Naďa Vondrová

Různé přístupy k výuce vět o shodných trojúhelnících

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 2, 107–116

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149499

RŮZNÉ PŘÍSTUPY K VÝUCE VĚT O SHODNÝCH TROJÚHELNÍCÍCH

Naďa Vondrová

Úvod

V současné době se hodně hovoří o tom, proč je matematika pro žáky nepřitažlivá a jak je správně motivovat. Navrhují se různé způsoby motivace, např. pomocí úloh ze života, pomocí her a soutěží, pomocí využití prostředků ICT apod. Důležitým zdrojem motivace je pocit úspěchu, který se dostaví např. tehdy, kdy se žák úspěšně podílí na konstrukci nějakého pro něj nového poznatku. V tomto článku představím pět přístupů k výuce vět o shodných trojúhelnících, z nichž některé mohou u žáků takový pocit úspěchu vyvolat.

Nejdříve si věty o shodných trojúhelnících uvedeme:

sss: Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.

sus: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.

usu: Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně, jsou shodné.

Ssu: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Dodejme, že tyto věty o shodnosti jsou zároveň i věty o jednoznačném sestrojení trojúhelníka. V případě konstrukce podle věty sss musí platit trojúhelníková nerovnost, u konstrukce podle vět sus a Ssu musí být úhel menší než $180°$ a u konstrukce podle věty usu musí být součet obou úhlů menší než $180°$.

Nyní bude postupně uvedeno pět možných způsobů, jak tyto věty žákům zprostředkovat. Vycházím přitom z učebnic, článků, videozáznamů hodin i vlastní zkušenosti.

1. Sdělení

Věty o shodných trojúhelnících jsou napsány (např. v učebnici) nebo vyřčeny učitelem, žák si je opíše a řeší standardní úlohy. Ověřuje například, že jsou dva konkrétní trojúhelníky shodné, pokud se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, konstruuje trojúhelník, u kterého zná příslušné údaje, apod.

2. Otázky

Žáci dostávají otázky, které je mají navést k větám o shodných trojúhelnících. Vlastně otázky už v sobě věty do jisté míry obsahují, ovšem současně upozorňují i na problematická místa, například zda stačí, aby se trojúhelníky shodovaly ve třech úhlech.

Taková sada otázek je např. v učebnicích pro osmiletá gymnázia (Herman a kol., 1995):

- Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost stran?
- Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost úhlů?
- Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost jedné strany a dvou úhlů?
- Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost dvou stran a jednoho úhlu?

Je zřejmé, že využití toho, co navrhuje učebnice, ve výuce záleží do velké míry na učiteli. Dovedu si představit vysoce instruktivní využití, kdy učitel vede žáky krok po kroku, až po využití podnětné, kdy jsou žáci žádáni, aby experimentovali a sami zjišťovali, zda to skutečně platí a proč.

3. Obálka (zdroj `www.learner.org`)[1]

Přístup pochází z hodiny matematiky v USA, jejíž záznam je k vidění na internetu. Žáci pracují ve skupinách. Každá skupina dostane obálku a v ní tyto lístečky:

$\lvert AC\rvert = 3\,\mathrm{cm}$	$\lvert BC\rvert = 4\,\mathrm{cm}$	$\lvert AB\rvert = 5\,\mathrm{cm}$
$\lvert\sphericalangle CAB\rvert = 53°$	$\lvert\sphericalangle CBA\rvert = 37°$	$\lvert\sphericalangle BCA\rvert = 90°$

Žáci mají pracovní list s tabulkou. Úkol zní vytáhnout lísteček, zapsat příslušný údaj do tabulky a narýsovat to, co je na lístečku zadané. Pak se má vytáhnout další lísteček, zapsat údaj do tabulky a narýsovat příslušnou úsečku či úhel. To se má opakovat tak dlouho, dokud nelze narýsovat celý trojúhelník.

