

Toto vymezení jsem označila jako čistě geometrické, jelikož už při prvním pohledu na geometrické útvary vzniklé soběpodobností je patrné, že vylučují jakoukoliv možnou chybu při konstrukci a jejich tvorba je již po prvním kroku jasně definována. Nemohou tedy existovat v běžném prostředí kolem nás a dají se nalézt pouze v pracích umělců či matematiků.

[2]Toto rozdělení jsem si sama zavedla, taková (ani podobná) klasifikace se v literatuře nevyskytuje

2.1.1 Cantorovo diskontinuum

Klasickým příkladem je Cantorovo[3] diskontinuum (obr. 1), které je jedním z nejjednodušších fraktálních útvarů. Vzniká dělením úsečky libovolné délky na tři stejné části, z nichž se v dalším kroku prostřední část vynechá. Na zbývající části pak aplikujeme stejný postup. Po neustálém opakování stejného kroku dostaneme nekonečný spočetný počet úseček, jejichž délka se sice blíží k nule, ale počet jejích bodů zůstává nekonečný, přesněji nespočetný.



Obr. 1: Cantorovo diskontinuum (Breuerová, 2006)

2.1.2 Kochova křivka

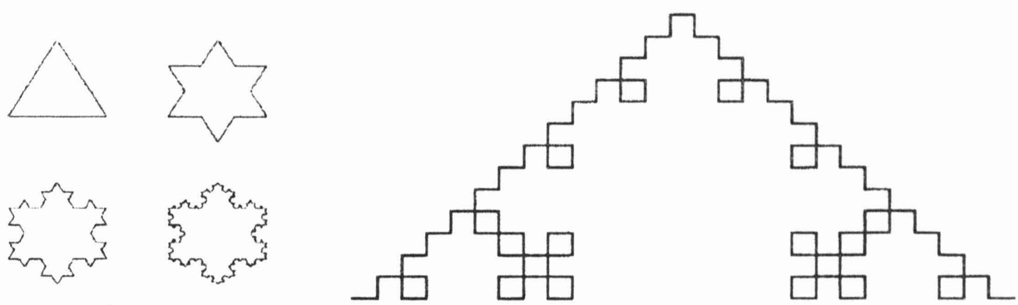
Jiným příkladem striktně geometrického fraktálu je Kochova křivka[4] (někdy také Kochova vločka). Výchozím obrazcem pro konstrukci této křivky je rovnostranný trojúhelník. V prvním kroku se rozdělí každá úsečka, strana, na třetiny a nad prostřední třetinou se sestrojí rovnostranný trojúhelník, jehož základna, původní prostřední třetina úsečky, se odstraní. Při opakované rekurzivní záměně lomené čáry za každou prostřední úsečku vzniká složitější a složitější útvar. Přitom neustále roste počet úseček pro rekurzi v dalším kroku. Postup vidíme velmi dobře na obrázku (obr. 2).

Kochova křivka vznikne jako limita při opakování vysvětleného postupu do nekonečna. Má tak nekonečnou délku, neboť se v každém kroku prodlouží vždy o třetinu. To je zřejmé již z prvního kroku, kdy rozdělíme úsečku na tři stejné části, ale nahradíme ji vždy čtyřmi stejnými částmi, které vytvoří potřebnou lomenou čáru. Každá úsečka tak zvětší svoji délku o jednu třetinu, proto i celá Kochova křivka prodlouží při každém kroku svou délku o jednu třetinu. Na rozdíl od obvodu je obsah Kochovy křivky

[3]Bylo popsáno německým matematikem Georgem Ferdinandem Ludwigem Cantorem v roce 1883 (Wiesner, 2006).

[4]V roce 1904 ji popsal švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924).

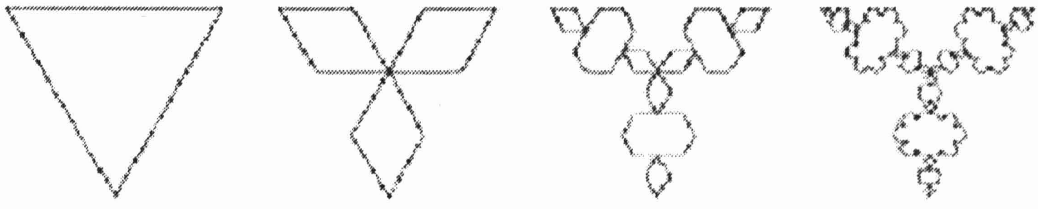
konečný a roven 8/5 obsahu původního rovnostranného trojúhelníka. Plocha se sice při každé rekurzivní záměně zvětšuje, ale přidávány jsou stále menší a menší trojúhelníky, a tak je výsledkem geometrická řada, která je konvergentní [1].



