Václav Vlk

Jak to vlastně je?

*Učitel matematiky*, Vol. 22 (2014), No. 4, 243–252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149477

# JAK TO VLASTNĚ JE?

Václav Vlk[10]

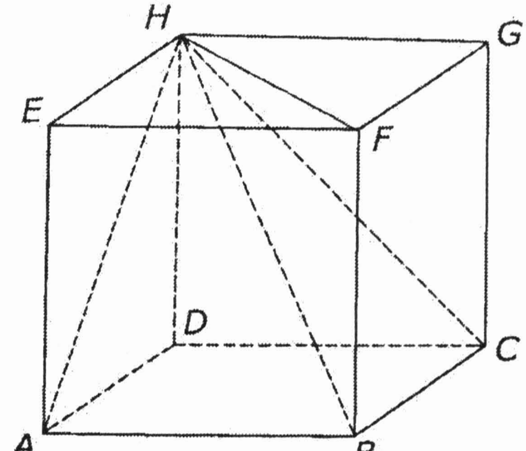
V České republice existuje aspoň jedna studentka, která je nejen bystrá matematička, ale je i pilná a bere své studium velmi poctivě. Doložím to následujícím příběhem.

Tato studentka gymnázia se na mne obrátila s dotazem:

V geometrii jsme odvozovali vzorce pro objem jehlanu. Postupovali jsme podle učebnice (Pomykalová 1995, s. 154). Odvodili jsme rozkladem krychle $ABCDEFGH$ na tři shodné jehlany $ABCDH$, $BCGFH$ a $ABFEH$ (obr. 1), že objem každého z těchto jehlanů se vypočítá podle vzorce

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v, \tag{1}$$

kde $S$ je obsah podstavy a $v$ je výška jehlanu.

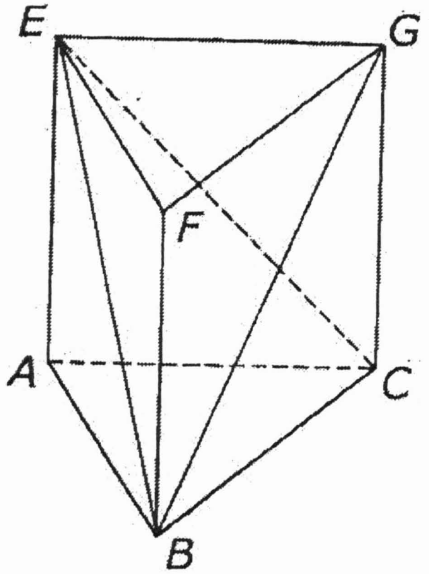



Obr. 1

[10]Čtvrté pokračování úvah o drobných didaktických otázkách spjatých s praxí.

Pak paní profesorka řekla:
*Podobně můžeme odvodit, že vzorec (1) platí pro libovolný jehlan. Návod najdete v učebnici na s. 154.*

Doma jsem se o to pokusila. V učebnici je tento text:
*Uvažujeme-li místo krychle kolmý trojboký hranol $ABCEFG$ (obr. 2), přijdeme podobnými úvahami k závěru, že i pro objem jehlanu $ABCE$ platí stejný vzorec.*




Obr. 2

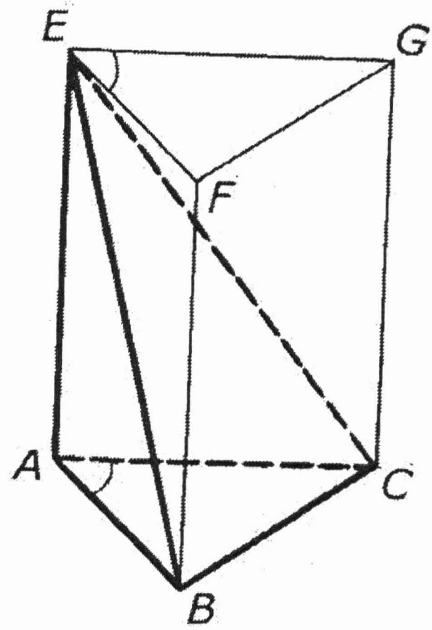
Rozložit trojboký hranol na tři shodné jehlany se mi nedařilo. Přivolala jsem si na pomoc tatínka, technika, který má (jak o sobě tvrdí) dobrou geometrickou představivost. Rozklad se nepodařil ani otci. Začala jsem pátrat v literatuře. Ve *Vopěnkově* knize *Rozpravy s geometrií* (Vopěnka, 1989) jsem tuto problematiku nalezla. Vopěnka při důkazu vychází z tzv. *Démokritovy hypotézy*, podle níž dva trojboké jehlany, které mají shodné podstavy a shodné výšky, mají stejný objem.

