Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 4, 229–242

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149476

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 23.–26. 3. 2014 se v Ostravě uskutečnilo celostátní kolo 63. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2014–2015.

Úlohy celostátního kola 63. ročníku matematické olympiády

Ostrava 23.–26. března 2014

1. Nechť n je celé kladné číslo. Označme všechny jeho kladné dělitele $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tak, aby platilo $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ (je tedy $d_1 = 1$ a $d_k = n$). Zjistěte všechny takové hodnoty n, pro něž platí $d_5 - d_3 = 50$ a $11d_5 + 8d_7 = 3n$. *(Matúš Harminc)*

Řešení. Rozlišíme, zda hledané n je liché či sudé.
(i) Nechť n je liché, pak i všechna d_i jsou lichá. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ plyne $d_7 \mid 11d_5$ a také $d_5 \mid 8d_7$ neboli $d_5 \mid d_7$. Z $d_5 \mid d_7 \mid 11d_5$ s ohledem na $d_7 > d_5$ máme $d_7 = 11d_5$ a po dosazení do rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme $99d_5 = 3n$ neboli $33d_5 = n$. Vidíme, že čtyři čísla 1, 3, 11 a 33 jsou dělitelé čísla n, a to dokonce jediní dělitelé menší než 50, neboť pro pátý dělitel d_5 už podle zadání platí $d_5 = d_3 + 50 > 50$. Máme tedy $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 11$, $d_4 = 33$, $d_5 = d_3 + 50 = 61$, a proto $n = 33d_5 = 33 \cdot 61 = 2\,013$. Toto číslo skutečně vyhovuje, neboť jeho nejmenší dělitelé jsou v předchozí větě vypsáni správně, navíc platí $d_6 = 61 \cdot 3$ a $d_7 = 61 \cdot 11$, takže je skutečně splněno $d_7 = 11d_5$, tedy i vše požadované.
(ii) Nechť n je sudé. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ pak plyne $2 \mid d_5$, takže rovněž $2 \mid d_5 - 50 = d_3$. Protože $d_1 = 1$ a $d_2 = 2$, nemůže být $d_3 = 3$, takže je buď $d_3 = 4$, nebo $d_3 = 2t$, kde $t > 2$. Poslední však možné není (číslo $t < d_3$ by chybělo ve výpisu nejmenších dělitelů čísla n), a proto je nutně $d_3 = 4$. Pak je ovšem $d_5 = d_3 + 50 = 54$,

a tedy $3 \mid n$, přestože 3 není mezi nejmenšími děliteli čísla n. Žádné vyhovující sudé n proto neexistuje.

Odpověď. Úloha má jediné řešení $n = 2\,013$.

Jiné řešení. Pro dělitele $d_5 < d_7$ máme $d_5 = n/x$ a $d_7 = n/y$, kde $x > y$ jsou opět kladní dělitelé čísla n. Dosazením do $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme po vydělení n rovnici $11/x + 8/y = 3$, kterou v oboru všech celých kladných čísel standardně vyřešíme, kupříkladu úpravou na součinový tvar:

$$8x = y(3x - 11) \iff 8(3x - 11) + 88 = 3y(3x - 11) \iff$$
$$\iff (3x - 11)(3y - 8) = 88.$$