Obr. 2: První čtyři kroky konstrukce Kochovy křivky a modifikace Kochovy křivky, kdy je počáteční rovnostranný trojúhelník nahrazen čtvercem [1])

Kochovu křivku můžeme libovolně modifikovat, můžeme nahradit například rovnostranný trojúhelník čtvercem. Na obrázku (obr. 2) je zobrazena takto modifikovaná Kochova křivka po čtyřech iteracích.

Další možnou modifikací je tzv. Kochova antivločka (*antiflake*), kdy vytvářené trojúhelníky při každém kroku směřují dovnitř původního trojúhelníka (obr. 3).

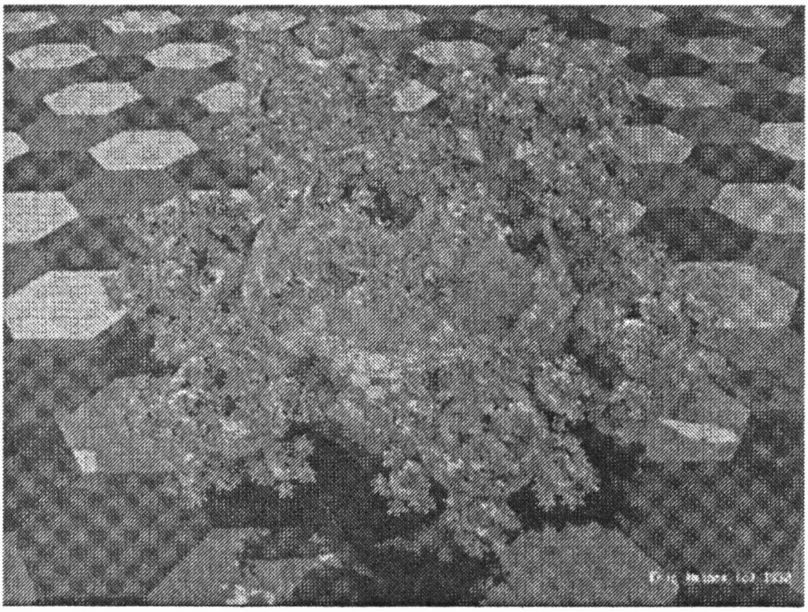


Obr. 3: První čtyři kroky konstrukce Kochovy antivločky [6])

Eric Haines[5] dokonce vytvořil verzi Kochovy vločky v prostoru [1] a její modifikaci v podobě sférické vločky (*sphereflake*), kterou znázorňuje obrázek 4. [7]

---

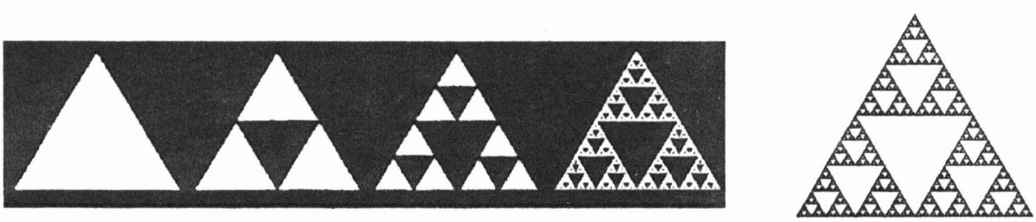
[5]Eric Haines je americký počítačový grafik na Cornellově univerzitě v Ithace.



Obr. 4: Sférická vločka od Erica Hainese vytvořená pro výstavu SIGGRAPH 87 [7])

2.1.3 Sierpińského trojúhelník

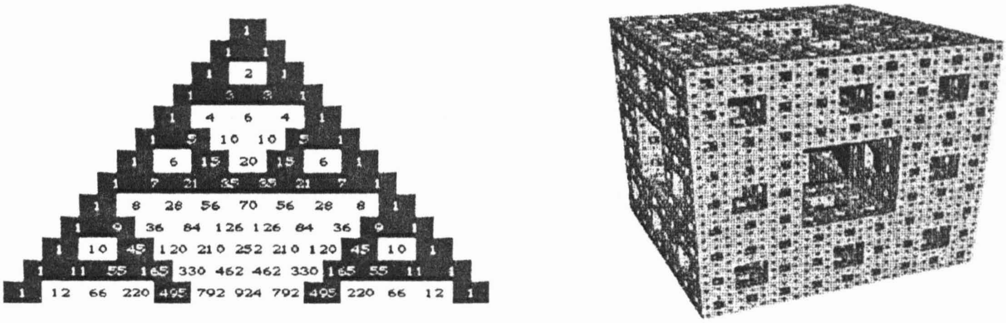
Další ukázkou fraktálu je Sierpińského[6] trojúhelník publikovaný v roce 1916. Při pohledu na obrázek 5 nám připadá, že výchozím útvarem je opět rovnostranný trojúhelník, který rozdělíme pomocí středních příček na čtyři shodné trojúhelníky a prostřední vyjmeme (jediný, který nestojí z našeho pohledu na základně ale na svém vrcholu). Objektem zde však nejsou rovnostranné trojúhelníky, jak by se na první pohled zdálo, ale strany těchto trojúhelníků, jejichž počet s každým krokem přibývá. Na obrázku 5 jsou vidět první čtyři kroky postupu a stav po kroku šestém. [2]



Obr. 5: První tři iterace Sierpińského trojúhelníka a Sierpińského trojúhelník po šesti iteracích [2]

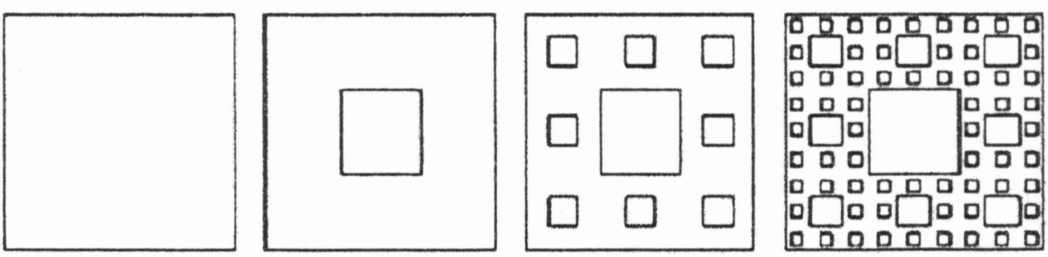
[6]Waclaw Franciszek Sierpiński (1882–1969), polský matematik.

Zajímavostí je, že pokud vybarvíme všechna lichá čísla v Pascalově trojúhelníku, nalezneme opět přibližnou podobu Sierpińského trojúhelníku po třetím kroku (obr. 6).



Obr. 6: Pascalův trojúhelník po vybarvení lichých čísel [2] a Mengerova houba (Breuerová, 2006)

Modifikací Sierpińského trojúhelníka je Sierpińského koberec, kde je trojúhelník nahrazen čtvercem (obr. 7).

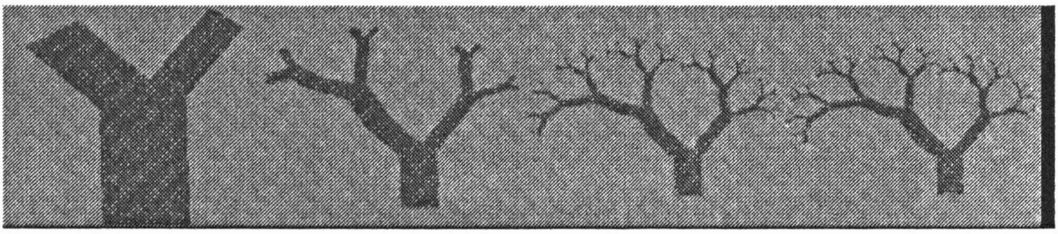


Obr. 7: První čtyři kroky konstrukce Sierpińského koberce (Breuerová, 2006)

Sierpińského koberec byl Karlem Mengerem[7] aplikován i do prostoru pod názvem Mengerova houba (obr. 6). Při její konstrukci postupujeme tak, že rozdělíme krychli na 27 shodných krychliček. Z nich vyjmeme 6 krychliček ze středů stran a 1 krychličku ze středu původní krychle. Ve druhém kroku aplikujeme stejný postup na zbývajících 20 krychliček. Tento postup pak neomezeně opakujeme (Trojovský, 2006).

[7] Karl Menger (1902–1985), rakouský matematik.

Toto však stále není vyčerpávající seznam striktně geometrických fraktálů. Ve tvorbě fraktálů se představivosti meze nekladou. Stačí uchopit primární útvar a neustále na něj aplikovat vybraný generátor stejně jako na obrázek 8.



Obr. 8: První, třetí, šestý a osmý krok konstrukce [10]

2.2 Geometricko-praktické vymezení pojmu fraktál

V takovém vymezení fraktálů se stále mluví o soběpodobnosti. Jedná se ale o soběpodobnost částečnou, kdy se míra podobnosti částí vejde do určitého intervalu hodnot. Jde tedy spíše o jakési charakteristické rysy, které lze přisuzovat části i celku. Část pouze nese podobný jev anebo se jeho podobnost vejde do určitého vymezeného intervalu hodnot. Nemůžeme tvrdit, že část pobřeží je opravdu matematicky podobná celému danému pobřeží, nebo že ovlivnění radiových vln šumem má shodně rozložené chyby při každém zvětšení měřítka. Můžeme však tvrdit, že se charakter části pobřeží vejde do stejného intervalu členitosti jako jeho celek a má podobný charakter, který odpovídá jeho geologickému vzniku, nebo že šum radiových vln se vejde do stejného intervalu četností či rozložení, jako při menším zmenšení. Navíc zde není možné neomezené aplikování generátoru – vždy musí být proces ukončen, minimálně pokud se dostaneme až na úroveň atomů.

2.3 Obecné vymezení pojmu fraktál

Podle Mandelbrota je fraktál každý objekt, jehož Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická (Kůrková, 1991). Toto pojetí jsem úmyslně nazvala obecným vymezením, jelikož mám dojem, že sem můžeme zařadit již opravdu vše, co kolem nás existuje.

Topologická dimenze
„Topologie se zabývá tím, co se při spojitých transformacích nemění“ (Kůrková, 1991, str. 151). Podle topologické dimenze považujeme body za nuldimenzionální, křivky za jednodimenzionální (protože se dají rozdělit pomocí bodů – nuldimenzionálních), plochy za dvoudimenzionální (protože se dají rozdělit pomocí křivek, které jsou jednodimenzionální) a prostorové objekty za třídimenzionální (dají se rozdělit pomocí dvojdimenzionálních ploch). Proto z hlediska topologie můžeme tvrdit, že jsou všechny křivky shodné, jelikož mají stejnou topologickou dimenzi a libovolná z nich se dá spojitě zdeformovat na jakoukoliv jinou křivku. (Kůrková, 1991) Topologická dimenze je celočíselná, a proto vystihuje pouze geometricky hladké objekty, které je možné popsat klasickou Eukleidovskou geometrií.

Je-li pravda, že fraktál vystihuje hrubost materiálu tím, že navýší topologickou dimenzi a dostane se na dimenzi neceločíselnou (Hausdorffovu), pak fraktální charakter má úplně vše kolem nás. Neboť nic není ideálně hladké, tudíž nic v určitém rozmezí měřítek nemá celočíselnou dimenzi.

Hausdorffova dimenze = fraktální dimenze
V klasické geometrii je známá pouze topologická dimenze, která bodu přisuzuje dimenzi nulovou, přímce dimenzi jednotkovou, rovině dimenzi dva a prostoru dimenzi tři. Zabývá se tím, co se při spojitých transformacích nemění. Neumí ale vyjádřit stupeň členitosti. K tomu nám slouží Hausdorffova dimenze (D)[8]. Popisuje fraktální geometrii s neceločíselnou dimenzí a udává úroveň členitosti fraktálních objektů. Hausdorffovu dimenzi můžeme zjistit následovně:

[8] Tento pojem, stejně jako pojem Hausdorffova míra (K), poprvé použil Mandelbrot při úpravě Richardsonova vzorce na výpočet délky pobřeží. Jednalo se vlastně o dvě konstanty, které byly charakteristické pro konkrétní typ pobřeží. $K = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D$; $N(\varepsilon) = \frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon}$, kde K je Hausdorffova míra, D je Hausdorffova dimenze, L pak délka křivky a $N(\varepsilon)$ počet úseků délky ε.