Mimochodem však poznamenává, že jehlany $ABCE$ a $EFGB$ v označení podle obr. 2 jsou shodné. Ty však, říká studentka, shodné být nemohou, neboť kdyby např. úhly $\sphericalangle EFG$ a $\sphericalangle ABC$ byly pravé, pak přímka $FB$ je kolmá k rovině $EFG$ ve vrcholu pravého úhlu, kdežto $EA$ je kolmá k rovině $ABC$ ve vrcholu úhlu ostrého.

Jak to tedy vlastně je?

Dokažme nejdříve, že libovolný kolmý trojboký hranol nelze rozložit na tři shodné trojboké jehlany, jejichž vrcholy jsou ve vrcholech hranolu.

Pro konkrétnost uvažujme např. trojboký hranol $ABCEFG$, pro nějž platí: $|AB| = 3\,\text{cm}$, $|BC| = 4\,\text{cm}$, $|AC| = 5\,\text{cm}$, $|AE| = 7\,\text{cm}$ (obr. 3). Trojúhelníky $ABC$ a $EFG$ jsou tedy shodné a pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů $B$ a $F$.



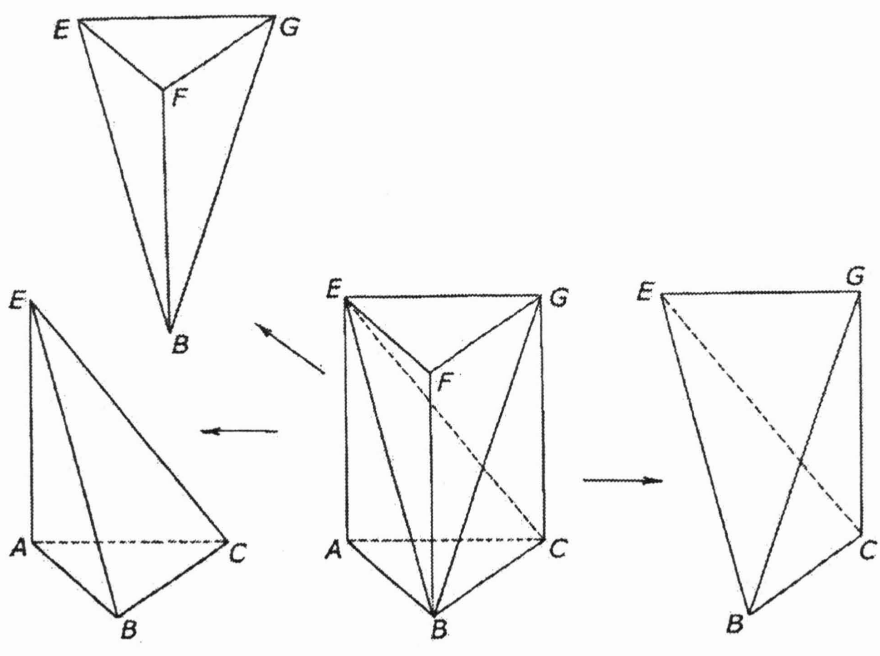

Obr. 3

Máme-li rozložit hranol $ABCDEF$ na čtyřstěny (trojboké jehlany) požadovaným způsobem, musí být stěnou jednoho z nich podstava hranolu, tedy např. trojúhelník $ABC$, a čtvrtým vrcholem je některý z bodů $E$, $F$, $G$, např. vrchol $E$. Zbývající čtyřstěny z rozkladu mohou mít vrcholy pouze v bodech $E$, $F$, $G$, $B$ a $C$. Je tedy možné určit pět čtveřic případných vrcholů čtyřstěnů: $BCGF$, $EFGC$, $EFGB$, $EGBC$ a $EFBC$. Čtveřici

$BCGF$ musíme vyloučit, neboť tyto body leží v rovině. Žádný ze čtyřstěnů $FEGC$, $EFGB$ není se čtyřstěnem $ABCE$ shodný, neboť hrany $GC$ a $FB$ kolmé k rovině $EFG$ vycházejí z vrcholů úhlů, které nejsou shodné s úhlem $BAC$. Čtyřstěn $EGBC$ není shodný se čtyřstěnem $ABCE$, neboť žádná jeho hrana nemá délku 3 cm. Čtyřstěn $EFBC$ není shodný se čtyřstěnem $ABCE$, protože žádná z jeho hran nemá délku 5 cm.