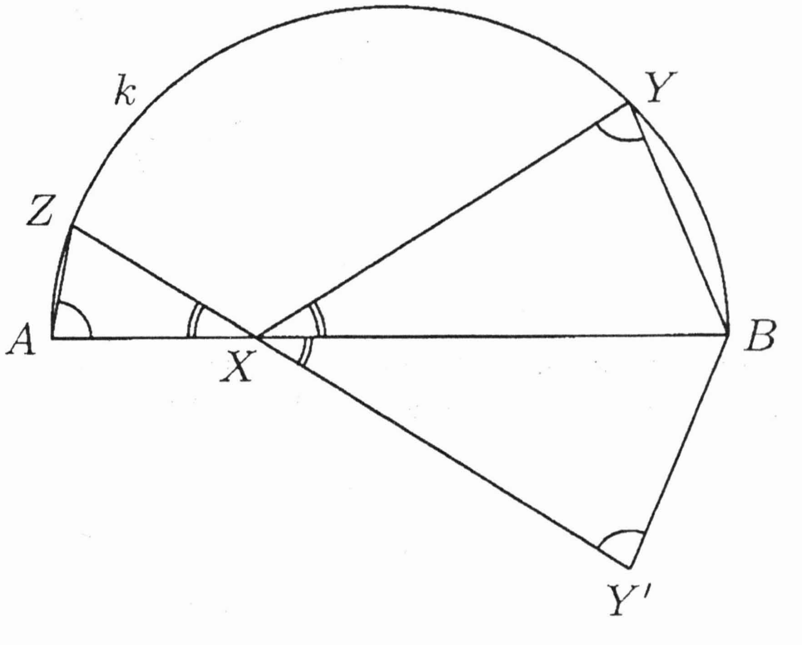
Z první upravené rovnice máme $3x - 11 > 0$, takže z poslední rovněž $3y - 8 > 0$; s přihlédnutím k $x \geq y + 1$ tudíž platí $3x - 11 \geq 3y - 8 > 0$. Pro uspořádanou dvojici činitelů z rozkladu čísla 88 proto dostáváme následující možnosti

$$(3x - 11, 3y - 8) \in \{(88, 1), (44, 2), (22, 4), (11, 8)\}.$$

Podle zbytků modulo 3 však vyhovují pouze dvojice $(88, 1)$ a $(22, 4)$, kterým odpovídají páry (x, y) rovné $(33, 3)$, resp. $(11, 4)$. Pro první z nich máme $d_5 = n/33$ (a $d_7 = n/3$), takže 1, 3, 11 a 33 jsou dělitelé čísla n, odkud stejně jako v prvním řešení dojdeme k hledanému $n = 2\,013$. Pro $(x, y) = (11, 4)$ neboli $d_5 = n/11$ a $d_7 = n/4$ má číslo n dělitele 1, 2, 4, 11, 22, 44, což je ve sporu s nerovností $d_5 > 50$.

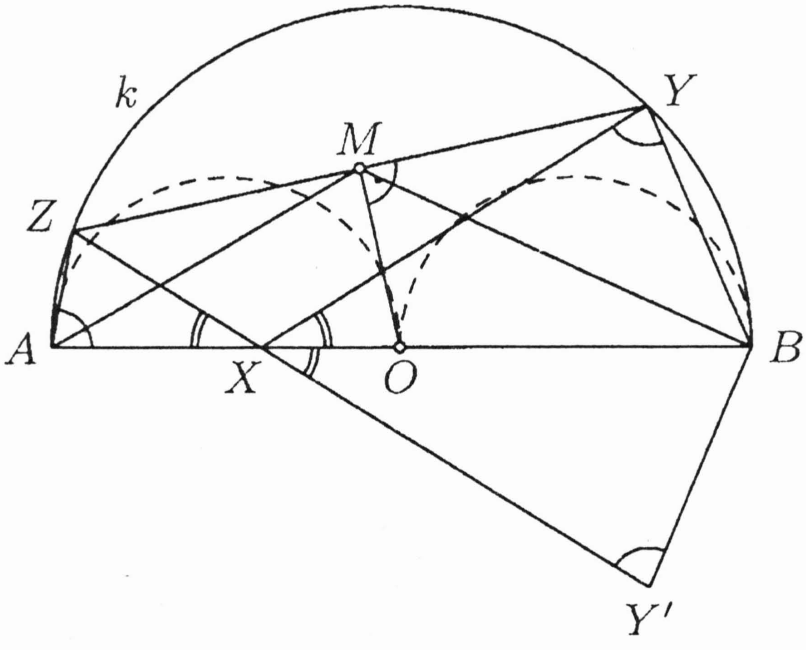
2. V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ. *(Michal Rolínek, Jaroslav Švrček)*

Řešení. Podle zadání leží body Y a Z ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB. Sestrojme obraz Y' bodu Y v souměrnosti podle přímky AB. Vzhledem k předpokládané podobnosti jsou úhly XAZ a BYX shodné (obr. 1), takže je také $|\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle BY'Z|$. Z této rovnosti ovšem podle věty o obvodových úhlech plyne, že na kružnici k opsané trojúhelníku ABZ leží nejen bod Y, ale i bod Y'. Přímka AB jakožto osa tětivy YY' tak prochází středem O kružnice k, takže tětiva AB je její průměr. Kružnice $k = ABZ$ tedy na volbě bodu Z nezáleží. Střed M její tětivy YZ proto nutně leží ve vnitřní oblasti kružnice k. Z pravých úhlů OMZ a OMY (obr. 2) vidíme, že (menší) úhly AMO a BMO jsou ostré, takže bod M nutně leží v průniku vnějších oblastí Thaletových kružnic nad průměry AO a BO. Ukažme, že obě nutné podmínky na polohu bodu M už společně vymezují hledanou množinu.



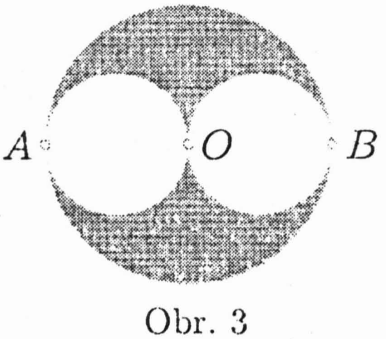
Obr. 1

Nechť M je libovolný bod ve vnitřní oblasti kružnice k, pro nějž jsou oba úhly AMO a BMO ostré (tj. bod M leží vně obou kruhů s průměry AO a BO). Pak zřejmě kolmice k přímce OM v bodě M protne kružnici k v polorovině ABM, takže na jedné z Thaletových polokružnic nad průměrem AB vytne tětivu, jejíž krajní body můžeme označit Y a Z tak, aby A, B, Y, Z bylo pořadím bodů na kružnici k. Je-li Y' obraz bodu Y na druhé polokružnici v souměrnosti podle průměru AB, pak pro průsečík X úseček AB a $Y'Z$ platí, že trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné podle věty *uu*. Důkaz je hotov.



Obr. 2

Závěr. Hledanou množinou je vnitřek kruhu s průměrem AB a středem O bez obou kruhů s průměry AO a BO (obr. 3).



Obr. 3

3. Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně", která odděluje dvě její políčka, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníčky 2×1 tak, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel. *(Michal Rolínek)*

Řešení. Dotyčných hran je $7 \cdot 8 = 56$ svislých a stejný počet vodorovných, celkem jich je $56 \cdot 2 = 112$. Při libovolném rozřezání šachovnice vznikne 32 obdélníčků 2×1, proto se každé takové rozřezání dotkne právě $112 - 32 = 80$ hran, a přispěje tak do celkového součtu číslem 80. Výsledný součet je tudíž dělitelný číslem 80, takže jeho dekadický zápis končí nulou.

4. Do kina přišlo 234 diváků. Určete, pro která $n \geq 4$ se mohlo stát, že diváky šlo rozesadit do n řad tak, aby každý divák v i-té řadě se znal právě s j diváky v j-té řadě pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. (Vztah známosti je symetrický.) *(Tomáš Jurík)*

Řešení. Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme p_k počet diváků v k-té řadě. Podmínka úlohy pro daná i a j znamená, že počet známostí mezi diváky z i-té a j-té řady je roven jp_i. Prohozením rolí čísel i a j zjistíme, že stejný počet se má rovnat číslu ip_j. Musí tedy platit $jp_i = ip_j$ neboli $p_i : p_j = i : j$. Docházíme tak k závěru, že počty p_k diváků v jednotlivých řadách nutně splňují podmínku

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = 1 : 2 : \cdots : n.$$

Ukažme, že je to i podmínka postačující, že tedy při počtech $p_k = kd$ pro vhodné celé d se rozesazení diváci mohli znát tak, aby podmínka ze zadání úlohy byla splněna. Pro $d = 1$ tomu tak jistě bude, když se budou navzájem znát všichni diváci v kině; pro obecné d stačí, aby diváci byli rozděleni do d skupin navzájem se znajících diváků a aby diváci z každé takové skupiny byli rozesazeni do jednotlivých řad stejně jako v případě $d = 1$.

