František Kuřina

QED (LATINSKY) $\neq$ QED (ANGLICKY)

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 4, 206–217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149474`

QED (LATINSKY) $\neq$ QED (ANGLICKY)

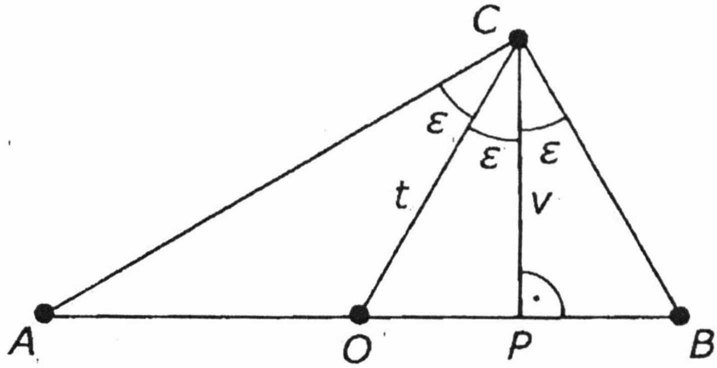
FRANTIŠEK KUŘINA

1. Úvod

Podivný název tohoto článku je důsledkem rozpaků jak článek nazvat. Uvažoval jsem o těchto možnostech: Příběh jedné úlohy, Důkaz je záležitost intuice, Jak to dokázat?, Zrod a život jednoho problému, Hledání a nalézání, ... Nakonec jsem se rozhodl pro nadpis uvedený v titulku. Většina čtenářů (klasických) matematických spisů ví, že zkratka QED bývala uvedena na závěr důkazu matematické věty a znamená „quod erat demonstrandum“, tedy „což bylo dokázati“. V angličtině se zkratka QED někdy používá pro „question, explore, discover“, tedy „tázat se, zkoumat, objevit“. Dva významy zkratky QED tak poukazují na dva přístupy k matematice: akceptování předvedeného důkazu na straně jedné a hledání a nalézání cesty k matematickému poznatku (tedy i k důkazu věty) na straně druhé. Jsem přesvědčen, že do vyučování matematice patří nejen pochopení důkazu, ale i hledání a nalézání cesty – a to nejen k důkazu, ale i k definici pojmu nebo formulaci věty či postupu. Problematiku budu ilustrovat na příkladu úlohy, s níž jsem se v posledních několika letech příležitostně setkával. Bezprostředním podnětem k napsání článku však byl příspěvek Emila Caldy z r. 2013.

2. Zrod problému

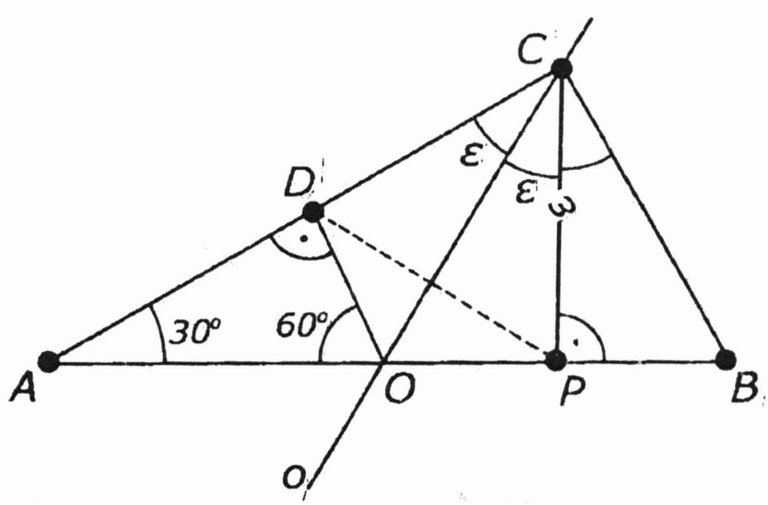
Na cvičení z geometrie jsem se studenty učitelství řešil úlohu 1. *Dokažte: Dělí-li těžnice a výška z téhož vrcholu vnitřní úhel trojúhelníku na tři shodné úhly, je tento trojúhelník pravoúhlý* (obr. 1).



Obr. 1

Úloha není obtížná. Ačkoliv ji lze řešit různými způsoby (čtenáři nechť si to zkusí), zde uvedu jen jedno řešení.

Označme $|AB| = c$. Pak podle obr. 1 platí $|AO| = |OB| = \frac{c}{2}$, $|OP| = |PB| = \frac{c}{4}$, neboť trojúhelníky OPC a BPC jsou shodné. V osové souměrnosti podle osy $o = OC$ je obrazem bodu P bod D strany AC (obr. 2) a v pravoúhlém trojúhelníku AOD je $|AO| = \frac{c}{2}$, $|PO| = |DO| = \frac{c}{4}$ a tedy úhel $\sphericalangle OAD$ má velikost $30°$. To ovšem znamená, že úhel $\sphericalangle ACP$ má velikost $60°$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý.

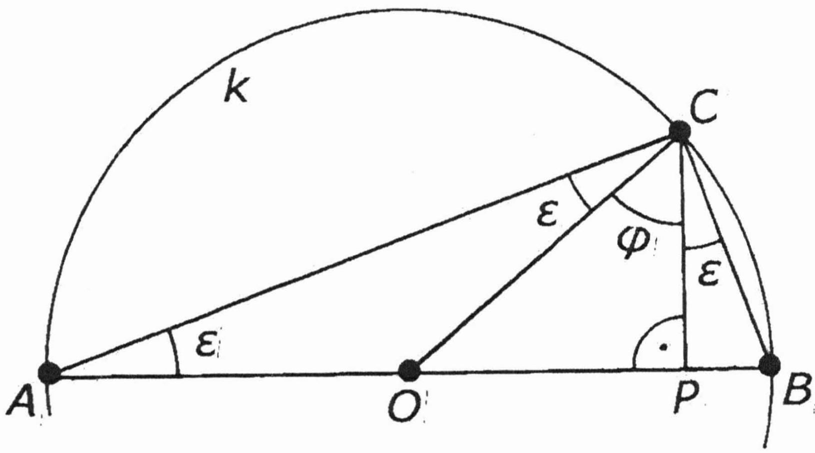


Obr. 2

Sotva jsme důkaz dokončili, přihlásil se student s pochybnostmi o jeho správnosti: tvrzení prý neplatí. Argumentoval následujícím způsobem.

Trojúhelník ABC na obr. 3 je pravoúhlý a těžnice a výška k jeho přeponě nedělí jeho pravý úhel na tři shodné části. Takovýto trojúhelník lze sestrojit např. takto:

Zvolím na kružnici k s průměrem AB bod C tak, že úhel $\varepsilon = \sphericalangle BAC$ má velikost např. 20°. Úhly u vrcholu C pak mají v označení podle obrázku po řadě velikost $\varepsilon = 20°$, $\varphi = 50°$, $\varepsilon = 20°$.



Obr. 3

Tento student nerozlišoval větu a větu obrácenou. Snad si po tomto setkání bude rozdíl náležitě uvědomovat.

Všimneme-li si, že v úloze 1 nebyl výsledkem libovolný pravoúhlý trojúhelník, ale trojúhelník s ostrými úhly 30° a 60°, zdá se, že předpoklady úlohy byly příliš „silné". Tak se dostáváme k úloze 2.

Dokažte: V trojúhelníku ABC ($|AC| \neq |BC|$) označme CO těžnici a CP výšku z vrcholu C (obr. 3). *Jsou-li úhly $\sphericalangle ACO$ a $\sphericalangle PCB$ shodné, a je-li výška CP částí úhlu $\sphericalangle ACB$, je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB.*

(Označení z obr. 3 budeme v celém článku zachovávat.)

Úlohu jsem řešil s různými skupinami studentů a učitelů (viz např. Kuřina, 2003) (Czeskie zadanie, 2004) a v tomto příspěvku uvádím ukázky několika přístupů k ní. Mým cílem je doložit, jak jsou jednotlivá řešení ovlivněna prvotním nápadem, který ovšem nebývá plodem logiky, ale spíše intuice. V naší geometrické tradici reprezentované např. Janem Vyšínem (1908–1983) se postup řešení úlohy vykládá jako posloupnost čtyř kroků (rozbor, konstrukce, důkaz, diskuse) a skutečnost, že základem řešení úlohy je „šťastný“ nápad, se příliš nezdůrazňuje. Tomu odpovídají např. formulace: *vlastní řešení je deduktivní úvaha, jež má za cíl vyhledat jisté objekty* (Vyšín, 1962, s. 144) a rozbor má tuto logickou strukturu: *existuje-li útvar, který máme sestrojit, pak má tyto vlastnosti, hledáme tedy rozborem nutné podmínky* (Vyšín, 1965, s. 190). Postupujeme tak v souladu s lidovou moudrostí: *Chytrý začíná od konce, hloupý končí na začátku.*

Řešení problému je ovšem tvůrčí myšlení, pro něž neexistují žádné návody.

Významný francouzský matematik *Jacques Hadamard* (1865–1963) charakterizoval takové myšlení fázemi (Hadamard, 1973):

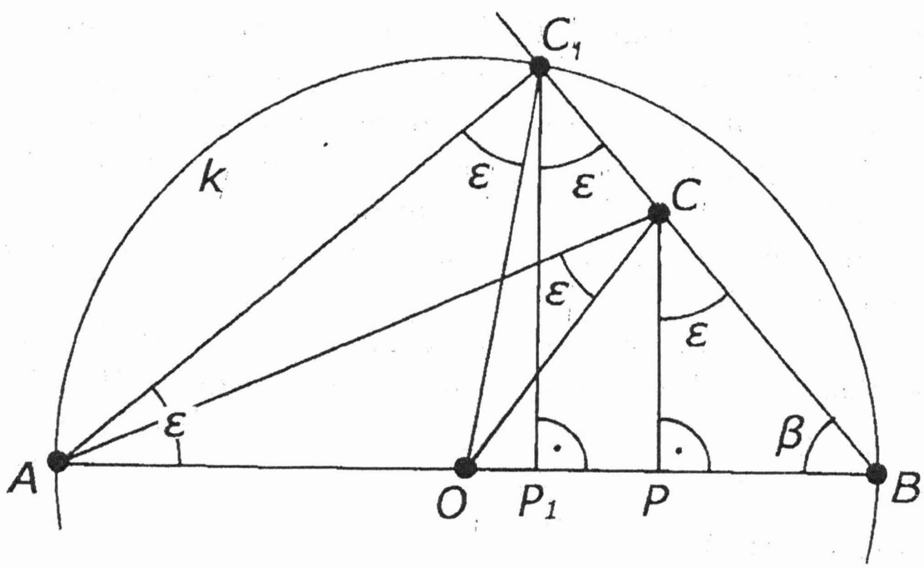
1. PREPARACE,
2. INKUBACE,
3. ILUMINACE,
4. VERIFIKACE.

V přípravné fázi (1) jde o studium souvislostí a poznávání vztahů. Toto poznání musí uzrát v duševním světě řešitelů (fáze 2), aby, často po delší době a usilovné duševní práci, přišel „spásný“ nápad (fáze 3), který vede k řešení problému. Takové řešení může přirozeně mít intuitivní charakter a je třeba je prověřit důkladnou logickou analýzou (fáze 4).

Při řešení úloh ve škole „shrnujeme“ přípravu, zrání a zrození nápadu do tzv. *rozboru.* Příprava řešení úlohy snad bývá někdy vytvořena předcházející výukou, na zrání problému nebývá obvykle ve škole čas a nelze se proto divit, že rozbor je někdy nahrazen návodem. Je-li řešení problémů uměním, jak se někdy říká, nelze je patrně vměstnat do čtyř fází.

3. Řešení úlohy 2

Pouze dva řešitelé, vzdálení v prostoru a čase, se po neúspěšných pokusech řešit úlohu přímo, rozhodli pro nepřímý postup. Byl to polský matematik *Ryszard Pagacz* a můj nedávno zesnulý kolega *Jaromír Krys*. Popišme jejich jednoduchý, leč důmyslný postup.