„Je-li podmnožina eukleidovského prostoru sestavena z m svých vlastních kopií zmenšených v r poměru, pak Hausdorffova dimenze je: $D = \frac{log(m)}{log(\frac{1}{r})}$“ (Kůrková, 1991, str. 154).
Je tedy jasné, že například Hausdorffova dimenze zmiňovaného pobřeží musí být větší než topologická dimenze křivky, tj. větší než 1, a menší než topologická dimenze plochy, tj. menší než 2. „Pro modelování zeměpisných tvarů se nejvíce hodí útvary s Hausdorffovou dimenzí o 0,2 až 0,3 větší, než je jejich topologická dimenze.“ (Kůrková, 1991) U reálných objektů se musí Hausdorffova dimenze získávat fyzikálním měřením.

Mozek (šedá hmota)	2,76
Mitochondriální membrána vnější	2,09
Mitochondriální membrána vnitřní	2,53
Povrch plic	2,17
Obvod průmětu atmosférického mraku	1,33
Pobřeží zeměpisných útvarů	1,26

Tab. 1: Příklady Hausdorffových dimenzí u jednotlivých přirozených objektů (Kůrková, 1991)

3. Využití fraktálů v pedagogické praxi

Abychom mohli zařadit teorii fraktálů do výuky, je potřebné doložit existenci a důležitost fraktálů tak, aby byla zřejmá i pro naše žáky a studenty. Nemůžeme začít s výkladem o Hausdorffově míře či neceločíselné dimenzi, zejména ne u mladších žáků základní školy, na jejichž vzdělávání se specializuji. Můžeme však žákům otevřít oči a vést je ke sledování okolního světa. Nechat je v přírodě hledat eukleidovské geometrické útvary jako úsečky či přímky, čtyřúhelníky, trojúhelníky nebo dokonce speciální případy trojúhelníků, jakými jsou trojúhelníky pravoúhlé, rovnostranné či rovnoramenné. Žáci velice rychle zjistí, jak je příroda nesymetrická a nepravidelná, jak není jednoduché nalézt pravý úhel a jak útvary, které ze školské geometrie známe jako základní a nejvíce používané, jsou v přírodě výjimečné a vzácné. Vezměme si například krychli. Tu znají již děti předškolního věku, jen ji nazývají kostkou. Aniž by znaly jakékoliv geometrické či algebraické operace, intuitivně chápou rovnoběžnost stěn (vědí, že mohou stavět kostky na sebe), shodnost stran (mohu kostku jakkoliv otáčet a pořád je stejná), atd. Ale kde takovou kostku v přírodě najdou? Existuje vůbec? Ve škole si znalosti o krychli rychle prohlubují, hledají osy či roviny symetrií, učí se vzorce na výpočet obsahu a objemu a jejich znalosti o krychli rostou a vyvíjejí se po celé studium. Je však nutné ukázat, že i eukleidovská geometrie je potřebná. Vždyť ve městech, třídách, budovách a zábavních centrech najdeme její využití na každém kroku. Jak špatně by se nám psalo na zvlněné a nepravidelné lavici, hrálo fotbal s nepravidelným míčem či skladovalo nepravidelné a křivolaké zboží v obchodech. Ale stačí nám to? Je dostačující popisovat pouze námi vytvořené předměty? A co útvary, které vytvořila příroda? Jakými vzorci popíšeme skálu nebo profil jezera? Co když právě tyto útvary potřebuji v počítači vymodelovat, abych vytvořila opravdu věrohodně animovanou počítačovou hru? Nezbývá nic jiného, než s žáky prozkoumávat své okolí a hledat zákonitosti a zvláštní druhy pravidelnosti, které nám byly ještě nedávno skryty. Proto dále uvedu některé příklady fraktálů v praxi a navrhnu postupy, kterými by se dala fraktální geometrie zpřístupnit i žákům základních škol.

3.1 Fraktály v biologii

Celá živá i neživá příroda je vytvořena podle principů fraktální geometrie, kdy se jedná o dělení buněk a opakování tvarů v různém měřítku. Podívejme se pod mikroskopem na sněhové vločky - na první pohled vidíme opakující se tvary a prvky. Ale i bez mikroskopu můžeme vyhledávat fraktály mezi živými organismy či v neživé přírodě. Například při pohledu na hlávku květáku, kde každá růžice je podobná celé hlávce a každá část růžice je zase podobná celé růžici i celé hlávce. Dokonce blesky na obloze, DNA nesoucí informace o celém organismu i větve stromů, kde ze silnějších rostou větve slabší a dále se dělí podle určitých pravidel, jsou vytvořeny podle zákonů, které odpovídají principům fraktálů.