Stejnou úvahu můžeme provést, vyjdeme-li ze čtyřstěnu $ABCF$ nebo $ABCG$.

Trojboký hranol lze ovšem rozložit na tři čtyřstěny, které mají stejný objem, např. podle obr. 4. K důkazu rovnosti objemů těchto čtyřstěnů můžeme využít tzv. *Cavalieriho princip*, který učebnice (Pomykalová 1995) rovněž uvádí.



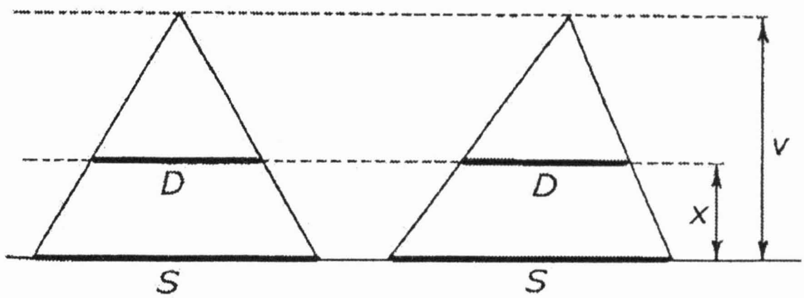

Obr. 4

Cavalieriho princip zní:

*Jestliže pro dvě tělesa existuje rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.*

Z tohoto principu bezprostředně vyplývá důkaz Démokritovy hypotézy připomenuté výše.

Mají-li totiž dva jehly podstavy s týmž obsahem stejnou výšku (obr. 5), mají rovinné řezy v libovolné výšce týž obsah, jak plyne z podobnosti mnohoúhelníku podstavy a mnohoúhelníku řezu s týmž poměrem podobnosti na obou jehlanech.




Obr. 5

Dokažme nyní.

*Libovolný kolmý trojboký hranol $ABCEFG$ (obr. 4) můžeme rozložit na čtyřstěny $ABCE$, $BCGE$, $EFGB$, které mají týž objem.*

Jehlany $ABCE$ a $EFGB$ mají týž objem, neboť mají shodné podstavy a stejnou výšku ($|AE| = |FB|$).

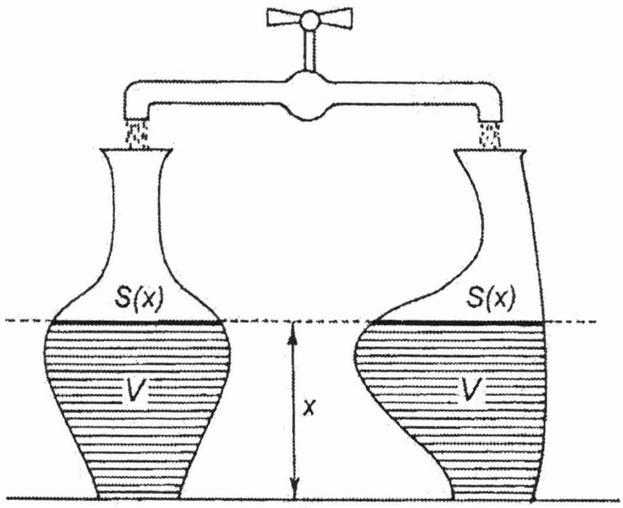
Jehlany $EFGB$ a $BCGE$ mají rovněž stejný objem, neboť mají shodné podstavy $BCG$ a $GFB$ (polovina rovnoběžníku $BCGF$) a stejnou výšku (vzdálenosti vrcholu $E$ od roviny $BCGF$).

Platí tedy vzorec (1).

Pro zajímavost uveďme, že tzv. Cavalieriho princip formuloval podle publikace (Kordos 194) již Archimédes ve „fyzikální" interpretaci takto:

*Jestliže do dvou nádob přitéká voda tak, že v každém okamžiku má hladina vody v obou nádobách stejný plošný obsah, pak objem vody v obou nádobách je stejný* (obr. 6).

Přitom F. B. Cavalieri žil v létech 1597–1647, kdežto Archimédes v letech 287–212 př. n. l.

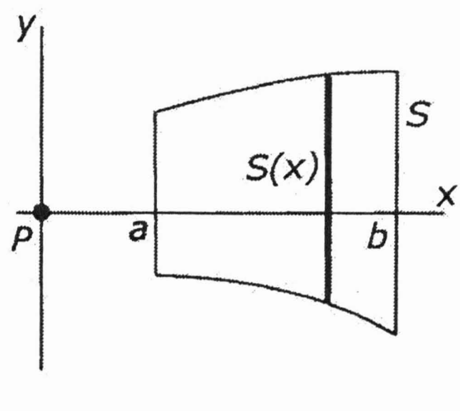



Obr. 6

Cavalieriho princip můžeme nahlížet jako názornou interpretaci věty o objemu tělesa známé z integrálního počtu např. ve tvaru:

*Je-li možné umístit těleso do prostoru tak, že je částí vrstvy určené rovinami $x = a$, $x = b$ a obsah řezu tělesa rovinou rovnoběžnou s těmito rovinami je funkcí $S(x)$ proměnné $x$, která je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak objem $V$ tohoto tělesa je dán vzorcem*

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$




Obr. 7

Odvoďme vzorec (1) pomocí integrálního počtu.
Umístíme-li jehlan nebo kužel podle obr. 8, pak platí

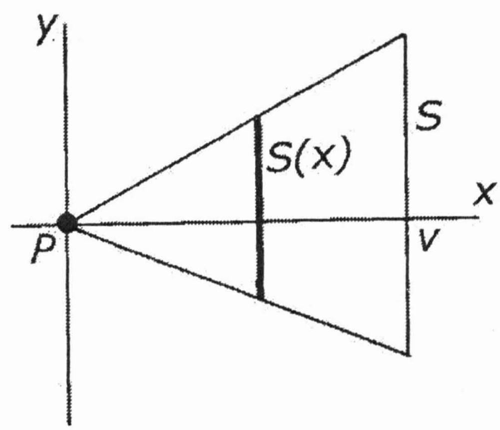
$$\frac{S(x)}{S_p} = \frac{x^2}{v^2} \tag{2}$$

neboli

$$S(x) = S_p \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

a podle vzorce (2) dostaneme

$$V = \int_0^v S_p \cdot \frac{x^2}{v^2}\,\mathrm{d}x = \frac{S_p}{v^2} \cdot \int_0^v x^2\,\mathrm{d}x = \frac{S_p}{v^2} \cdot \left[\frac{x^2}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$



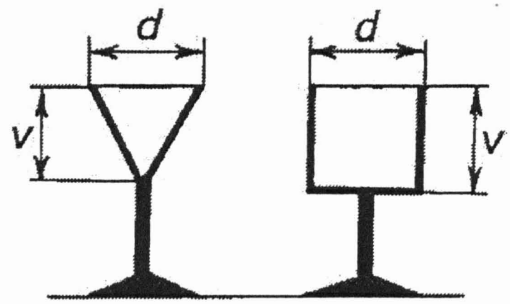

Obr. 8

Vzorec (2) se obvykle v populárních publikacích o integrálním počtu (např. v knihách (Havlíček 1963) a (Pomykalová 1995)) neuvádí. Známý vzorec pro objem rotačního tělesa

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

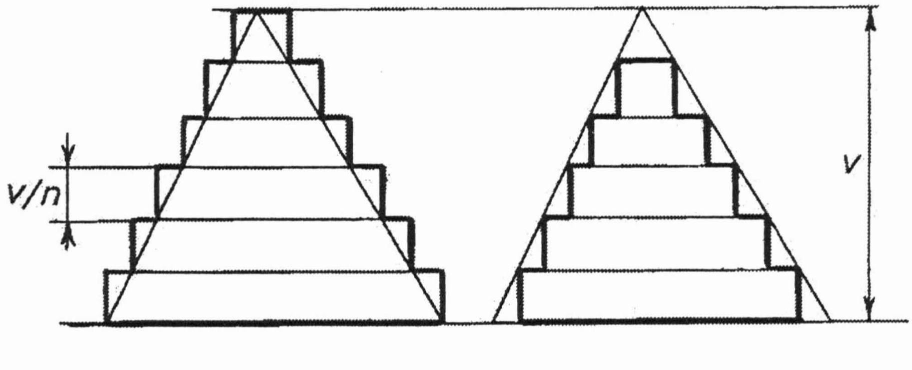
je ovšem jeho důsledkem, neboť $S(x) = \pi \cdot f^2(x)$.

