Vlastimil Dlab

Poznámka o celočíselných polynomech, jejichž hodnoty jsou dělitelné číslem $n!$

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 1, 30–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149483

POZNÁMKA O CELOČÍSELNÝCH POLYNOMECH, JEJICHŽ HODNOTY JSOU DĚLITELNÉ ČÍSLEM $n\,!$

VLASTIMIL DLAB

Úvodem poznamenejme, že tento krátký článek byl inspirován úlohou, která mě upoutala v jednom z českých matematických časopisů:

Dokažte, že číslo $n \cdot \left(n^4 + 35n^2 + 24\right)$ *je dělitelné šedesáti pro každé přirozené číslo* n.

Budeme chtít popsat tvar **všech** polynomů, jejichž koeficienty jsou celá čísla a jejichž hodnoty v celočíselných bodech jsou násobkem čísla $n\,!$. Pro dané přirozené číslo n tedy studujeme množinu všech polynomů $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ takových, že číslo $n\,!$ je dělitelem hodnot $P(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{Z}$.

Nejprve je důležité si uvědomit, že pro každé nezáporné celé číslo n existuje *kanonický* polynom $D_n(x)$, který uvažovanou vlastnost má, totiž polynom

$$D_n(x) = \binom{x}{n} \cdot n\,!,$$

tj. $D_0(x) = 1$ a $D_k(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$ pro $k \geq 1$. Tedy $D_0(x) = 1$,

$$D_1(x) = x,$$

$$D_2(x) = x \cdot (x-1),$$

$$D_3(x) = x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right),$$

$$D_4(x) = x \cdot \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right),$$

$$D_5(x) = x \cdot \left(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24\right),$$

$$D_6(x) = x \cdot \left(x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120\right),$$

$$D_7(x) = x \cdot \left(x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720\right)$$

atd.

Hlavním výsledkem tohoto článku je následující tvrzení, které ukazuje, že z polynomů $D_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, lze pomocí určitých lineárních kombinací vytvořit všechny polynomy uvažované vlastnosti.

Věta. *Nechť $P(x)$ je polynom n-tého stupně, jehož hodnota v každém celočíselném bodě z je násobkem čísla $n!$. Potom*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k!} \cdot D_k(x) = \sum_{k=0}^{n} n! \cdot a_{n-k+1} \cdot \binom{x}{k},$$

kde a_{n-k+1} jsou celá čísla.

To je na první pohled překvapující výsledek. Důsledkem je posloupnost tvrzení, z nichž zde uvádíme jen prvních šest. Jejich formulace obsahující „triviální" sčítance umožňuje naznačit vztah k Pascalovu trojúhelníku.

Tvrzení S1. *Číslo*

$$n \cdot (a\,n - 2b + a)$$

je dělitelné číslem 2 pro všechna celá čísla n, a. Pro $a = 1$, $b = 1$ dostáváme výraz

$$n \cdot (n-1) = 2 \cdot \binom{n}{2}.$$

Tvrzení S2. *Číslo*

$$n \cdot \left[a\,n^2 - 3(b-a)\,n + 6c - 3b + 2a\right]$$

je dělitelné číslem 6 pro všechna celá čísla n, a, b. Pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ dostáváme výraz

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6 \cdot \binom{n}{3}.$$

Tvrzení S3. *Číslo*

$$n\cdot\left[a\,n^3-(4b-6a)\,n^2+(12c-12b+11a)\,n-\right.$$
$$\left.-24d+12c-8b+6a\right]$$

je dělitelné číslem 24 *pro všechna celá čísla* n, a, b, c. Pro $a=1$, $b=c=3$, $d=1$ dostáváme výraz

$$\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=24\cdot\binom{n}{4}.$$

Tvrzení S4. *Číslo*

$$n\cdot\left[a\,n^4-(5b-10a)\,n^3+(20c-30b+35a)\,n^2-\right.$$
$$-(60d-60c+55b-50a)\,n+$$
$$\left.+120e-60d+40c-30b+24a\right]$$

je dělitelné číslem 120 *pro všechna celá čísla* n, a ,b, c, d. Pro $a=1$, $b=4$, $c=6$, $d=4$, $e=1$ dostáváme výraz

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)=120\cdot\binom{n}{5}.$$

Pro $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=2$, $e=1$ dostáváme výraz

$$n\cdot\left(n^4+35n^2+84\right)=n\cdot\left(n^4+35n^2+24\right)-60n,$$

a tedy $n\cdot\left(n^4+35n^2+24\right)$ je dělitelné šedesáti pro každé n.

Tvrzení S5. *Číslo*

$$n\cdot\left[a\,n^5-(6b-15a)\,n^4+(30c-60b+85a)\,n^3-\right.$$
$$-(120d-180c+210b-225a)\,n^2+$$
$$(360e-360d+330c-300b+274a)\,n-$$
$$\left.-720f+360e-240d+180c-144b+120a\right]$$

je dělitelné číslem 720 pro všechna celá čísla n, a, b, c, d, e.

Pro $a = 1$, $b = 5$, $c = d = 10$, $e = 5$, $f = 1$ dostáváme výraz

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2\cdot)(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) = 720 \cdot \binom{n}{6}.$$

Tvrzení S6. *Číslo*

$$\begin{aligned} n \cdot \big[a\,n^6 - (7b-21a)\,n^5 + (42c - 105b + 175a)\,n^4 - \\ (210d - 420c + 595b - 735a)\,n^3 + \\ (840e - 1260d + 1470c - 1575b + 1624a)\,n^2 - \\ (2520f - 2520e + 2310d - 2100c + 1918b - 1764a)\,n + \\ +5040g - 2520f + 1680e - 1260d + 1008c - 840b + 720a\big] \end{aligned}$$

je dělitelné číslem 5 040 pro všechna celá čísla n, a, b, c, d, e, f.