U rostlin je tento jev lépe pozorovatelný než u živočichů. Tělesný plán rostlin je mnohem proměnlivější a prochází častějšími změnami. Rostliny se lépe dokáží přizpůsobit náhlé změně a zásahu do jejich růstu už proto, že je jejich vývoj silně ovlivněn konkurencí, například v boji o světlo, a ony potřebují tento souboj vyhrát.

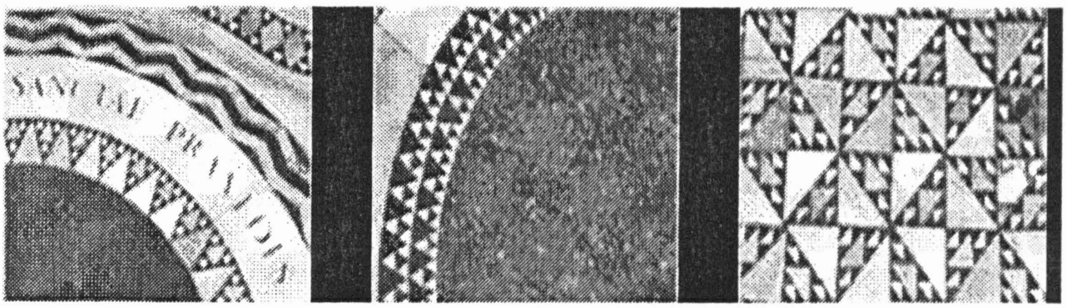
Růst rostlin je závislý na poměru dvou složek. Dědičná (tvrdá složka) určuje dělení a růst organismu podle předem daného programu a přizpůsobivá (měkká složka) dokáže reagovat na vnější změny prostředí a dovoluje organismu nahrazení ztracených částí či změnu směru růstu apod. Pro matematické modelování se nejlépe hodí organismy s převažující tvrdou složkou. Jako příklad si můžeme uvést keř šeříku, který má zakódováno, že větev roste stále vzhůru a po vykvetení pupenu v koncové části větve již nemůže pokračovat v růstu. Proto se zde rozvětví na dvě mladé větve, které rostou opět přímo vzhůru tak dlouho, dokud na jejich konci opět nevyraší pupen květu. I po vnějším zásahu, uříznutí větve, dojde v tomto místě k rozvětvení a růst rostliny pokračuje podle předem daného programu dědičné složky růstu. Proto pokud zahrádkáři touží po košatém a kvetoucím šeříku, musí ho každoročně ořezávat, aby docházelo k častějšímu dělení a vykvetl větší počet květů v koncových pupenech větví. (Sádlo, 1991)

I neživá příroda však může zachovávat pravidla typická pro fraktály. Zaměřme se například na úplně obyčejný jíl. Kolika zahrádkářům už zkomplikoval život. Stále jen zalévají zahrádku, ale voda jim neustále ze svahu odtéká pryč. Proč je vlastně jíl nepropustný? Fyzikální měření prokázala, že Minkowského dimenze[9] jílu se pohybuje v rozmezí 2,54 až 2,80. Tato vysoká dimenze umožňuje jednotlivým částečkám jílu do sebe zapadat natolik, že je jeho vrstva pro molekuly vody téměř naprosto neprostupná. (Serra, 1982)

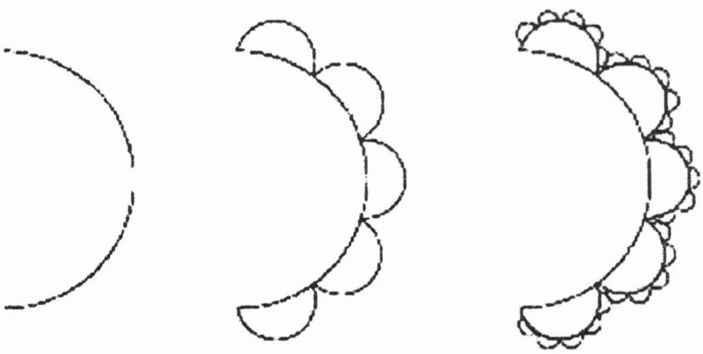
[9] Minkowského dimenze je definována poněkud jinak než dimenze Hausdorffova, pro většinu fraktálů jsou však obě dimenze shodné. Jen ve výjimečných případech je Minkowského dimenze vyšší (např. Hausdorffova dimenze množiny racionálních čísel je 0, Minkowského dimenze je 1).

3.2 Fraktály v umění

Fraktály tvoří velice zajímavé ornamenty, a proto jsou v umění velmi často využívané. Například v kostele Santa Prassede v Římě na barokní dlažbě můžeme nalézt Sierpinského trojúhelník v druhé i třetí iteraci (obr. 9).



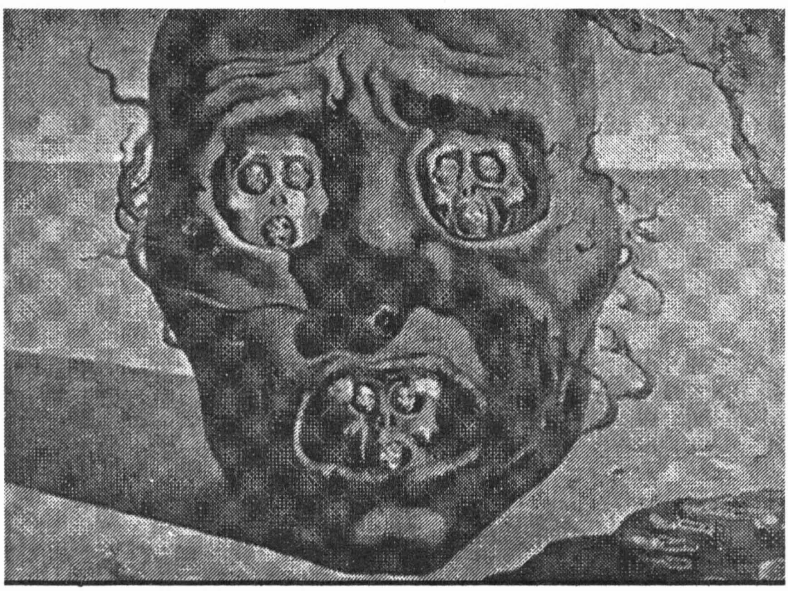
Obr. 9: Barokní dlažba v kostele Santa Prassede v Římě [3]



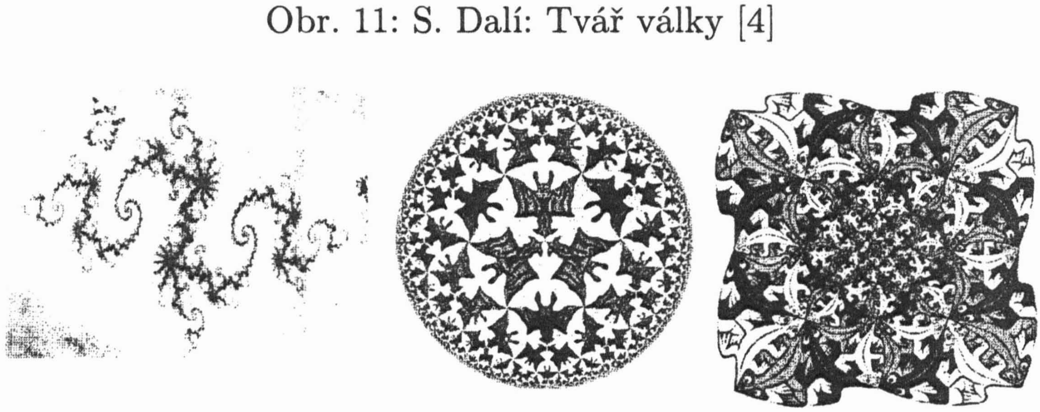
Obr. 10: Ukázka půdorysu s fraktálním uspořádáním (Breuerová, 2006)

I v architektuře a urbanismu můžeme nalézt stejné zákonitosti růstu a tvarů jako u živých organismů, které opět mají fraktální charakter. Jakousi fraktálnost najdeme ve městech všude, ať už se jedná o hierarchii cestiček, silnic i hlavních tříd nebo tvary fasád, celých budov či městských parků. Nejlépe je fraktální uspořádání sledovatelné na gotických stavbách, kde se průčelí dveří a menší věžičky podobají celé stavbě. U některých budov nalézáme fraktální uspořádání i u půdorysu staveb (obr. 10). Americký architekt Steven Holl dokonce navrhl budovu, při jejíž stavbě se nechal inspirovat Mengerovou houbou.