Naším úkolem je tedy zjistit, pro která $n \geq 4$ existuje celé kladné číslo d vyhovující rovnici

$$d + 2d + \cdots + nd = 234 \quad \text{neboli} \quad dn(n+1) = 468.$$

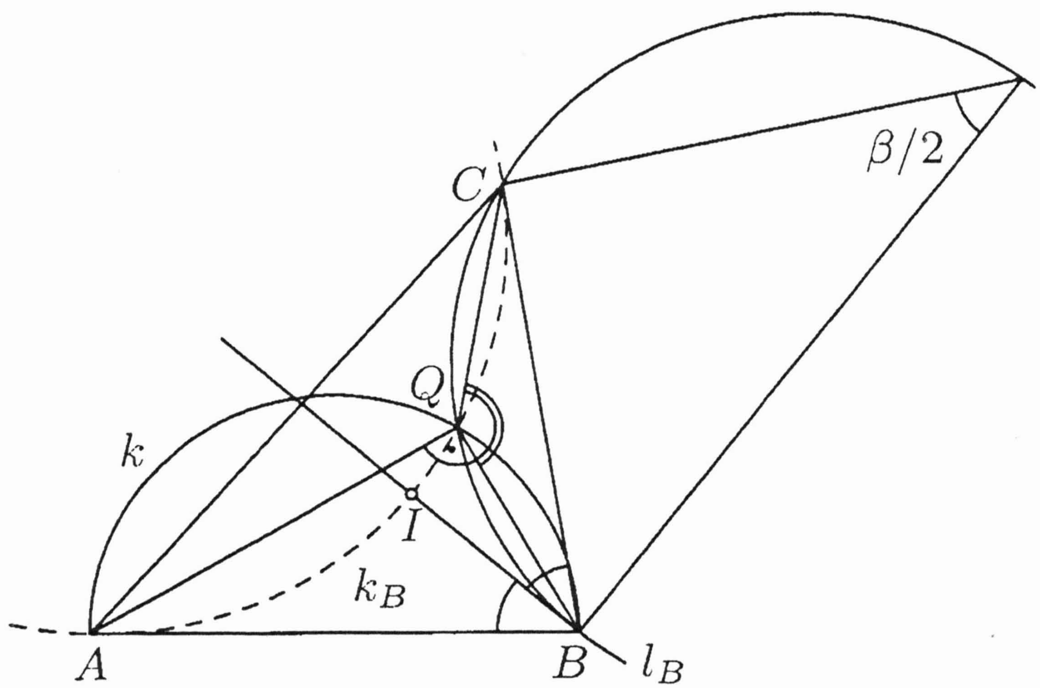
Hledáme tak všechny dělitele čísla $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$, již jsou tvaru $n(n+1)$. Protože $22 \cdot 23 > 468$, musí platit $n < 22$, tedy

$n \in \{4, 6, 9, 12, 13, 18\}$. Vidíme, že vyhovuje jedině $n = 12$ (s příslušným $d = 3$).

Odpověď. Popsaná situace mohla nastat jedině při rozesazení diváků do 12 řad.

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme k kružnici s průměrem AB. Kružnice, která se dotýká osy úhlu BAC v bodě A a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě P, $P \neq A$. Kružnice, která se dotýká osy úhlu ABC v bodě B a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě Q, $Q \neq B$. Dokažte, že průsečík přímek AQ a BP leží na ose úhlu ACB. *(Peter Novotný)*

Uvažované kružnice APC a BQC označme po řadě l_A, l_B a všimněme si třeba druhé z nich (obr. 4, úhly trojúhelníku ABC značíme obvyklým způsobem).



Obr. 4

Vysvětleme, že skutečně platí, co na obrázku vidíme. Především bod Q zřejmě leží v polorovině BCA, neboť pro body X

tamního oblouku BC kružnice l_B se úhel AXB zvětšuje od (ostrého) úhlu γ po (tupý) úhel $180^\circ - \frac{\beta}{2}$, takže nabývá uvnitř oblouku hodnoty 90°. Protože úsekový úhel příslušný tomuto oblouku BC kružnice l_B je roven $\frac{\beta}{2}$, je $|\sphericalangle BQC| = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$. Odtud $|\sphericalangle AQB| + |\sphericalangle BQC| = 270^\circ - \frac{\beta}{2} > 180^\circ$. Proto bod Q leží v polorovině ACB, a tudíž i uvnitř trojúhelníku ABC, konvexní úhel AQC má tedy velikost $90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Označíme-li I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bude mít úhel AIC stejnou velikost, $|\sphericalangle AIC| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. To ovšem znamená, že bod Q leží na stejném oblouku AC kružnice $k_B = ACI$ jako bod I, takže přímka AQ je chordálou kružnic k a k_B.

Druhá uvažovaná přímka BP je analogicky chordálou kružnic k a $k_A = BCI$. Průsečík obou přímek AQ a BP má tedy stejnou mocnost ke kružnicím k_A a k_B, proto leží na jejich chordále, kterou je přímka CI, tedy osa úhlu ACB. Důkaz je hotov.

Poznámka. Ještě jedním způsobem vysvětlíme, proč bod Q leží v polorovině BCA. Průsečík Q kružnic k a l_B zřejmě musí ležet v polorovině ABC v úhlu omezeném tečnami obou kružnic v bodě B. Přitom vrchol C ostroúhlého trojúhelníku ABC i střed S_B kružnice l_B zřejmě leží vně kruhu omezeného kružnicí k. V trojúhelníku BS_BC leží sice část kružnice k, ale s výjimkou bodů B a C tam určitě neleží žádný jiný bod kružnice l_B. Z toho je patrné, že bod Q musí ležet v polorovině BCA.

6. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

(Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

Řešení. Snadným dosazením zjistíme, že dokazovaná nerovnost přejde v rovnost, platí-li aspoň jedna z rovností $a = 0$, $b = 0$ nebo $a = b$. Z dalšího postupu vyplyne, že jsou to jediné případy rovnosti.

S ohledem na symetrii budeme předpokládat, že platí $a > b > 0$, a postupnými ekvivalentními úpravami dokážeme ostrou nerovnost ze zadání, kterou rovnou zapíšeme zbavenou zlomků:

$$a\sqrt{a^2+1}\sqrt{ab+1}+b\sqrt{b^2+1}\sqrt{ab+1} > (a+b)\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}.$$

Nyní roznásobíme pravou stranu zastoupeným součtem $a+b$ a po přeskupení výrazů vytkneme společné činitele:

$$a\sqrt{a^2+1}\big(\sqrt{ab+1}-\sqrt{b^2+1}\big) > b\sqrt{b^2+1}\big(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{ab+1}\big)$$

Na levé i pravé straně vystupují rozdíly odmocnin, rozšíříme je součty těchže odmocnin na zlomky:

$$a\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1}+\sqrt{b^2+1}} > b\sqrt{b^2+1}\cdot\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}}.$$

Obě strany teď můžeme vydělit kladným číslem $ab(a-b)$; po následném odstranění zlomků dostaneme nerovnost

$$\sqrt{a^2+1}\big(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}\big) > \sqrt{b^2+1}\big(\sqrt{b^2+1}+\sqrt{ab+1}\big),$$

jejíž platnost již plyne porovnáním odmocnin na stejných místech obou stran (díky předpokladu $a > b$ totiž platí $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1}$).

Jiné řešení. Tentokrát z našeho postupu vyloučíme pouze případy $a = 0$ a $b = 0$, v nichž je ovšem dokazovaná nerovnost triviální. Budeme tedy předpokládat, že čísla a a b jsou kladná a zapíšeme pro ně Cauchyovu nerovnost

$$\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}\right)(au+bv) \geq (a+b)^2$$

s kladnými koeficienty $u = \sqrt{b^2+1}$ a $v = \sqrt{a^2+1}$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right) \geq (a+b)^2. \quad (1)$$

Druhý činitel z levé strany (1) odhadneme *shora* podle jiné Cauchyovy nerovnosti takto:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a}\sqrt{ab^2+a}+\sqrt{b}\sqrt{a^2b+b}\le$$
$$\le\sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b}=$$
$$=\sqrt{a+b}\sqrt{(a+b)(ab+1)}=(a+b)\sqrt{ab+1}.$$

Pro první činitel z levé strany (1) tak dostáváme

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\ge\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}}\ge\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}},$$

což jsme měli dokázat. Protože v první vypsané Cauchyově nerovnosti nastane rovnost, právě když platí $u=v$ neboli $\sqrt{b^2+1}=\sqrt{a^2+1}$ čili $a=b$, je poslední rovnost třetím a posledním případem (kromě zmíněných případů $a=0$ a $b=0$), kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

Jiné řešení. Vyloučíme z úvah zřejmé případy $a=0$, $b=0$, $a=b$ a dokazovanou ostrou nerovnost ekvivalentně upravíme na tvar

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

Levá strana je zřejmě levou stranou Jensenovy nerovnosti

$$pf(\alpha)+qf(\beta)>f(p\alpha+q\beta) \tag{2}$$

s kladnými koeficienty $p=a/(a+b)$ a $q=b/(a+b)$ (jež jak víme, musejí splňovat podmínku $p+q=1$) pro funkci $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v bodech $\alpha=b^2+1$ a $\beta=a^2+1$. Protože funkce f je v oboru kladných čísel ryze konvexní[9] a body α, β jsou různé díky předpokladu $a\ne b$, Jensenova nerovnost (2) platí. Zbývá se tedy přesvědčit, že i její pravá strana se rovná pravé straně upravené

[9] Graf funkce $y=x^{-\frac{1}{2}}$ je dobře znám ze středoškolských učebnic.

nerovnosti z úvodu řešení. To je snadné:

$$f(p\alpha + q\beta) = f\left(\frac{a}{a+b}(b^2+1) + \frac{b}{a+b}(a^2+1)\right) =$$
$$= f\left(\frac{a + ab^2 + b + a^2b}{a+b}\right) = f(ab+1) = \frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

Výsledková listina celostátního kola 63. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Pavel Turek	5/8 G Olomouc-Hejčín	**41**
2.	Filip Bialas	5/8 G Opatov, Praha 4	**34**
3.	Radovan Švarc	7/8 G Česká Třebová	**33**
4.	Tomáš Novotný	8/8 G Česká Lípa	**31**
5.	Marian Poljak	6/8 G Jakuba Škody, Přerov	**30**
6.	Vojtěch Dvořák	7/8 G J. Gutha-Jark., Praha 1	**26**
7.	Viktor Němeček	7/8 G Jihlava, J. Masaryka 1	**25**

Další úspěšní řešitelé:

8.	Martin Raszyk	4/4 G Karviná	**22**
9.	Martin Hora	7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	**22**
10.	Matěj Konečný	7/8 G Č. Budějovice, Jírovcova	**22**
11.	Jiří Guth Jarkovský	8/8 G Č. Budějovice, Jírovcova	**21**
12.	Václav Rozhoň	7/8 G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	**17**
13.	Karolína Kuchyňová	3/4 G Matyáše Lercha, Brno	**16**
14.	Jakub Svoboda	8/8 G Havířov, Komenského	**16**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2014–2015

Kategorie A

A-I-1. Je dáno přirozené číslo n. Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5. *(Jaroslav Zhouf)*

A-I-2. Je dán trojúhelník ABC, v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M. Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímek CX a BY označme Z. Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku. *(Michal Rolínek)*

A-I-3. Najděte všechna celá čísla $k \geq 2$, pro která existuje k-prvková množina M celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z M je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z M. *(Jaromír Šimša)*

A-I-4. Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

a) Dokažte rovnost $x + y + z = 4$.

b) Najděte nejmenší interval $\langle a, b\rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x, y, z) vyhovující předpokladům úlohy.

(Jaromír Šimša)

A-I-5. V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L. Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici.

(Josef Tkadlec)

A-I-6. Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?

(Jaromír Šimša)

KATEGORIE B

B-I-1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$|x - 5| + |y - 9| = 6,$$
$$|x^2 - 9| + |y^2 - 5| = 52.$$

(Pavel Calábek)

B-I-2. Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery. *(Ján Mazák)*

B-I-3. V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC. V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE. Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu. *(Michal Rolínek)*

B-I-4. Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$? *(Eva Patáková)*

B-I-5. Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$. *(Jaroslav Švrček)*

B-I-6. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost. *(Jaroslav Švrček)*

KATEGORIE C

C-I-1. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+4)^2} &= 4 - y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x + 8. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

C-I-2. Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení. *(Tomáš Jurík)*

C-I-3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.

(Michal Rolínek)

C-I-4. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

(Jaroslav Zhouf)

C-I-5. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2 010 a jejich největší společný dělitel je 2 014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.

(Jaromír Šimša)

C-I-6. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky. *(Josef Tkadlec)*