Učitel matematiky

Daša Palenčárová; Anna Polomčáková

Parametre vplývajúce na obtiažnosť kombinatorických úloh

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 1, 16–29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149482`

PARAMETRE VPLÝVAJÚCE NA OBTIAŽNOSŤ KOMBINATORICKÝCH ÚLOH

DAŠA PALENČÁROVÁ, ANNA POLOMČÁKOVÁ

Kombinatorika je významnou časťou diskrétnej matematiky. Stretávame sa s ňou v každodennom živote a na Slovensku tvorí súčasť učebných plánov na základných aj stredných školách. Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 2 [8] schváleného v roku 2010 sa kombinatorika vyučuje v 6. a 7. ročníku základnej školy, kombinatorické úlohy v iných tematických celkoch nachádzame v učebniciach matematiky už skôr. V 6. ročníku sa kombinatorike venuje tematický celok *Kombinatorika v úlohách*. Obsahom vyučovania v tomto tematickom celku by malo byť:

- usporiadanie prvkov do radu (rôzne systémy vypisovania),
- tvorenie dvoj-, troj-, štvorciferných čísel (prvkov) z daného počtu číslic (prvkov),
- riešenie slovných (kontextových) úloh s kombinatorickou motiváciou – rôznymi spôsobmi (priebežne),
- propedeutika štatistiky, pravdepodobnosti a kombinatoriky (zhromažďovanie, usporiadanie a grafické znázornenie údajov) [8].

Tematický celok venovaný kombinatorike v 7. ročníku je *Kombinatorika – riešenie úloh*. Obsahom vyučovania pre tento tematický celok by mali byť:

- úlohy na tvorbu skupín predmetov a ich počte z oblasti rôznych hier, športu a z rôznych oblastí života (propedeutika variácií),
- rôzne spôsoby vypisovania na jednoduchých úlohách (bez podmienok, využiť pravidlo súčtu),

- objavovanie možností a zákonitostí,
- pravidlo súčinu,
- úlohy s podmienkami (propedeutika základných modelov kombinatoriky),
- riešenie jednoduchých kombinatorických úloh (na základe hier a pokusov),
- riešenie kombinatorických úloh rôznymi metódami (stromový diagram (stromový graf), príprava tabuliek, systematické vypisovanie možností) [8].

Kombinatorika je tou časťou matematiky, ktorá si na začiatku nevyžaduje žiaden zložitý matematický aparát. Pre zvýšenie pozornosti žiakov a zefektívnenie učenia kombinatoriky je vhodné na hodinách voliť úlohy žiakom blízke, s ktorými majú reálne skúsenosti. Aj napriek zdanlivo vhodnej motivácii majú žiaci často problémy s riešením týchto úloh. Výsledky posledných výskumov [1], [2], [3] ukazujú, že na obtiažnosť kombinatorickej úlohy vplýva viacero parametrov:

- *prvky (objekty)*, ktoré kombinujeme, napr. ľudia, číslice, autíčka, listy, ...
- *počet prvkov*, ktoré kombinujeme,
- *kombinatorické operácie* (permutácie, kombinácie, variácie s opakovaním, alebo bez opakovania),
- *formulácia úlohy*
  - z procesuálneho, konceptuálneho pohľadu,
  - z hľadiska implicitných kombinatorických modelov.

V príspevku sa budeme zaoberať prvkami, ktoré kombinujeme, ich počtom a formuláciou úlohy z pohľadu implicitných kombinatorických modelov.

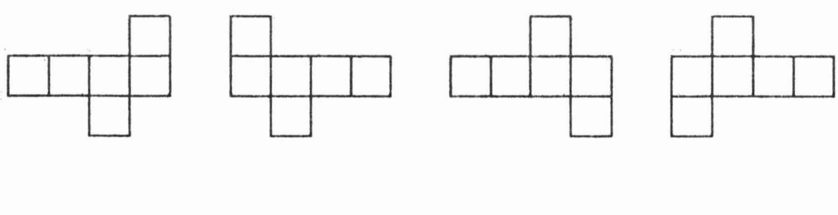
Prvky (objekty), ktoré kombinujeme

Pri riešení úloh na hodinách matematiky je dôležité, aby sme žiakov zaujali. Pre žiakov je motivujúce použiť v zadaní úlohy

prvky, s ktorými sa stretávajú v bežnom živote. U mladších žiakov sú to úlohy s autíčkami, s obliekaním bábik, u starších žiakov sú to úlohy typu „LOTTO“ a úlohy s kódovacími zámkami [6]. K menej obľúbeným úlohám patria úlohy z kombinatorickej geometrie, v ktorých musí riešiteľ skombinovať vedomosti z geometrie s vedomosťami z kombinatoriky. Pri takomto type úloh žiakom chýba predstavivosť pri znázorňovaní daných objektov v rovine (priestore). Ako príklad uvádzame úlohu, ktorú sme zadali aj 24 študentom Prírodovedeckej fakulty UPJŠ, budúcim učiteľom matematiky.
Úloha: Sieť kocky sa skladá zo šiestich zhodných štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).

Formulácia úlohy je prevzatá od I. Scholtzovej [7], ktorá na tejto úlohe robila výskum a zistila, že riešitelia najprv nachádzajú siete so štyrmi štvorcami v rade.

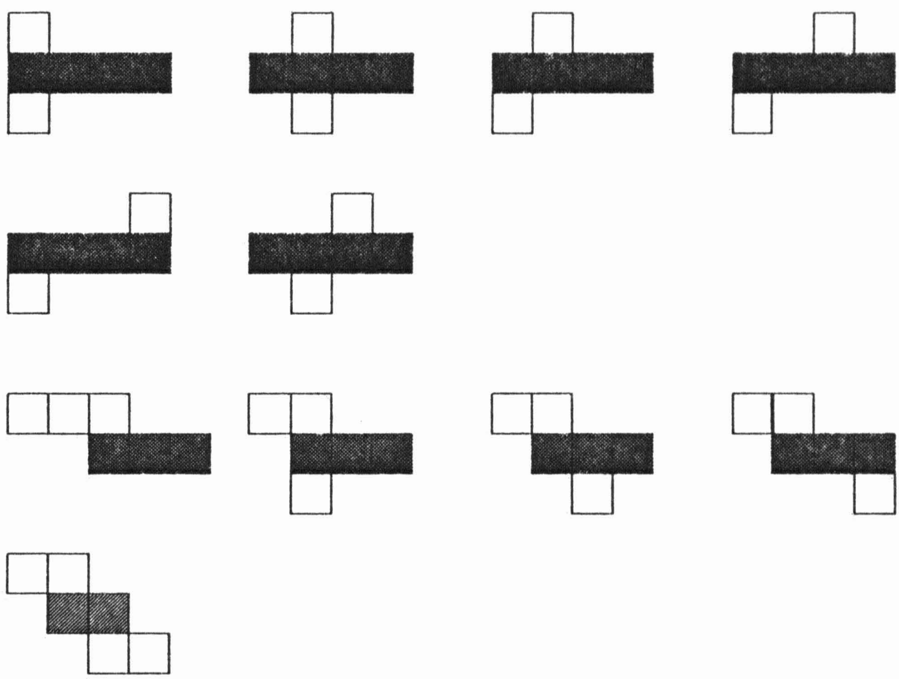
Študentov sme poprosili, aby okrem samotného riešenia úlohy napísali aj nejaký myšlienkový proces, ktorý sa u nich odohral po prečítaní zadania a v priebehu samotného riešenia úlohy. Taktiež sme boli zvedaví, či sa pri výpise možností objaví nejaký systém, keďže riešení je málo a nenabáda to na hľadanie systému pri výpise možností.
Riešenie: Počet riešení úlohy závisí od odpovede na otázku: Sú siete na obr. 1 rovnaké?



Obr. 1: Sú tieto siete rovnaké alebo rôzne?

Počas riešenia by sa táto otázka mala vynoriť. Iba piati študenti mali potrebu sa zmieniť k tejto otázke. Škrtanie v riešeniach siedmich študentov naznačuje, že asi považovali tieto siete za rovnaké, teda sa dá predpokladať, že sa u nich táto otázka vynorila, aj keď sa o nej v popise nezmienili.

Ak siete na obr. 1 budeme považovať za rovnaké, úloha ma 11 riešení (obr. 2). Všetky riešenia našli iba dvaja študenti a potvrdilo sa, že riešitelia najprv nachádzajú siete so štyrmi štvorcami v rade. U 11 riešiteľov vôbec nebola potreba hľadať systém pri výpise možností.