Když je trojúhelník narýsován, mají žáci vytáhnout zbylé lístečky a zkontrolovat, zda trojúhelník odpovídá všem údajům v obálce. Pokud tomu tak není, mají hledat příčinu. (Nenarýsovali někde něco špatně? Nepoužili nějaký údaj, který na lístečku nebyl?) Pokud tomu tak je, mají si do tabulky zapsat, které údaje potřebovali, aby trojúhelník narýsovali. Cílem je, aby žáci sami objevili věty o shodných trojúhelnících. Učitelka jim tento cíl explicitně neříká, nicméně je motivuje k tomu, aby našli co nejmenší počet údajů, které jsou třeba pro jednoznačnou konstrukci trojúhelníka.

Na videozáznamu hodiny můžeme pozorovat, že žáci pracovali ve skupinách, diskutovali o tématu, rýsovali a zapisovali údaje

[1] Hodina, v níž je použit tento přístup, je v anglickém jazyce (s titulky) ke zhlédnutí na stránce `http://www.learner.org/resources/series34.html?pop=yes&pid=936#`, hodina má název *Exploring Congruence*. Popis hodiny spolu s otázkami k zamyšlení jsou na adrese `http://www.learner.org/channel/schedule/printmat.phtml?printmat_id=99`

do tabulky. V průběhu hodiny se vyskytly některé zajímavé situace. Např. žák si postupně vybral dva údaje a řekl učitelce, že už umí narýsovat trojúhelník. Reakce učitelky byla: „Fajn, pokud umíš udělat trojúhelník, narýsuj ho. Pak si u svého trojúhelníka zkontroluj zbylé rozměry, zda odpovídají těm z obálky.“ Učitelka neprozradila, že dva údaje nestačí, jen zopakovala základní pokyn. Aktivita je do značné míry „samoregulační“ – žáci sami mohou zjistit, kdy už úkol splnili a zda správně.

U další skupiny došlo k tomu, že si žáci např. vytáhli velikost úsečky AB a pak si vytáhli velikost úhlu ACB. Ptali se učitelky, co mají dělat, protože mají sice AB, ale nevědí, kam mají umístit C. Učitelka toho využila pro pokyn celé třídě – pokud se žáci dostanou do bodu, kdy nemohou pokračovat v konstrukci, mají si vytáhnout další údaj.

Na konci aktivity následovala prezentace řešení (tedy vlastně jednotlivých vět) u tabule. Zcela přirozeně se vynořila i otázka, zda pro shodnost trojúhelníků stačí shodnost jejich tří vnitřních úhlů, a žáci sami ji zodpověděli.

4. Diktát

Tento přístup pochází z TIMSS Video Study 1999[2]. Jedná se o hodinu v 8. ročníku v Austrálii, přítomno bylo 26 žákyň.

Učitelka vysvětlila, co budou žákyně dělat, a zdůraznila hlavní cíl. Žákyně dostaly pracovní list s těmito úkoly:

- Narýsuj trojúhelník. Napiš si kroky konstrukce.
- Přečti kroky konstrukce ostatním ve skupině, kteří budou trojúhelník podle tvého diktátu rýsovat.
- Nově narýsovaný trojúhelník ve skupině vystřihněte a přiložte na původní trojúhelník. Jsou trojúhelníky shodné?

[2] Viz `http://timssvideo.com/timss-video-study` – zde jsou informace o této studii a odkazy na některé publikace v angličtině. Na stránce `http://timssvideo.com/videos/Mathematics` je 28 nahraných hodin z výuky matematiky v 8. ročníku v sedmi zemích, které se studie zúčastnily (včetně České republiky). Hodina týkající se shodných trojúhelníků je zde: `http://timssvideo.com/27`. U všech hodin jsou i titulky v angličtině.

- Jaký je minimální počet údajů (velikost stran a úhlů), které musíš sdělit spolužacce, aby narýsovala trojúhelník, který je shodný s tvým?

Učitelka prozradila, že se hledají čtyři způsoby, jak vytvořit soubor instrukcí ke konstrukci shodného trojúhelníka. Žákyně pracovaly v malých skupinách, v hodině byl trochu ruch, ale z videozáznamu se zdá, že všechny pracovaly na zadaném úkolu. Učitelka obcházela třídu a odpovídala na nemnohé dotazy. Většinou si však nechala vysvětlovat, jak žákyně postupovaly a proč. Jednotlivé skupiny jí ukazovaly, jaké trojúhelníky sestrojily a jaké pokyny vypracovaly. Učitelka nekomentovala, zda to je správně, nebo ne, spíše kladla doplňující otázky a přeformulovala pokyny dívek tak, aby obsahovaly pojmy „velikost strany“ a „velikost úhlu“.

V průběhu hodiny se objevily zajímavé situace. Např. jedna žákyně diktovala pokyny ve formě „narýsuj horizontální a vertikální úsečku“. Učitelka ji při diskusi upozornila, že vlastně řekla jeden pokyn, a sice narýsuj pravý úhel. Objevil se též problém, co je vlastně jeden pokyn. Např. pokyn „narýsuj úhel o velikosti 60°“ žákyně diktovala jako sérii několika instrukcí: „narýsuj úsečku, přilož úhloměr, naměř atd.“ V takových situacích učitelka upozornila na to, co vlastně konstrukcí nakonec vzniklo (úsečka určité délky, úhel určité velikosti).

Když učitelka viděla, že jsou dívky hotovy, sumarizovala to, co objevily. Nechala si diktovat jednotlivé pokyny a přitom črtala trojúhelník na tabuli a zapsala zkratkou příslušnou větu. Ze záznamu je patrné, že žákyně jsou zvyklé diskutovat; doplňovaly učitelku, přerušovaly ji a navrhovaly svá řešení. Objevila se též otázka, zda stačí znát velikosti tří vnitřních úhlů, kterou žákyně s pomocí učitelky vyvrátily. Kromě vět sss, usu, sus se objevil též speciální případ věty Ssu, který učitelka označila RHS (pravý úhel, přepona, strana).

V roce 2010 vyzkoušela tento přístup jedna studentka učitelství matematiky v rámci své praxe. V podstatě zopakovala části hodiny tak, jak se objevují v australské hodině, jen žáci pracovali ve dvojicích, ne ve skupinách. Aktivita trvala i s opakováním shodnosti útvarů jednu vyučovací hodinu. Žáci pracovali s nadšením, i když nebyli na podobný způsob výuky vůbec zvyklí. Nikdo nepřišel na větu *usu*, což studentka vyřešila tak, že žákům jednu sadu těchto údajů nadiktovala a nechala je trojúhelník narýsovat.

5. Taška (Reynolds, 2002)

Tento námět pochází z časopisu *The Mathematics Teacher*, přičemž se jedná o popis skutečné vyučovací hodiny. Učitel měl připraveno několik trojúhelníků vystřižených z tvrdého papíru, u nichž měl předem zjištěny velikosti vnitřních úhlů i délky stran. Jeden trojúhelník vybral, krátce ukázal žákům a schoval do tašky. Žáci byli rozděleni do skupin po třech či po čtyřech. Jejich úkolem bylo pomocí co nejmenšího počtu dotazů sestrojit a následně vystřihnout stejný trojúhelník, jaký měl učitel.

Aby se žáci navzájem neovlivňovali (a nerušili), psaly skupiny své dotazy postupně na papír. Učitel chodil po třídě a také písemně na ně odpovídal. Odpověděl na všechny otázky, i když věděl, že některé z nich žákům k sestrojení trojúhelníka nepomohou. Objevily se např. otázky typu „Jaká je délka strany?“ „Je trojúhelník tupoúhlý?“ apod. Když bylo třeba otázku upřesnit, mohli žáci načrtnout obrázek a na něm ukázat, co by chtěli znát.

Když skupina narýsovala trojúhelník, učitel zkontroloval správnost tím, že na něj přiložil svůj vystřižený trojúhelník. Pokud se trojúhelníky kryly, zapsal zkratkou, jaký způsob k sestrojení trojúhelníka skupina použila. Následovalo druhé kolo otázek, ovšem s jiným trojúhelníkem (učitel už prozradil, že minimální počet otázek je 3). Ve druhém kole však skupina nesměla použít stejnou kombinaci otázek jako v prvním kole. Celá aktivita se opakovala tak dlouho, dokud se ve třídě neobjevily všechny věty o shodných trojúhelnících.

Nakonec byla zařazena prezentace všech nalezených způsobů řešení u tabule – učitel vybral skupiny tak, aby se formulovaly všechny věty o shodných trojúhelnících.

V roce 2009 vyzkoušeli tento přístup studenti učitelství v rámci experimentálního vyučování v 7. ročníku, který jsem tehdy vyučovala na jedné běžné základní škole. Hodině jsem byla přítomna jako pozorovatel. Žáci byli aktivitou doslova nadšeni a udrželi pozornost po celou dobu (celkem cca 50 minut). Tím, že psali své otázky na papír a studenti jim písemně odpovídali, byla hodina poměrně klidná. (V hodině byli přítomni dva studenti, protože se oba přihlásili na mou výzvu k výukovému experimentu. Ve výuce se střídali.)

V hodině se objevila celá řada zajímavých momentů. Žáci měli např. tendenci napsat hned několik otázek najednou – učitel (student) však odpověděl vždy jen na jednu z nich. Bylo tedy nutno všem žákům znovu zdůraznit, že mají napsat jen jednu otázku, nechat si ji zodpovědět a hned získané informaci použít pro konstrukci. Teprve pak se píše další otázka. Dále se ukázalo, že je nutné znát předem i takové hodnoty pro daný trojúhelník, jako je obsah a obvod, protože se žáci na ně ptali.

Žáci se často ptali neadresně: „velikost jedné strany“ (na to učitel zapsal velikost jedné libovolné strany), „velikost jednoho úhlu“ (učitel zapsal velikost libovolného úhlu). Tuto situaci jsme nepředpokládali, ale nakonec se ukázala jako poučná. Žáci si totiž uvědomili užitečnost označení i nutnost značení trojúhelníka podle konvence, aby si s učitelem rozuměli.

Zpočátku se objevovaly otázky typu „je trojúhelník tupoúhlý?“, „jaký má trojúhelník obvod/obsah?“ apod. Učitel na ně vždy odpověděl, žáci sami ve fázi rýsování zjistili, že tato informace pro ně není užitečná. Postupně všechny skupiny zacílily pozornost na velikosti stran a úhlů.

Podle očekávání všechny skupiny jako první objevily větu *sss* (konečně podle této věty rýsovali žáci trojúhelníky už na prvním stupni). Většina z nich jako druhou možnost vyzkoušela kombinaci „*uuu*“, ovšem sami přišli na to, že taková věta neplatí. Přičemž někteří si to uvědomili už ve fázi rýsování, kdy se ukázalo, že nemají „kam úhly přichytit“, jiní však až při kontrole shodnosti překrytím jejich trojúhelníka a trojúhelníka učitele. Tito žáci si prostě nějakou délku strany zvolili a teprve když se ukázalo, že jejich trojúhelník se neshoduje, si naplno uvědomili, že to není možné.

Ve druhé části aktivity proběhla prezentace nalezených způsobů řešení. Po větě *sss* vyvolal učitel Janu, která prohlásila, že potřebovala „tři úhly a k tomu jednu stranu". Učitel ji nechal diktovat jednotlivé kroky a přitom rýsoval na tabuli. Ukázalo se, že šlo v podstatě o větu *usu* a poslední údaj, třetí úhel, vlastně Jana potřebovala pro sebe jako kontrolu. Tento jev se objevil u více žáků.

V jedné skupině se objevil zajímavý návrh: „Jedna strana a dva úhly, ale nejde o větu *usu*." Ukázalo se, že žáci si velikost třetího úhlu dopočítali. Učitel přivedl žáky k tomu, že si tak vlastně situaci převedli na větu *usu*.

Tyto zajímavé momenty vedly k živým diskusím učitele se žáky i mezi žáky, jichž se zúčastnila téměř celá třída. Protože si žáci situace sami prožili, projevovali velký zájem na jejich řešení.

Závěr

Když porovnáme všech pět způsobů, vidíme, že je lze srovnat na pomyslné ose od nejvíce instruktivního přístupu (kdy jsou věty žákům předány jako hotová věc) až po přístupy, které jsou do různé míry konstruktivistické (Hejný, Kuřina, 2009). U nich hraje při tvorbě nového poznatku stále důležitější roli žák a jeho aktivní přístup k učení. Nicméně učitelova role je snad ještě důležitější než u instruktivního přístupu. Musí mít neustále na paměti, kam má aktivita vést, a hledat způsoby, jak žákům pomoci a přitom nenapovědět příliš; jak jim dát dostatečný prostor pro objevování a přitom je nenechat zajít příliš daleko do slepých uliček. Zatímco u Sdělení a Otázek je víceméně jasné, jak věty zní a o co v nich jde, u aktivity Obálka žáci sice vědí, že důležité jsou délky stran a velikosti úhlů, ovšem musejí sami objevit, která jejich kombinace je správná. U aktivit Diktát a Taška musí žáci sami přijít i na to, že to, na čem záleží, jsou délky stran a velikosti úhlů, a naopak, že některé vlastnosti trojúhelníka zde roli nehrají (např. jeho typ nebo obsah).

U posledních tří přístupů je důležitá komunikace mezi žáky a žáků s učitelem, přičemž přístupy přirozeně vedou žáky k potřebě přesného vyjadřování. Nejde v nich jen o vlastní poznatky, tedy o věty o shodných trojúhelnících. Jde také o to, že se žáci učí určitému přístupu k řešení problémů. Učí se přemýšlet, spoléhat se sami na sebe, snaží se formulovat hypotézy o matematických objektech a ověřovat jejich správnost, učí se matematicky vyjadřovat. V každém případě vždy záleží na učiteli, jak ve své konkrétní třídě přístupy zrealizuje, jak velký prostor dá žákům a jakou pomoc jim poskytne. V článku jsem, snad dostatečně, ukázala, že tyto přístupy fungovat mohou a že na žáky působí motivačně.

Závěrem si dovolím konstatovat, že v případě výuky v mé třídě (přístup Taška) bylo velmi příjemné vidět i slabé žáky, jak nadšeně pracují, a to v matematice. Nešlo přitom o hru, která se snaží „zatajit", že se vlastně jedná o matematiku, ale o skutečnou matematickou práci. Žáci však byli do aktivity zataženi, měli pocit, že společně něco tvoří, a současně i slabí žáci mohli pocítit úspěch. Jistě, nejde to vždy. Ne vždy se nám podaří žáky dostatečně motivovat, ne vždy se podaří najít takový způsob, který povede k danému cíli a přitom bude pro žáky přitažlivý, ne vždy se podaří zopakovat s úspěchem přístup, který v jiné třídě fungoval dobře. Náročnost učitelské práce však spočívá právě v tom neustálém hledání optimálního přístupu k výuce. Neměli bychom si ji zjednodušovat tím, že poznatky vyslovíme a necháme je žáky pouze procvičovat.

Článek vznikl v rámci výzkumného záměru MSM 0021620862 *Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání.*

Literatúra

[1] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.*, Portál, Praha, 2009.

[2] Herman, J. a kol., *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Trojúhelníky a čtyřúhelníky.*, Praha, Prometheus, 1995.

[3] Reynolds, M. J., Letting the Cat Out of the Bag ... to make Room for a Triangle!, *The Mathematics Teacher*, **95**(1), 2002, 6-7.

Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova v Praze
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

ABSTRACT
The article focuses on the approaches to the teaching of the same subject matter, namely the theorems for congruent triangles. The approaches mainly differ in the pupils' participation on the creation of new knowledge and are ordered on the scale instructivist teaching – constructivist teaching. Three of the approaches have been tested in real classrooms and the trials are described in the article.

Keywords: theorems for congruent triangles, pupils' participation on knowledge acquisition, constructivist teaching