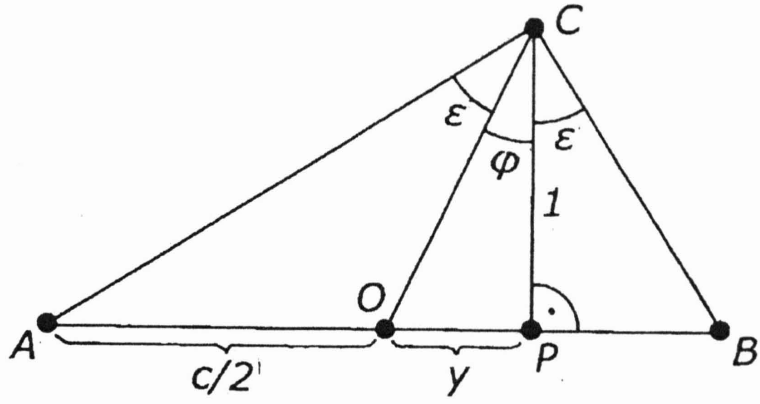


Obr. 4

Kdyby trojúhelník ABC splňující podmínky úlohy nebyl pravoúhlý, protínala by polopřímka BC kružnici s průměrem AB v bodě C_1 různém od bodu C (obr. 4). Protože je $AC_1 \perp BC_1$ a $|AO| = |OC_1|$, jsou všechny úhly označené na obrázku ε shodné. Body A, C_1, C a O leží tedy na kružnici s průměrem AC (z bodů C_1 a C je vidět úsečka AO pod týmž úhlem ε, $AC_1 \perp BC$). To by ovšem znamenalo, že $OC \perp AO$ a tedy $|AC| = |BC|$, což je ve sporu s předpokladem úlohy. Trojúhelník ABC musí být pravoúhlý.

Tři autoři řešili úlohu početně: *Emil Calda* ve zmíněném článku z r. 2013 a *Eva Patáková*. Jejich řešení jsou téměř totožná.

Zcela jinak počítala maďarská autorka *Mária Bakó*. Uveďme její postup.



Obr. 5

V označení podle obr. 5 platí:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{c}{2} - y, \quad \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) = y + \frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y.$$

Aplikujeme-li na tyto výsledky vzorec

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

dostáváme pro y rovnici

$$y + \frac{c}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{1 - \frac{yc}{2} + y^2}.$$

Pro jejíž kořen y platí:

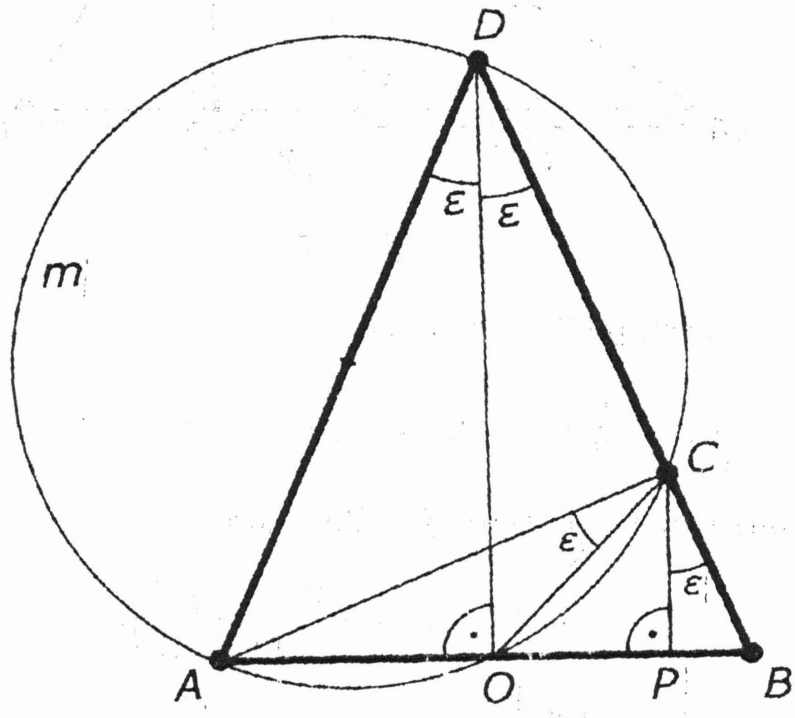
$$y^2 = \frac{c^2}{4} - 1.$$

To ovšem znamená podle věty obrácené k větě Pythagorově pro trojúhelník OPC: $|OC| = \frac{c}{2}$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Řada řešení úlohy vznikla na základě vhodného doplnění obrázku. Uvedu zde tři příklady.