Jak jinak lze odvodit vzorec (1)? Na „společenské“ úrovni „experimentálním“ ověřením, že obsah sklenky tvaru kužele se vejde do sklenky tvaru válce právě třikrát (obr. 9). To ovšem není matematický důkaz.




Obr. 9

V učebnici (Vyšín a kol.) je vzorec (1) dokázán na čtyřech stránkách výpočtem, že limity objemů „opsaných“ a „vepsaných“ hranolů podle obr. 10 se pro $n$ rostoucí nade všechny meze sobě rovnají.

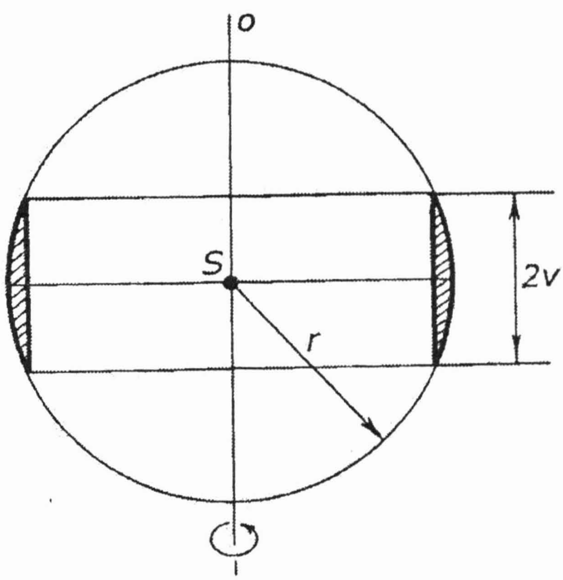



Obr. 10

„Elementárně“ odvodit vzorec (1) nelze.

**Úloha 1.** Jakou část objemu obsahuje sklenka tvaru kužele, je-li z poloviny (tj. do $\frac{1}{2}$ „hloubky“) naplněna? (Výsledek: $\frac{1}{8}$).

**Úloha 2.** Odvoďte vzorec pro objem kulového prstence, tj. tělesa, které vznikne rotací kruhové úseče podle obr. 11. Prstenec je tedy částí koule, jeho výšku označte $2v$. Můžete využít integrální počet nebo vzorec pro objem kulové vrstvy (Pomykalová 1994, s. 175, výsledek $V = \frac{4}{3}\pi v^3$).




Obr. 11

**Úloha 3.** Interpretujte výsledek úlohy 2 geometricky a vysvětlete, jak je možné, že objem kulové vrstvy nezávisí na poloměru koule.

# Literatura

[1] Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia, Stereometrie*, Prometheus, Praha, 1995.

[2] Vopěnka, P., *Rozpravy s geometrií*, Praha, Panorama, 1989.

[3] Havlíček, K., *Integrální počet pro začátečníky*, Praha, SNTL, 1963.

[4] Vyšín, J. a kol., *Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník*, Praha, SPN, 1954.

*Mgr. Václav Vlk*
*Integrovaná základní škola*
*123 45 Horní Dolní*
*e-mail: Vlk@dotazovna.cz*

Abstract

In our textbooks the proof of the volume of the pyramid is erroneous. The solution of this problem is demonstrated in connection to our school practice.

★ ★ ★

# DVA ČTVERCE V ROVNOSTRANNÉM TROJÚHELNÍKU

Emil Calda

Nedávno jsem ve svých „lejstrech", které pocházejí z doby, kdy jsem učil na gymnáziu, objevil úlohu, o které si myslím, že by bylo škoda, kdyby spolu s těmito „lejstry" zanikla. Zdá se mi, že je docela zajímavá a že by pro dobré studenty mohla být užitečná.

V rovnostranném trojúhelníku $ABC$ jsou podle obr. 1 umístěny dva čtverce. Čtverec $KLMN$ je zvolen libovolně a určuje čtverec $LPQR$, neboť vrchol $Q$ je průsečíkem strany $BC$ daného trojúhelníku a rovnoběžky s přímkou $KM$ vedené bodem $L$. Pohled na uvedený obrázek může u zvídavého čtenáře vzbudit celou řadu otázek, ale v tomto článku se budeme zabývat pouze těmito třemi: