Vlastimil Dlab

Každý má svou posloupnost

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 2, 117–123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149500

KAŽDÝ MÁ SVOU POSLOUPNOST

VLASTIMIL DLAB

Tato poznámka se týká rekurentních (někdy se říká též rekurzivních) posloupností typu

$$\{X_n \mid 1 \leq n\},$$
$$\text{kde } X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \text{ s danými } X_1, X_2, A \text{ a } B.$$

Zájem vzbuzují především posloupnosti celočíselné, tj. případ, kdy volba „počátečních podmínek" je celočíselná. Skoro neuvěřitelný je zájem o posloupnost, kdy $A = B = X_1 = X_2 = 1$, totiž o posloupnost čísel, kterým dal François-Edouard-Anatole Lucas v květnu 1876 název *Fibonacciho čísla*. Tato posloupnost byla popsána Leonardem Pisánským-Fibonaccim v knize *Liber abaci* v roce 1202 v příkladě, který se týkal růstu hypotetické populace králíků za idealizovaných předpokladů.

V Indii byla známa pod jménem „maatraameru" už v šestém století. Vyskytuje se v prozodickém studiu Pingaly nazvaném Chandas Shastra, později byla zevrubně popsána Hemachandrou. Jeho popis je dán počtem rytmických vzorů a připomíná často užívaný příklad, kolika způsoby je možno vystoupit schodiště, stoupáme-li po jednom či dvou schodech. Rekurzivní předpis je nadmíru jasný: počet možností vystoupit n schodů se rovná součtu počtu možností vystoupit $n - 1$ schodů (tj. případ, kdy jsme zvolili první krok o jeden schod) a počtu možností vystoupit $n-2$ schodů (tj. případ, kdy jsme zvolili první krok o dva schody). Zájem o Fibobacciho posloupnost souvisí do značné míry s jejím blízkým vztahem ke zlatému řezu, který se jeví již v tak zvaném Binetově vzorci pro n-té Fibonacciho číslo:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Tato formule byla patrně známa již Johannesu Keplerovi. Její důkaz podal roku 1730 Abraham de Moivre, později též Daniel Bernoulli a v roce 1765 ji dokázal Leonhard Euler.

Poznámka. Některá odvození Binetova vzorce byla náročná. Uvažujte vytvořující funkci Fibonacciho posloupnosti $\{F_n \mid 1 \leq n\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$

a ukažte , že pro $|x| < \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

Vyjádříme-li příslušné parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{A_1}{(x - B_1)} \quad \text{a} \quad \frac{A_2}{(x - B_2)}$$

jako nekonečné řady a výslednou řadu porovnáme s původní řadou pro $f(x)$, dostaneme Binetovu formuli.

V této poznámce chceme ukázat na podstatu těchto obecných posloupností a odvodit obecný vzorec pro n–tý člen metodou, která má své stopy u Abrahama de Moivrea.

Zvolte si tedy A a B a definujte rekurzivně posloupnost $\{X_i\}$ volbou X_1, X_2 a vztahem

$$X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Úloha: Nalezněte výraz pro X_n podobný Binetovu vzorci pro Fibonacciho čísla.

Řešení: Přiřaďte číslům A a B kvadratickou rovnici

$$x^2 = Ax + B.$$

Nechť α, β jsou její kořeny; tedy, $A = \alpha + \beta$, $B = -\alpha\beta$.

Pro libovolně zvolená reálná čísla a, b položme

$$X_n = a\alpha^n + b\beta^n.$$

Snadno vidíme, že

$$AX_{n+1} + BX_n = (\alpha + \beta)(a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1}) - \alpha\beta(a\alpha^n + b\beta^n) = \\ = a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} = X_{n+2}.$$

Koeficienty a, b určíme pomocí vztahů

$$a\alpha + b\beta = X_1,$$
$$a\alpha^2 + b\beta^2 = X_2.$$

Tedy,

$$a = \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)}(X_2 - X_1\beta),$$
$$b = \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)}(X_2 - X_1\alpha).$$

Potom

$$X_n = \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n-1}(X_2 - X_1\beta) - \beta^{n-1}(X_2 - X_1\alpha)].$$

Ilustrace.

1. Nejprve uveďme ve výše uvedeném označení některé posloupnosti vyskytující se v literatuře:

Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1, A = B = 1$ a tedy $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n};$$

Lucas: $L_1 = 2, L_2 = 1, A = B = 1$ a tedy $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $a = \frac{2}{1+\sqrt{5}}, b = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$;

$$L_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} + (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}};$$

Pell: $P_1 = 1, P_2 = 2, A = 2, B = 1$ a tedy $\alpha = 1+\sqrt{2}, \beta = 1-\sqrt{2}$: $a = \frac{\sqrt{2}}{4}, b = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

$$P_n = \sqrt{2}\,\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{4};$$

Pell-Lucas: $Q_1 = 1, Q_2 = 3, A = 2, B = 1$ a tedy $\alpha = 1+\sqrt{2}, \beta = = 1-\sqrt{2}$: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$;

$$Q_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2};$$

Jacobsthal: $J_1 = J_2 = 1, A = 1, B = 2$ a tedy $\alpha = 2, \beta = -1, a = = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$;

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3};$$

Jacobsthal-Lucas: $K_1 = 2, K_2 = 1, A = 1, B = 2$ a tedy $\alpha = = 2, \beta = -1, a = \frac{1}{2}, b = -1$;

$$K_n = 2^{n-1} - (-1)^n;$$

Pell-Jacobsthal: $R_1 = 2, R_2 = 1, A = 1, B = 4$ a tedy $\alpha = = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{17}}{2}, a = \frac{\sqrt{17}-1}{8}, b = -\frac{\sqrt{17}+1}{8}$;

$$R_n = \frac{(1+\sqrt{17})^{n-1} + (1-\sqrt{17})^{n-1}}{2^{n-1}};$$

Čebyšev: $C_1 = 2, C_2 = 11, A = 11, B = -1$ a tedy $\alpha = \frac{11+\sqrt{117}}{2}, \beta = = \frac{11-\sqrt{117}}{2}, a = \frac{11-\sqrt{117}}{2}, b = \frac{11+\sqrt{117}}{2}$;

$$C_n = \frac{(11+\sqrt{117})^{n-1} + (11-\sqrt{117})^{n-1}}{2^{n-1}};$$

Pisot: $T_1 = 2, T_2 = 3, A = 3, B = -2$ a tedy $\alpha = 2, \beta = 1, a = \frac{1}{2}, b = 1$;

$$T_n = 2^{n-1} + 1;$$

2. Nechť $S_1 = 2, S_2 = 22, A = 2, B = 9$ a tedy $\alpha = 1 + \sqrt{10}, \beta = 1 - \sqrt{10}, a = b = 1$;

$$S_n = (1 + \sqrt{10})^n + (1 - \sqrt{10})^n;$$

3. Nechť $X_1 = A, X_2 = A^2 + 2B, B = -\frac{A^2}{4}$; dostáváme $a + b = 2$ a řadu

$$X_n = \frac{1}{2^{n-1}} A^n.$$

4. Nechť $X_1 = 1, X_2 = 2$ a $X_{n+2} = 5X_{n+1} - 6X_n$. Potom, $\alpha = 3, \beta = 2$ a

$$X_n = [3^{n-1}(2-2) - 2^{n-1}(2-3)] = 2^{n-1}.$$

Obecněji: Nechť $X_1 = 1, X_2 = a$ a $X_{n+2} = (2a+1)X_{n+1} - a(a+1)X_n$. Potom, $\alpha = a + 1, \beta = a$ a

$$X_n = [(a+1)^{n-1}(a-a) - a^{n-1}(a-a-1)] = a^{n-1}.$$

5. Všimněme si, že koeficienty A a B (a též volba prvních členů X_1, X_2) nemusí být celá čísla, tj. celý postup lze aplikovat na libovolné, ne nutně celočíselné posloupnosti. Zvolme např. $A = 1 + i, B = -i$, tj. $\alpha = 1$ a $\beta = i$. Potom, pro

$X_1 = C, X_2 = C, X_n = C$ pro všechna $n \geq 1$;

$X_1 = 1, X_2 = i, X_n = i^{n-1}$ pro všechna $n \geq 1$;

$X_1 = i, X_2 = 1, X_{4k+1} = i, X_{4k+2} = 1, X_{4k+3} = 2+i, X_{4k+4} = 1 + 2i$, pro všechna $k \geq 0$.

Uveďme ještě jednu aplikaci předchozí metody.

Aplikace: Míšení dvou roztoků, obsahující daná procenta určité kapaliny.

Dvě nádoby, každá o obsahu C litrů, obsahují (vodní) roztok s daným procentem určité kapaliny (např. lihoviny s daným procentem alkoholu). První nádoba obsahuje A litrů p–procentního roztoku a druhá nádoba B litrů q–procentního roztoku. Předpokládáme, že $A + B > C$.

Popišme proces přelévání roztoků z jedné nádoby do druhé:

První krok. Pišme $q = p_1$. Roztokem z druhé nádoby doplníme nádobu prvou. V první nádobě bude tedy C litrů p_2–procentního roztoku, kde

$$p_2 = \frac{Ap + (C - A)q}{C},$$

zatímco v druhé nádobě zbylo $D = A+B-C$ litrů p_1–procentního roztoku.

Druhý krok. Roztokem z první nádoby dolejeme nádobu druhou. Přelejeme tedy $E = 2C - (A + B)$ litrů kapaliny. Druhá nádoba je nyní plná p_3–procentního roztoku, kde

$$p_3 = \frac{Dp_1 + Ep_2}{C}.$$

Třetí krok. Opakujme druhý krok, tentokrát doplněním první nádoby roztokem z nádoby druhé. První nádoba bude tedy nyní obsahovat C litrů p_4–procentního roztoku, kde

$$p_4 = \frac{Dp_2 + Ep_3}{C}.$$

Pokračujeme-li v tomto procesu, dostáváme rekurzivně definovanou posloupnost $\{p_n \mid 1 \leq n\}$, kde

$$p_1 = q,\ p_2 = \frac{Ap + (C - A)q}{C} \quad \text{a}$$

$$p_{n+2} = \frac{D}{C}p_n + \frac{E}{C}p_{n+1} \quad \text{pro} \quad n \geq 1.$$

Cvičení: Ukažte, že pro každé n je

$$p_n = \frac{Ap + Bq}{A + B} + (-1)^n \frac{A(A + B - C)^{n-1}(p - q)}{(A + B)C^{n-1}}$$

a tedy, jak jsme očekávali,

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{Ap + Bq}{A + B}.$$

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca

ABSTRACT

The article concerns a certain type of recursive sequence whose subtype is Fibonacci sequence. Its goal is to show the mathematical core of the general sequence and deduce a general formula for the n-th term by the method which comes from Abraham de Moivre. An application of the above is given, for tasks of the kind "mixing two solutions consisting of certain percentage of certain liquid".