Aart Goddjin z Freudenthalova ústavu v Utrechtu prodloužil stranu BC trojúhelníku ABC do bodu D tak, aby $|AD| = |BD|$

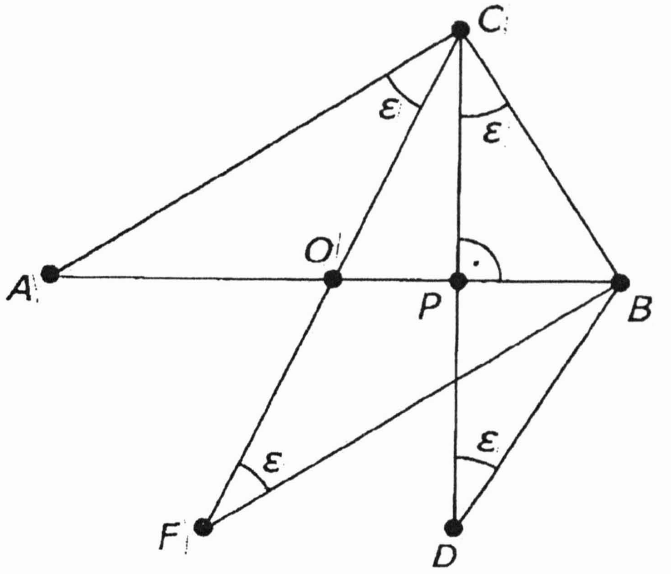
(obr. 6). Z konstrukce a z předpokladu úlohy plyne, že úhly označené ε jsou shodné a kružnice m opsaná pravoúhlému trojúhelníku AOD má průměr AD a je tedy $AC \perp BC$.



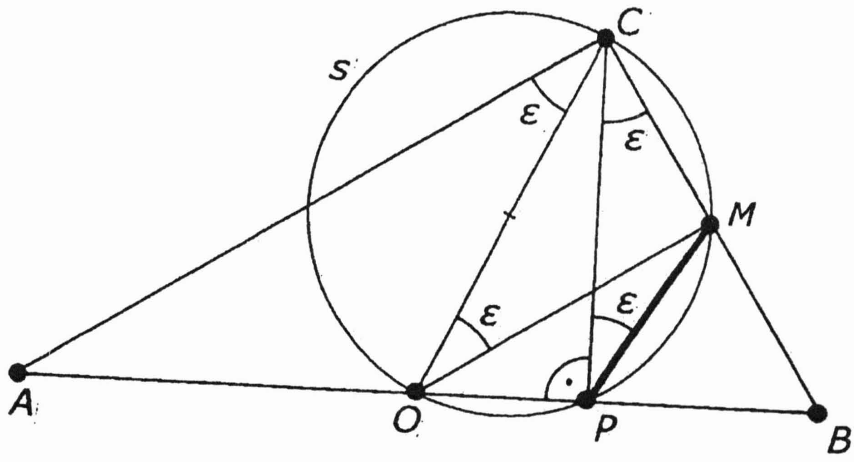
Obr. 6

Milan Hejný z Univerzity Karlovy v Praze sestrojil nejdříve obraz D bodu C ve středové souměrnosti se středem P a obraz F téhož bodu ve středové souměrnosti se středem O (obr. 7). To ovšem znamená shodnost úhlů označených ε a kružnice opsaná trojúhelníku FCB prochází i bodem D. Její střed leží na osách úseček DC a FC, tedy v bodě O. To znamená, že $|OC| = |OB|$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Jaroslav Švrček z Palackého univerzity v Olomouci sestrojil střed M strany CB trojúhelníku ABC a všiml si, že úhly označené na obr. 8 ε jsou shodné (OM je střední příčka trojúhelníku ABC, M je střed přepony pravoúhlého trojúhelníku BCP). Kružnice s, která prochází body C, M, P, prochází i bodem O. Protože je úhel $\sphericalangle CPO$ pravý, je pravý i úhel $\sphericalangle OMC$ a $AC \perp BC$.



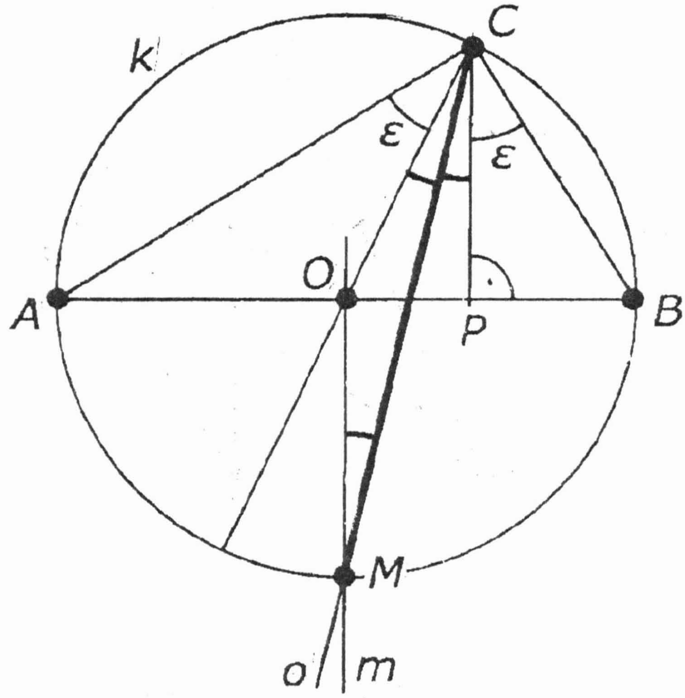
Obr. 7



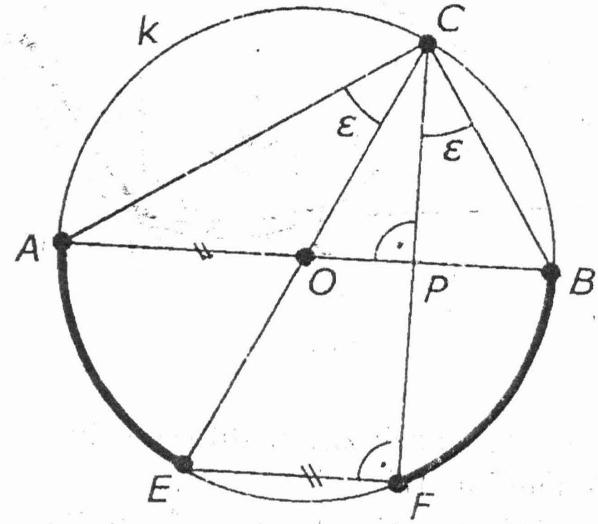
Obr. 8

Další tři řešení vycházejí z nápadu sestrojit nejdříve kružnici k opsanou trojúhelníku ABC.

Karel Horák z Matematického ústavu AV České republiky sestrojil osu m strany AB a osu o úhlu $\sphericalangle ACB$ (obr. 9). Tyto osy se protínají, jak snadno nahlédneme, v bodě kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Označme tento bod M. Protože jsou přímky

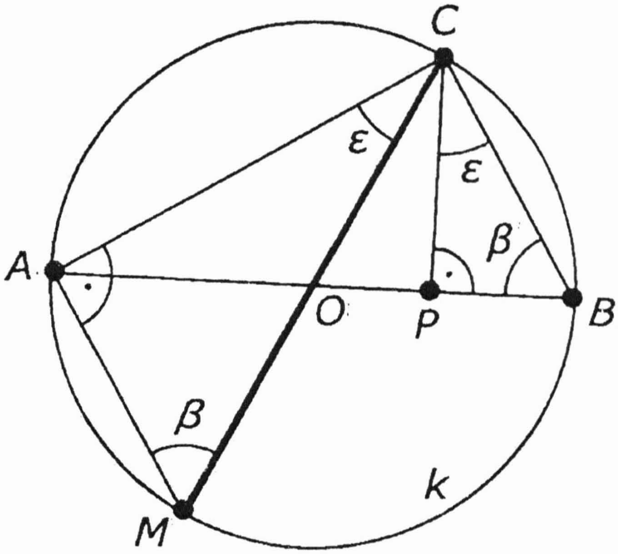


Obr. 9



Obr. 10

CP a MO rovnoběžné, jsou úhly $\sphericalangle PCM$, $\sphericalangle OMC$ shodné a v důsledku shodností úhlů ε jsou tyto úhly shodné i s úhlem $\sphericalangle OCM$. Trojúhelník COM je tedy rovnoramenný. Protože střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na přímce m, je jím v důsledku rovnosti $|OM| = |OC|$ střed O strany AB a trojúhelník ABC je pravoúhlý.



Obr. 11

Já jsem si uvědomil, že ze shodností úhlů ε vyplývá shodnost kružnicových oblouků AE a BF (obr. 10) a tedy rovnoběžnost přímek AB a EF. Trojúhelník CEF je tedy pravoúhlý a střed O kružnice k jemu opsané, která je i kružnicí opsanou trojúhelníku ABC, je středem úsečky AB a tedy $AC \perp BC$.

Polský autor *Stefan Turnau* sestrojil průsečík M přímky OC s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC (obr. 11). Vzhledem ke shodnosti úhlů β příslušných kružnicovému oblouku AC jsou trojúhelníky CPB a CAM podobné a tedy pravoúhlé. Protože k je kružnicí opsanou i trojúhelníku ACM, je střed O strany AB i středem kružnice k a trojúhelník ABC má u vrcholu C pravý úhel.

Řešení, které spočívá na konstrukci pravoúhlého trojúhelníku ACM (v označení podle obr. 11) našla i Eva Pataková; její řešení je však složitější.

Stěží lze patrně najít řešení jednodušší, než je řešení Turnaovo.

V poněkud jiných souvislostech se problematikou řešení úloh zabývám v knize (Kuřina, 2011).

4. Závěry

Na jednoduché geometrické úloze jsem se snažil ukázat různé možnosti řešení problému. Těžko lze odhadnout, co bylo příčinou volby metody nebo nápadu začít řešit úlohu tím nebo oním doplněním obrázku. Cesty k řešení snad libovolného problému, k zavedení pojmu, k důkazu věty, ... mohou být rozličné. Všímat si takových možností ve vyučování je možné a užitečné na každé úrovni a na každém typu škol. Fráze „úloha se řeší", „pojem se definuje", „věta se dokazuje" ... by se neměly v dobrém matematickém vzdělávání vyskytovat. Žádný z těchto postupů není dán, ale je výsledkem hledání, které bychom měli v maximální možné míře provozovat ve škole. Můžeme se tak snažit přiblížit se k charakteristice matematiky, jak ji formuloval americký matematik *Paul Lockhard*: *Existuje-li něco jako jednotící estetický princip v matematice, pak je to krása v jednoduchosti* (Lockhard, 2009, s. 24). Vyučování matematice by mělo být podle mého názoru prolnuto spíše anglickým než latinským QED.

Pokuste se najít vlastní řešení naší úlohy 2. Redakce časopisu *Učitel matematiky* ráda vaše originální postupy otiskne.

Literatura

[1] Calda, E., Jak se také dá poznat pravoúhlý trojúhelník, *Učitel matematiky* **21**(3), 159–161, 2013.

[2] *Czeskie zadanie*, Matematyka, LVII, 5, 3-6-39, 2004.

[3] Hadamard, J., *The Mathematician's Mind*, Princeton Academic Press, 1973.

[4] Kuřina, F., *Geometrical Thinking*, Bellaria: CERME 3, 2003.

[5] Kuřina, F., *Matematika a řešení úloh*, České Budějovice, Jihočeská univerzita, 2011.

[6] Vyšín, J., *Metodika řešení matematických úloh*, Praha, SPN, 1962.

[7] Vyšín, J. a kol., *Geometrie pro pedagogické fakulty I.*, Praha, 1965.

[8] Lockhart, P., *Mathematician's Lament*, Bellevue Literary Press, NY, 2009.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové 3
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz

ABSTRACT

The goal of the article is to show the origin and development of proofs. Different approaches to a geometrical problem with triangle are demonstrated. The beginning of solution of the problem is not only in logic, but also in intuition and imagination.