Ve výtvarném umění je poslední dobou vytváření fraktálních grafik a fotografií velice moderní. Jsou používány jako dekorace látek, potisky či pouhé obrázky. Dají se poměrně jednoduše vytvořit na počítači pomocí volně dostupných programů[10]. Někteří umělci však už v minulosti předběhli dobu a vytvořili celou řadu obrazů, kde fraktální prvky využívají bez moderní techniky a někdy i znalostí z fraktální geometrie. Například Salvador Dalí vytvořil obraz s názvem „Tvář války“ (*Visage of War*), kde oči této tváře zpodobňují celou tvář a je zde evidentní neomezená možnost postupovat hlouběji a hlouběji (Mandelbrot, 2003).



Obr. 11: S. Dalí: Tvář války [4]



Obr. 12: Fontánové kresby Leonarda da Vinci [5], dvě ukázky Escherových teselací [8], [9]

[10]Jeden takový je program Apophysis (`http://www.apophysis.org/`).

Další ukázkou fraktální tvorby jsou „fontánové" kresby ze zápisníku Leonarda da Vinciho (obr. 12) [5] anebo teselace M. C. Eschera (obr. 12) (Escher, 2006).

4. Závěr

V tomto článku jsem nastínila některé aspekty teorie fraktálů, které by se daly využít i se žáky základní a střední školy. Další informace čtenář najde v níže uvedené literatuře. Dobrým zdrojem se stává i internet.

Literatura

[1] Breuerová, M., *Fraktály*, Diplomová práce, Vysoká škola uměleckoprůmyslová, Praha. 2006

[2] Escher, M. C., *M. C. Escher. Grafika a kresby.*, Taschen, Slovart, Praha, 2006

[3] *Matematika na vysokých školách, determinismus a chaos, sborník semináře*, Herbertov 5.–7.9.2005. JČMF, Praha,

[4] Kůrková, V., *Fraktály a dynamické systémy*, In: Novák, V. (Ed.): Geometrie živého. Doporučená četba, Praha, (str. 145–174). 1991

[5] Mandelbrot, B., *Fraktály, Tvar, náhoda a dimenze*, Mladá fronta, Praha, 2003

[6] Sádlo, J., *O morfogenezi architektury rostlin*, In: Novák, V. (Ed.): Geometrie živého. Doporučená četba, Praha (str. 235–244). 1991

[7] Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London, 1982

[8] Trojovský, P., O fraktálech a úlohách vedoucích ke geometrické řadě, *Rozhledy matematicko-fyzikální* **81**(1) 2006

[9] Wiesner, R., *Užití a zneužití fraktálů*, Diplomová práce, MÚ PřF, Brno. 2006

Internetové odkazy

[1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_křivka (19.3.2009)
[2] http://www1.cuni.cz/ obo/skola/FyzSem/chaos/ (19.3.2009)
[3] http://www.giovannirinaldi.it/page/rome/santaprassede/index.htm (19.3.2009)
[4] www.worldart.com.au/salvador-dali/ (19.3.2009)
[5] www.globalgallery.com/enlarge/ (19.3.2009)
[6] http://jlswbs.wordpress.com/2008/01/28/kochova-vlocka/ (19.3.2009)
[7] http://erich.realtimerendering.com/sballs.jpg (19.3.2009)
[8] http://www.fulcrumgallery.com/MC-Escher/Circle-Limit-IV_50558.htm (19.3.2009)
[9] www.llesd.k12.ca.us/jgregori/artistmonthmay.html (19.3.2009)
[10] http://www.takayaiwamoto.com/Fractal/Fractals.html (1.5.2009)

Mgr. Brabora Divišová, Ph.D.
Gymnázium Jiřího Gutha-Jarkovského
Truhlářská 22, Praha 1, 110 00
e-mail: divisova.barbora@post.cz

ABSTRACT

The article focuses on basic information about fractals in a popular way. It brings about a way to provide glimpses of the theory of fractals for pupils at the primary and secondary schools. A strictly geometrical definition of fractals is given together with three examples of fractals (Cantor discontinuum, Koch snowflake, Sierpinski triangle). Next two other definitions of fractals are presented. The main part of the article consists of the examples of fractals in biology and in arts which can be used with pupils at the primary and secondary schools. Pictures of fractals are provided.