Obr. 2 Riešenie úlohy

Počet prvkov, ktoré kombinujeme

Pre žiakov je úloha, pri ktorej kombinujeme väčší počet prvkov, náročnejšia ako úloha s menším počtom prvkov. Preto je pri výučbe vhodné začínať s úlohami s menším počtom prvkov a postupne zvyšovať ich počet. Je dôležité, aby žiaci samostatne na analogických príkladoch objavili matematickú štruktúru úloh, a to postupným zvyšovaním počtu prvkov. Výskumom v tejto oblasti sa zaoberala English [2], ktorá skúmala štrukturálne porozumenie kombinatorických úloh prezentovaných v rôznych situáciách.

Podobný výskum na rovnakých úlohách ako v jej článku sme uskutočnili aj my.

Úlohy z výskumu:

Časť 1:

Janka má modrú, červenú a žltú sukňu. K sukni si môže obliecť biele alebo zelené tričko. Koľko rôznych kombinácií má na oblečenie? (dvojdimenzionálna úloha $X \cdot Y$)

Úloha 2.

Tomáš robí sendviče. Má biely, tmavý a sezamový chlieb. Sendviče môže naplniť šunkou, kuracím mäsom a hovädzím mäsom. Koľko rôznych sendvičov môže urobiť, ak každý sendvič má jeden druh chleba a jeden druh náplne? (dvojdimenzionálna úloha $X \cdot Y$).

Časť 2:

Úloha 1.

Pani Dana sa rozhoduje, aké kvety použije na aranžovanie. Môže si vybrať ruže, karafiáty a narcisy. Môže použiť vysokú a nízku vázu. Koľkými rôznymi spôsobmi môže naaranžovať kvety, ak môže použiť iba jeden druh kvetov a jeden druh vázy? (dvojdimenzionálna úloha $X \cdot Y$)

Úloha 2.

Martin robí bláznivé zvieratá. Ako hlavu zvieraťa si môže vybrať hlavu z kohúta, opice a kačky. Ich telo si môže vybrať z tela somára, zajaca a slona. Koľko rôznych bláznivých zvierat si môže urobiť? (dvojdimenzionálna úloha $X \cdot Y$)

Úloha 3.

Marína robí škatule s pohľadnicami, ktoré predáva na trhu. Má modrý, červený a zelený papier. Tiež má prúžkovanú a strakatú stuhu. Na písanie môže použiť zlatý a strieborný atrament. V jednej škatuli sú všetky pohľadnice rôzne. Ak každá pohľadnica má jeden farebný papier, jednu stuhu a písmo jednej farby, koľko rôznych pohľadníc uloží do každej škatule? (trojdimenzionálna úloha $X \cdot Y \cdot Z$)

Úloha 4.

Pán Milan potrebuje nové auto, ale nevie sa rozhodnúť, aké kúpiť. Môže si vybrať dvojdverové alebo štvordverové auto. Tiež má na výber luxusnú alebo štandardnú výbavu. Potom si môže vybrať základnú farbu alebo metalízu. Koľko rôznych možností má? (trojdimenzionálna úloha $X \cdot Y \cdot Z$)

Priebeh výskumu

Výskum sme realizovali na jednej hodine v dvoch častiach. Najprv sme spoločne so žiakmi vyriešili úlohy prvej časti na tabuľu. Stratégie riešení boli rôzne (výpis všetkých možností, tabuľka, stromový diagram), záviselo to od žiakov, ako sa do spoločnej práce zapájali. Jedna úloha bola riešená aj viacerými stratégiami.

Výskumu sa zúčastnilo 107 žiakov 5. až 9. ročníka základnej školy (vek: 10 až 15 rokov). Najväčšia vzorka žiakov bola z 5. ročníka, a to 39 žiakov, 15 žiakov bolo zo 6. ročníka, zo 7. ročníka 11 žiakov, 8. ročník bol zastúpený 18 žiakmi a 24 žiakov bolo z 9. ročníka.

Žiaci 5. a 6. ročníka na matematike ešte kombinatoriku ako tematický celok nemali, s niektorými kombinatorickými úlohami sa mohli stretnúť pri preberaní iných tematických celkov.

Vo výskume sme sa zamerali na:

- stratégie, akými žiaci riešili úlohy,
- koľko bolo správnych riešení, resp., či žiaci odhalili matematickú štruktúru úlohy.

Vyhodnotenie výskumu: Riešenie sme zaradili k správnemu u dvojdimenzionálnych, resp. trojdimenzionálnych úloh, ak mal žiak správne obe predložené úlohy. Výsledky uvádzame v nasledujúcich tabuľkách, kde v tabuľke 1 je vyhodnotenie výskumu u žiakov 5. a 6. ročníka, ktorí ešte kombinatoriku nemali, a tabuľka 2 zahŕňa výsledky výskumu v ostatných ročníkoch.

	5. ročník		6. ročník	
	2-dimen.	3-dimen.	2-dimen.	3-dimen.
Správne	22	5	13	5
Nesprávne	9	15+4*	2	4+6*
Neriešili	8	15	0	0

Tab. 1: Výsledky výskumu v 5. a 6. ročníku

	7. ročník		8. ročník		9. ročník	
	2-dim.	3-dim.	2-dim.	3-dim.	2-dim.	3-dim.
Správne	8	4	14	9	24	17
Nesprávne	3	4+3*	4	9	0	3+4*
Neriešili	0	0	0	0	0	0

Tab. 2: Výsledky výskumu v 7., 8. a 9. ročníku

Výskumom sme zistili, že výsledky žiakov najmä nižších ročníkoch (5. a 6.) pri dvojdimenzionálnych úlohách boli správne, aj keď je zrejmé, že žiaci matematickú štruktúru úloh zatiaľ neodhalili, nakoľko nevedeli daný spôsob riešenia ďalej aplikovať u trojdimenzionálnych úloh a vo väčšine riešili správne len dvojdimenzionálne úlohy, ktoré sme spoločne riešili v prvej časti experimentu. V riešeniach žiakov sme nachádzali nasledujúce stratégie:

* – nepochopená matematická štruktúra úlohy, u trojdimenzionálnych úloh vypisovanie dvojíc

obrázok (iba v 5. ročníku), výpis možností, pravidlo súčinu, stromový graf, opakované sčítanie. Pravidlo súčinu sme zaznamenali už v 5. ročníku, ale častejšie sa vyskytuje až vo vyšších ročníkoch. Opakované sčítanie a stromový graf sa vyskytli iba v 8. a 9. ročníku. Väčšina žiakov riešila úlohy výpisom možností, v 6. ročníku boli všetky úlohy riešené len touto stratégiou. Pri trojdimenzionálnych úlohách časť žiakov ani neporozumela úlohe, zaznamenávali sme výpis dvojíc, prípadne len jeden krok násobenia.

Žiaci začínali vo väčšej miere úlohy zovšeobecňovať až v 7. ročníku, čo nám potvrdzuje výsledky výskumu Piageta [5], ktoré ukazujú, že žiaci pri riešení kombinatorických úloh začínajú zovšeobecňovať metódu „krok za krokom" približne v 12. rokoch.

Implicitné kombinatorické modely

Podľa Duboisa [1] jednoduché kombinatorické úlohy môžu byť klasifikované do troch implicitných kombinatorických modelov (ICM)[2]:

- *model selection* – znenie úlohy požaduje výber n objektov z m (vziať, vybrať, ťahať, zbierať, zvoliť),
- *model distribution* – je propedeutikou zobrazenia, znenie úlohy požaduje rozdelenie n objektov do m buniek (umiestniť, rozdeliť, vložiť, priradiť, rozložiť),
- *model partition* – je propedeutikou rozdelenia množín na podmnožiny, znenie úlohy požaduje oddeliť n objektov do m skupín (separovať, oddeliť, rozdeliť).

Výskum, v ktorom sme sa zamerali na zistenie vplyvu ICM na správnosť riešenia úloh, sme uskutočnili na základnej škole (134 žiakov), kde žiaci vo väčšine výučbu kombinatoriky ešte neabsolvovali (niektorí žiaci mali za sebou úvod do kombinatoriky

[2]Názvy modelov ponechávame v anglickom jazyku.

v 6. ročníku), na gymnáziách (68 žiakov) a na PF UPJŠ (85 študentov). Výskum sme uskutočnili na základe experimentu popísaného v článku [1]. Do výskumu sme navrhli tri úlohy, každú na iný implicitný kombinatorický model, ale všetky sa dali riešiť rovnakou kombinatorickou operáciou (variácie s opakovaním). Pri tvorbe úloh sme sa zamerali na to, aby text bol pre žiakov napísaný zrozumiteľne a nebol príliš dlhý.

Úlohy z výskumu:

Úloha 1 (selection): V škatuli sú tri očíslované guľky (s číslami 2, 4, 7). Vyberieme jednu guľku a zapíšeme jej číslo. Guľku vrátime späť do škatule. Opakujeme to, až kým nedostaneme trojciferné číslo. Koľko rôznych trojciferných čísel môžeme získať? Napríklad: po vytiahnutí guľky s číslom 2 trikrát za sebou získame číslo 222.

Úloha 2 (distribution): Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve odlišné izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti? Napríklad: jedna možnosť je, že všetky deti budú spať v izbe na prízemí.

Úloha 3 (partition): Chlapec má tri odlišné farebné autíčka (čierne, červené a žlté) a chce rozdeliť autíčka dvom kamarátom – Peťovi, Jožovi. Koľkými spôsobmi môže rozdeliť autíčka? Napríklad: jedna možnosť je, že všetky autíčka dá Peťovi.

Pre žiakov stredných škôl a študentov PF UPJŠ bola 1. úloha upravená na vytváranie štvorciferných čísel a v 3. úlohe sa autíčka rozdeľovali štyrom deťom.

Vyhodnotenie výskumu

V nasledujúcej tabuľke uvádzame zhrnutie výsledkov výskumu zo všetkých troch stupňov škôl.

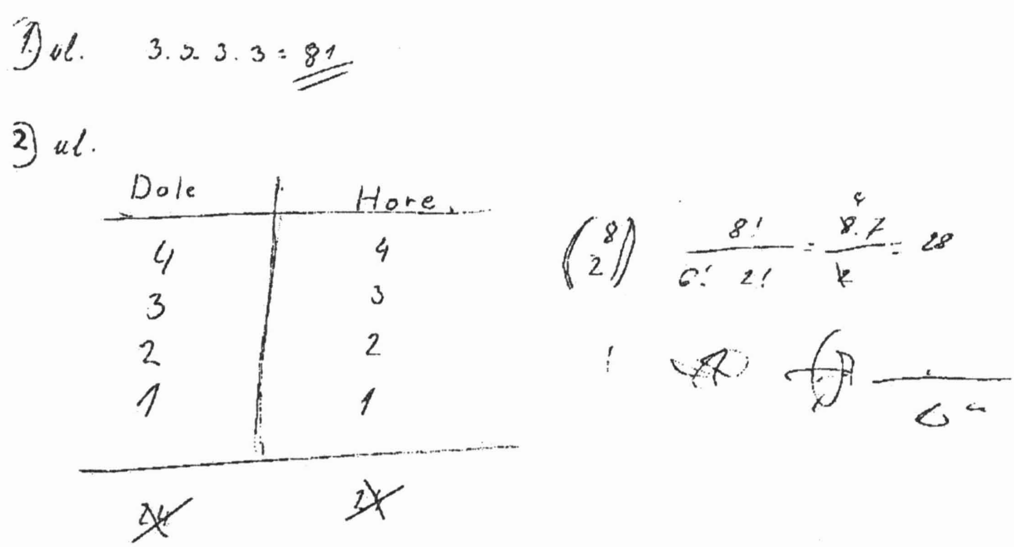
	Ú1	Ú2	Ú3
Základná škola			
Správne	41	12	27
Nesprávne	86	111	91
Neriešili	7	11	16

	Ú1	Ú2	Ú3
Gymnázium			
Správne	51	19	5
Nesprávne	17	47	48
Neriešili	0	2	15

	Ú1	Ú2	Ú3
PF UPJŠ			
Správne	64	38	16
Nesprávne	16	46	62
Neriešili	5	1	7

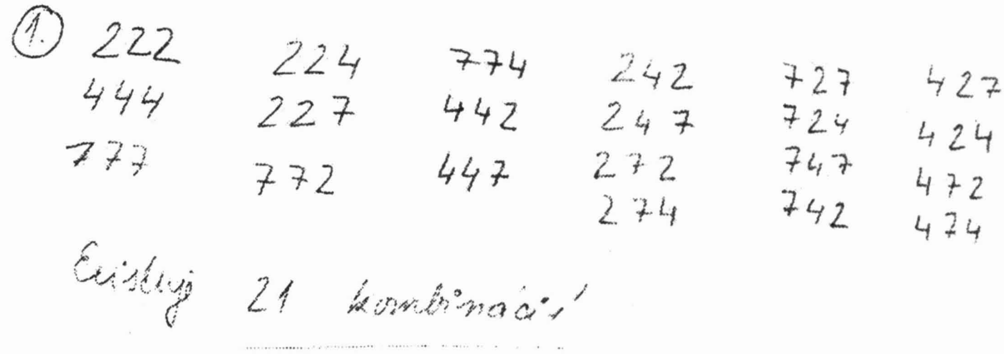
Tab. 3: Výsledky výskumu na zistenie vplyvu ICM na úspešnosť riešenia úloh

Výsledky výskumu ukazujú, že u žiakov, ktorí ešte výučbu kombinatoriky neabsolvovali, nenachádzame až také veľké rozdiely v úspešnostiach jednotlivých úloh (úloha 1 – 30,6 %, úloha 2 – 9 %, úloha 3 – 20,15 %) ako u žiakov, ktorí už kombinatoriku na základnej, prípadne aj na strednej škole mali. U žiakov, ktorí už absolvovali výučbu kombinatoriky, sú úlohy modelu selection (úspešnosť 75,2 %) ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu distribution (úspešnosť 37,3 %) a tie sú ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu partition (úspešnosť 13,7 %). Úspešnosť úlohy partition je v tomto prípade ešte nižšia ako u žiakov základnej školy. V jednotlivých riešeniach sme pozorovali, že niektorí žiaci aplikujú vzorec pre výpočet u úlohy modelu selection, no v inom kombinatorickom modeli to aplikovať neboli schopní (obr.3). Príčinu môžeme hľadať aj vo výbere úloh v učebniciach, s ktorými žiaci z nášho výskumu pracovali na hodinách matematiky. Po analýze učebníc základných škôl a gymnázií (učebnice pre 6. a 7. ročník od autorov Šedivý a kol. a Repáš a kol., učebnice pre gymnázia od autorov Odvárko a kol. a Hecht a kol.) sme zistili, že vo všetkých učebniciach absentujú úlohy modelu partition, kde na základnej škole sa žiaci môžu stretnúť iba po jednej úlohe takéhoto typu, a to iba v dvoch učebniciach. Na gymnáziách sa v učebnici od Hechta nachádzajú dve úlohy modelu partition a v učebnici druhého autora ich je sedem. Úlohy modelu selection majú v niektorých učebniciach prevahu, v iných je ich zastúpenie porovnateľné s úlohami modelu distribution. Ďalej sme zistili, že úlohy modelu distribution sú vo veľkej miere rovnako zadané a vyžadujú od žiaka vytvoriť všetky čísla, ktoré obsahujú určité číslice, resp. vytvoriť všetky slová s určitými písmenami. Úlohy modelu selection majú rôznorodé zadania.



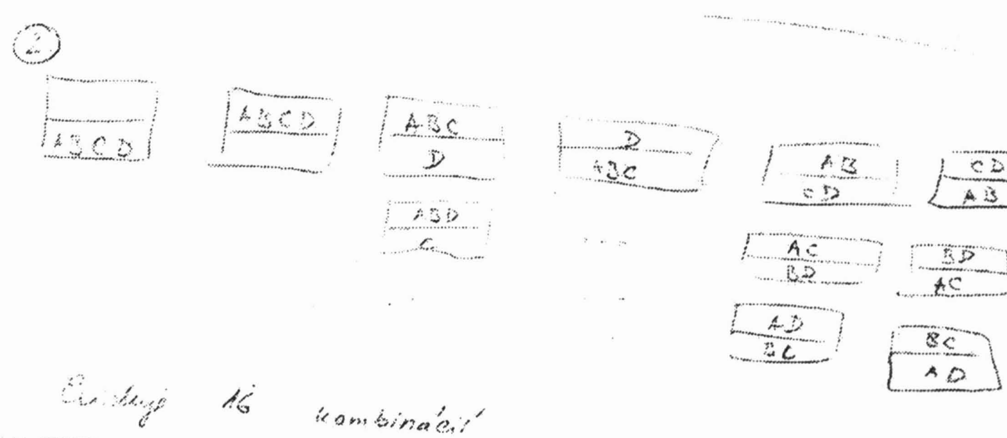
Obr. 3: Riešenie žiaka gymnázia s nesprávnou aplikáciou vzorca v úlohe modelu distribution

Na záver uvádzame riešenie všetkých troch úloh žiakom 6. ročníka ZŠ, ktorý na hodine matematiky ešte neabsolvoval výučbu kombinatoriky.



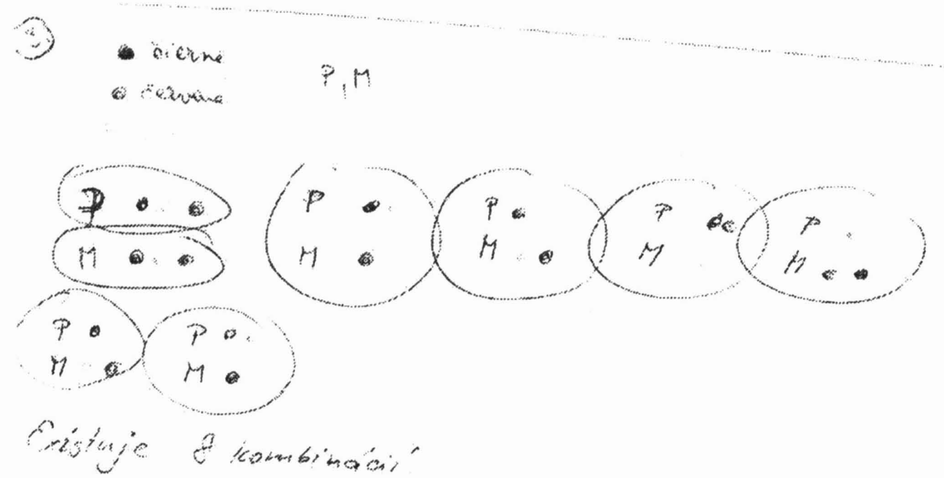
Obr. 4: Žiacke riešenie úlohy 1

Žiak riešil úlohu 1 výpisom možností. V jeho riešení nachádzame systém, no zabudol (alebo vynechal) možnosti, kde boli posledné dve cifry rovnaké.



Obr. 5: Žiacke riešenie úlohy 2

V úlohe 2 si žiak nakreslil obdĺžniky a čiarou ich oddelil na vrchnú a spodnú časť, čo predstavovalo izby na jednotlivých poschodiach v dome. Žiak si označil deti písmenami A, B, C, D. Má systém v rozdeľovaní detí do izieb. Keď vidí, ako to ďalej bude nasledovať, už nevypisuje všetky možnosti.



Obr. 6: Žiacke riešenie úlohy 3

Pri tejto úlohe si žiak pomohol farbičkami a jednotlivým chlapcom priraďoval autá ako farebné bodky. Jeho riešenie má systém a žiadnu možnosť nevynechal.

Literatúra

[1] Batanero, C., Navarro - Pelayo, V., Godino, J., Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils, *Educational Studies in Mathematics* **32**(1997), 181–199.

[2] English, L. D., Children's Strategies for Solving Two- and Three-dimensional Combinatorial Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **24**(1993) 255–273.

[3] Hejný, M., Michalcová, A., *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*, Metodické centrum Bratislava, Bratislava, 2001.

[4] Palenčárová, D., *Kombinatorické úlohy vo vyučovaní matematiky na základnej škole*, Diplomová práca. PF UPJŠ, Košice, 2009.

[5] Piaget, J., Inhelderová, B., *Psychologie dítěte*, Portál, Praha, 2001.

[6] Płocki, A., Tlustý, P., *Kombinatoryka wokół nas*, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płocko, 2010.

[7] Scholtzová, I., *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole (Riešené príklady s metodickými poznámkami)*, Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, Prešov, 2004.

[8] Štátny pedagogický ústav. *Štátny vzdelávací program, Matematika. Príloha ISCED 2*, [online]. Bratislava: ŠPÚ, 2009. [cit. 2012-03-03]. Dostupné na internete: `http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/-vzdelavacie_oblasti/prilohy/matematika_isced2.pdf`.

RNDr. Daša Palenčárová
RNDr. Anna Polomčáková
Ústav matematický vied PF UPJŠ
Jesenná 5, 040 01 Košice, Slovenská Republika
e-mail: palencarova.dasa@gmail.com
e-mail: anna.polomcakova@gmail.com