Pro $a = 1$, $b = 6$, $c = 15$, $d = 20$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 1$ dostáváme výraz

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) = 5\,040 \cdot \binom{n}{7}.$$

K dokonalému porozumění výše uvedené Věty nám pomůže její důkaz. Ten nám navíc dovolí následující obecnější formulaci.

Obecné tvrzení. *Nechť $P(x)$ je polynom n-tého stupně. Jsou-li hodnoty $P(z)$ dělitelné číslem $n!$ pro každé $z = 0, 1, \dots, n-1$, potom jsou hodnoty $P(z)$ dělitelné číslem $n!$ pro všechna celá čísla $z \in \mathbb{Z}$ a*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k!} \cdot D_k(x) = \sum_{k=0}^{n} n! \cdot a_{n-k+1} \cdot \binom{x}{k},$$

kde a_{n-k+1} jsou celá čísla.

Důkaz. Nechť

$$P(x) = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_n x + A_{n+1}$$

je uvažovaný polynom. Jelikož je číslo $P(0)$ dělitelné číslem $n\,!$, je koeficient A_{n+1} dělitelný číslem $n\,!$, a tedy

$$P(x) = P_1(x)\,x + n\,!\,a_{n+1} = P_1(x)x + n!\,\frac{a_{n+1}}{0\,!}\,D_0(x),$$

kde $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$.
Vyjádřeme $P_1(x)$ ve tvaru $P_1(x) = P_2(x)\cdot(x-1) + r_2$, kde $r_2 \in \mathbb{Z}$ a tedy

$$P(x) = P_2(x)\cdot x\cdot(x-1) + r_2\cdot x + n\,!\cdot\frac{a_{n+1}}{0\,!}\cdot D_0(x).$$

Jelikož $P(1)$ je dělitelné číslem $n\,!$, je $r_2 = n\,!\,a_n$, kde $a_n \in \mathbb{Z}$, a tudíž

$$P(x) = P_2(x)\,x(x-1) + n!\Big[\frac{a_n}{1!}D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0!}D_0(x)\Big].$$

Stejným způsobem dostáváme vztah

$$P(x) = P_3(x)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)+$$
$$+\,r_3\cdot x\cdot(x-1) + n\,!\cdot\left[\frac{a_n}{1\,!}D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0\,!}D_0(x)\right],$$

a protože $P(2)$ je dělitelné číslem $n\,!$, je $r_3\cdot 2\,! = n\,!\cdot a_{n-1}$ pro nějaké $a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, tj.

$$P(x) = P_3(x)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)+$$
$$+\,n\,!\cdot\left[\frac{a_{n-1}}{2\,!}D_2(x) + \frac{a_n}{1\,!}D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0\,!}D_0(x)\right].$$

Zjišťujeme tedy, že pro každé t, pro $1 \le t < n$, je

$$P(x) = P_t(x)\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-t+1)+$$
$$+\,n\,!\cdot\left[\frac{a_{n-t+2}}{(t-1)\,!}\,D_{t-1}(x) + \cdots + \frac{a_n}{1\,!}\,D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0\,!}\,D_0(x)\right].$$

Exaktně to dokážeme indukcí. Pro $t = 1$ (a také pro $t = 2, 3$) tvrzení platí, jak jsme právě zjistili. Vyjádříme $P_t(x)$ ve tvaru $P_t(x) = P_{t+1}(x) \cdot (x - t) + r_{t+1}$, kde $r_{t+1} \in \mathbb{Z}$, a tedy

$$P(x) = P_{t+1}(x)\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-t)+r_{t+1}\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-t+1)+ \\ + n!\cdot\left[\frac{a_{n-t+2}}{(t-1)!}\,D_{t-1}(x) + \cdots + \frac{a_n}{1!}\,D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0!}\,D_0(x)\right].$$

Jelikož číslo $P(t)$ je dělitelné $n!$, je $r_{t+1} \cdot t! = n! \cdot a_{n-t+1}$, a tedy

$$P(x) = P_{t+1}(x) \cdot x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-t) + \\ + n! \cdot \left[\frac{a_{n-t+1}}{t!}\,D_t(x) + \frac{a_{n-t+2}}{(t-1)!}\,D_{t-1}(x) + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{a_n}{1!}\,D_1(x) + \frac{a_{n+1}}{0!}\,D_0(x)\right].$$

Indukční krok je dokončen. Pro $t = n-1$ dostáváme žádaný výraz, a obecné tvrzení je dokázáno.

Poznámka. Vraťme se krátce k původní motivaci tohoto tématu, a poznamenejme, že v duchu předchozího důkazu

$$n \cdot \left(n^4 + 35n^2 + 24\right) = 60D_1(n) + 120D_2(n) + \\ + 60D_3(n) + 10D_4(n) + D_5(n) = 60D_1(n) + 120k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dodatek. Naše téma úzce souvisí s teorií aritmetických posloupností vyšších řádů. Formulujme tuto souvislost v následující větě.

Věta. *Nechť polynom $P(x)$ n-tého stupně splňuje podmínku, že každý člen posloupnosti $(P(0), P(1), \ldots, P(n))$ je dělitelný číslem $n!$. Potom posloupnost $(P(t) \mid 0 \le t)$, a tedy též posloupnost $\left(a_t = \frac{1}{n!}\,P(t) \mid 0 \le t\right)$, je aritmetickou posloupností n-tého řádu.*

Důkaz ponecháváme čtenáři. Zajímavé jsou vztahy mezi příslušnými diferenčními posloupnostmi; ukažme je na hodnotách $n \leq 7$ explicitně. Uvažujme hodnoty polynomů $\frac{D_n(x)}{n\,!}$ pro $x \geq n$.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca