Jan Fiala

Motivace žáků k učení se pravděpodobnosti

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 2, 65–85

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149460`

MOTIVACE ŽÁKŮ K UČENÍ SE PRAVDĚPODOBNOSTI

JAN FIALA

Úvod

Pojem „motivace“ je oprávněně jedním z hlavních faktorů učení, a proto je na něj zaměřena pozornost mnoha odborníků a konferencí. Autory článků a monografií o motivaci jsou především odborníci z převážně vysokoškolských institucí, ale i laici praktici, jejichž mnohaleté zkušenosti z praxe jsou bezesporu nezastupitelné. Rozpracovanost širokého tématu motivace vede k různým přístupům, metodám a formám jak žáky motivovat, přitom každé z těchto cest lze jistě přiznat své opodstatnění a přínos při řešení problémů učení. Obtížný úkol výběru té „správné“ motivace je však již na učiteli samém. Přitom ta či ona forma motivace není podle našeho názoru vždy univerzálně použitelná. To potvrzuje i pojetí motivace autory pedagogického slovníku jako „souhrn vnitřních a vnějších faktorů, které [...] vzbuzují, aktivují, dodávají energii lidskému jednání a prožívání [...]“ ([13], s. 127f). Podobně se mluví o motivaci i v německé odborné literatuře (například [18], s. 131f). V článku lze nalézt motivy v oblasti pravděpodobnosti, které autor čerpal z německých školních učebnic[1] a z odborných publikací[2] předních německých didaktiků matematiky.

Činnostní učení jako forma motivace v matematice

Motivovat žáka je v současné době jedním z nejobtížnějších úkolů učitelů matematiky na všech stupních škol a nejen v oblasti pravděpodobnosti. Zájem žáků o matematiku soustavně klesá, což se

---

[1] Např. [1], [3], [4], [9], [15], [17].
[2] Např. [5], [8], [18], [19].

projevuje i na úrovni výsledků vzdělávání v mezinárodních srovnáních. Učiteli nezbývá než hledat vhodné motivy do své výuky, jako například nezvyklé učební pomůcky, obsahově atraktivní slovní úlohy, či nové metody a formy práce apod. Jako velmi vhodná a efektivní se autoru osvědčila inspirace v cizině, konkrétně v Německu a Rakousku. Didakticky obzvláště cenné jsou při motivaci žáků takové pohnutky, motivy, které by mohly žáky dovést k novým poznatkům a dovednostem prostřednictvím nějaké vědomé, smysluplné, organizované činnosti. Při tzv. činnostním učení je totiž žák výrazně zapojen do vlastního procesu učení, cítí svou odpovědnost, aktivně hledá postup řešení daného problému a odpovědně usuzuje o správnosti nalezeného výsledku. Nejde přitom o to, aby žák jen vykonával zadanou činnost, ale aby ji především hluboce prožíval, aby mu dodávala energii k dalšímu učení, k hledání výsledku, aby poskytla překvapení novou skutečností apod. Při činnostním učení pracuje žák nejčastěji sám nebo ve dvojici, někdy jsou vhodné i skupinové formy práce. V textu věnujeme pozornost rozvoji vnitřní motivace žáka i faktory bez činnostní povahy, které ji ale mohou významně podnítit. Vybrané motivy považujeme za „správné“, pokud žák získá dojem, že poznatek a dovednost jsou pro jeho budoucí život smysluplné, využitelné, potřebné, tedy nezbytné; v duchu naplnění tolik potřebné „kontextualizace“ ([7], s. 368) učební činnosti žáků. I. SAXL v této souvislosti výstižně vybízí: „*Maximum iniciativy je třeba přenést na žáky a přesvědčit je, že data jsou o nich a že se jejich prostřednictvím něco dovídají o sobě i o svých zájmech a hrách.*“ ([15], s. 44)

Matematické dílny a další podpora učitelů

Velkou pomocí jsou začínajícím učitelům matematiky v Německu tzv. „matematické dílny“ zřízené dosud při mnoha vysokoškolských institucích, které připravují budoucí učitele. Úkolem matematické dílny (*mathematische*, *mathematikdidaktische Werkstatt*, nebo *Mathe-Werkstatt* aj.) je poskytnout učiteli širokou nabídku učebních pomůcek, didaktické literatury a dalších materiálů (například matematického software) pro plánování výuky. Jde o speciálně zařízenou místnost, kterou mohou studenti a učitelé navštěvovat během studia i po jeho dokončení, prakticky zde při seminářích nacvičují metodiku vyučování matematice a mají možnost si zapůjčit potřebné materiály. Dílnu navštěvují také učitelé z praxe při celoživotním vzdělávání. Příkladem může být matematicko-didaktická dílna na Pedagogické vysoké škole v Heidelbergu ([10]).

Běžnou osvědčenou pomocí začínajícím učitelům jsou hospitace ve výuce kolegů. Využít partnerství škol a navštívit výuku například na některém gymnáziu v Německu lze samozřejmě vřele doporučit.

Konečně připomeňme také alespoň jednu z mnoha institucí, které v Německu a Rakousku aktivně podporují nejen začínající učitele při své práci. V oblasti stochastiky (pravděpodobnosti a statistiky) nabízí své služby Spolek pro podporu výuky stochastiky ve školách (*Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts*).[3] Velkou inspirací je mnoho časopisů s matematickým zaměřením, například časopis Stochastika ve škole (*Stochastik in der Schule*), vydávaný výše zmíněným spolkem.

Popularizace matematiky jako významná forma motivace žáků v Německu

V současné době je motivace žáků k učení se matematice velmi silně ovlivněna přístupem jejich vnějšího okolí. Obraz matematiky, jak ho často podávají např. některé české „celebrity“ prostřednictvím médií, je žákům zcela nevhodným vzorem. Problém negativního postoje veřejnosti k matematice řešili i Němci a soustavnou intenzivní prací na poli popularizace matematiky se jim postupně daří znovu žáky pro matematiku získat. Jsou to především různé vzdělávací akce, konference, kolokvia, semináře, workshopy, matematické soutěže apod.

Významnou celoněmeckou akcí byl Rok matematiky (*Jahr der Mathematik* 2008). V pořadí již devátý rok vědy zaměřený na matematiku měl mezi žáky i širokou veřejností velký ohlas. Asi 500 partnerů z vědy, výzkumu, kultury, umění a politiky připravilo

---

[3] Více informací lze nalézt na stránkách pod odkazem http://www.mathematik.uni-kassel.de/stochastik.schule/index.htm.

celkem asi 760 různých akcí, které se konaly na školách, univerzitách, ve výzkumných institucích a muzeích v asi 140 městech po celém Německu.

Matematika působí na žáky motivačně i v řadě německých muzeí. Nejstarší zařízení v Německu věnované matematicko-fyzikálním sbírkám je *Mathematisch-Physikalischer Salon* v Drážďanech ([6]), který byl založen již v roce 1728. Od roku 2002 si mnoho příznivců získalo například museum *Mathematikum* v Giesenu ([12]), které nabízí velkou přehlídku matematických experimentů v duchu zážitkové pedagogiky. Kromě muzeí existuje více volně přístupných sbírek matematických předmětů a knih, které jsou nejčastěji spravovány na univerzitách a vysokých školách.

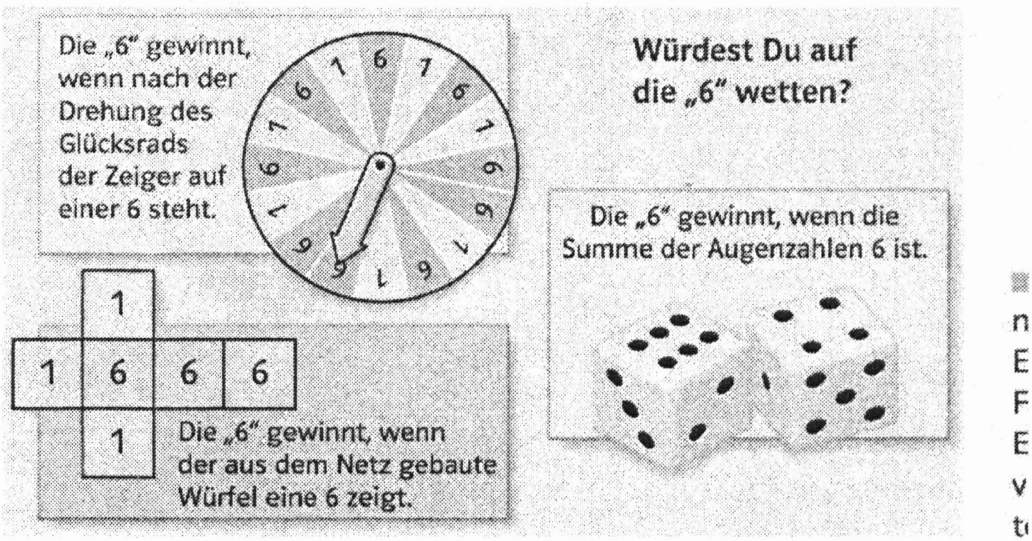
Zcela netradiční motivační formou popularizace by pro české žáky jistě byly v Německu hrané filmy, filmové portréty významných matematiků a krátké filmy k výzkumu a didaktice matematiky, které lze shlédnout na Matematickém institutu Svobodné univerzity v Berlíně při mezinárodní soutěži filmů a videí o matematice. ([11])

Motivace užitím vhodné metodiky a vybraných didaktických prostředků

Tato kapitola se věnuje již motivaci při výuce pravděpodobnosti. Jednotlivé faktory motivace jsou v textu zvýrazněny tučně.

Výchozím impulsem pro nás bude vyjádření H. STEINBRINGA (viz [19]), podle něhož je centrálním úkolem výuky stochastiky upevňování tzv. stochastického myšlení. To se realizuje pomocí tzv. stochastického modelování, jistého speciálního druhu matematického modelování. Stochastické modely poslouží k formulaci odhadů (prognóz) výsledků přírodních nebo uměle vytvořených náhodných jevů. Stochastiku je možné tedy chápat jako souhrn stochastických modelů, díky nimž není nutné při zavádění pojmu pravděpodobnosti předem uvádět její exaktní definici. Za didakticky slibné se považuje tzv. „prognostické“ zavádění pravděpodobnosti, kdy učitel může vhodně navazovat na zkušenosti žáků z běžného života a vede žáky k prognózám (odhadům) o šancích na to, že nastane určitý jev, což lze samo o sobě již označit za motivační přístup. Pravděpodobnost podle H.–W. HENNA (2001) musí mít prognostický charakter, tj. pravděpodobnost představuje prognózu, kolem které budou kolísat relativní četnosti. Dále musí mít hypotetický charakter, tj. chybné prognózy musí být odmítnuty a nahrazeny vhodnějšími. Výroky jako „podle rozmístění výsledků opakovaného pokusu považuji hypotézu A za důvěryhodnější než hypotézu B" by měly být se žáky trpělivě procvičovány. A dále výstižně shrnuje: *Místo toho, aby se na začátku výuky formálně vysvětlovalo, co je pravděpodobnost, měly by být s dětmi upevňovány pojmy a jejich významy užitím konkrétního materiálu.* (Například řešením úloh nejlépe činnostní formou. Pozn. autora) *Pojmy by měly být zaváděny ne samoúčelně nebo z formálně logických důvodů, nýbrž pro strukturaci toho, co žáci dělají.* Ukázka tzv. prognostického zavádění pravděpodobnosti je v úloze 1, vystopovat ji však lze i v dalších úlohách.

Úloha 1: Vsadil bys na „šestku"? ([3], s. 38) (Obr. 1)



Obrázek 1: Úvodní motivační úloha prognostického zavádění pravděpodobnosti[4]

Řešení úlohy 1: U tří obrázků žáci rozhodují (stanovují prognózu), zda je vhodné (výhodné) sázet na šestku: „Šestka" vyhrává, tj. „padne šestka" (jev A), jestliže se po točení kola štěstí zastaví ukazatel na čísle 6, $P_1(A) = \frac{9}{16} \approx 56\%$. „Šestka" vyhrává,

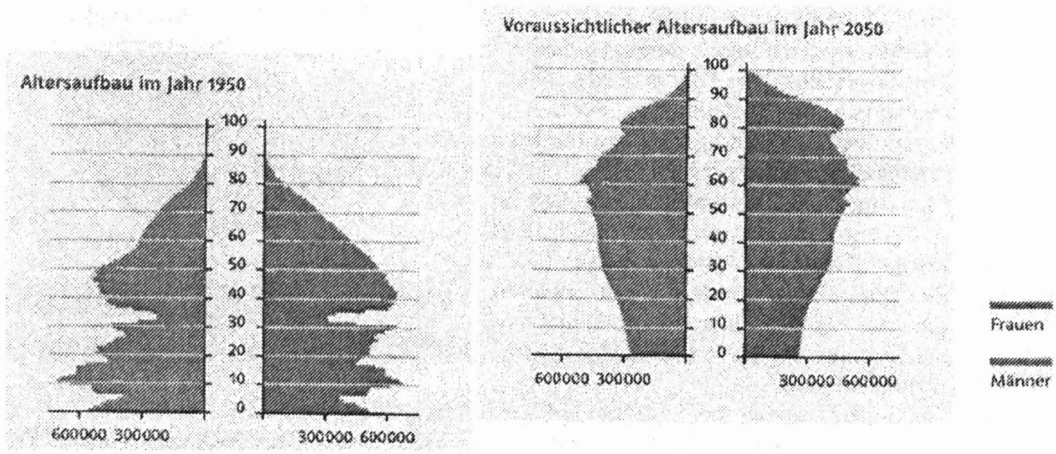
[4] Zdroj obrázku: [3], s. 38.

jestliže po hodu ukáže kostka vytvořená z připravené sítě jednu ze stěn s číslem 6, $P_2(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$. „Šestka" vyhrává, jestliže součet puntíků na vrchních stěnách dvou hracích kostek dává součet 6, tedy $P_3(A) = \frac{5}{36} \approx 13{,}8\,\%$.

Za jeden z hlavních faktorů motivace považujeme **kvalitu učebnic**, a to nejen obsahovou, metodickou, ale i formální. V německých učebnicích je na motivační složku výkladového textu kladen velký důraz, učebnice řady *Lambacher Schweizer* (hojně užívané na německých gymnáziích) jsou toho dobrým příkladem.

Například na začátku kapitoly tématu pravděpodobnosti v učebnici ([2], s. 37) je uveden **přehled cílových kompetencí** *Das kannst du bald (v češtině „To budeš brzy umět"): popsat děje, při nichž hraje roli náhoda, určovat pravděpodobnosti, využívat pravděpodobnosti pro předpovědi.* Kompetence se v dalším dílu učebnice ([4], s. 157) rozšiřují na: *šikovně použít zákony při pravděpodobnostním rozdělení, použít stromové diagramy k výpočtu pravděpodobnosti, řešit problémy pomocí modelování a simulací.*

Významným motivačním faktorem je **grafická (formální) stránka učebnic**, jako jsou **obrázky, schémata a grafy** uvedené nejčastěji v úvodu kapitoly o pravděpodobnosti a statistice, které doplňují **učební úlohy (řešené i neřešené)** zařazené vždy na začátku dané kapitoly. Na obrázku 2 uvádíme ilustraci.



Obrázek 2: Diagram věkového rozložení mužů a žen v roce 1950 a pravděpodobné rozložení v roce 2050[5]

[5] Zdroj obrázku: [3], s. 37.

Často se v učebnicích vyskytují **citáty významných osobností** (nejen matematiků) se vztahem k tématu pravděpodobnosti: *Čím více se lidé řídí podle svých plánů, tím více se setkávají s náhodou. Friedrich Dürrenmatt* ([4], s. 157)

Historické poznámky, portréty významných matematiků z oblasti pravděpodobnosti, známé problematické **historické úlohy** nebo například souvislé texty k historii pravděpodobnosti mohou velmi dobře sloužit k motivaci žáků. H.-W. HENN ([5], s.54f) považuje za vhodný motiv také autentické **novinové články**, které se dotýkají pravděpodobnosti třeba jen okrajově, přesto mohou k motivaci těchto pojmů významně přispět. Příkladem může být novinový článek s názvem Dvojnásobná smůla (obr. 3), který popisuje dvojí neštěstí, které se stalo jedné skupině osob. Nejdříve se tito lidé stali oběťmi autobusového neštěstí na dálnici, když cestovali na letiště. Podruhé je neštěstí postihlo při nouzovém přistání letadla, do kterého po první nehodě nastoupili.

Obrázek 3: Novinový článek Dvojnásobná smůla[6]

V českých učebnicích matematiky se žáci nesetkávají například s **povídkami s matematickým podtextem**. Například povídka s názvem Štěstí v Las Vegas ([1], s. 143) vypráví zážitek ze sice nepatrné, ale přesto určité výhry jednoho muže v kasinu a o jeho setkání s neznámým člověkem, který všechny peníze prohrál a na základě toho se začal odborně zabývat pravděpodobností. Povídka je ukončena větou: *Neboť ve skutečnosti vyhraje vždycky ten, který opustí hrací stůl rulety.*

[6] Zdroj obrázku: [5], s. 55.

Významným faktorem motivace žáků v matematice jsou **netradiční metody výuky** a **nestandardní výukové pomůcky**. Již při zavádění pojmu pravděpodobnosti lze dobře využít tzv. **simulací náhodných experimentů**.[7] Mnoho náhodných experimentů, které by nebyly v reálné podobě proveditelné, se dají simulovat například modelem urny, ze které taháme koule.

Úloha 2: Předpověď počasí udává pro příští den, že bude pršet s pravděpodobností 80 %. Vytvoř spolu se spolužákem kolo štěstí (ruletku) s deseti stejně velkými poli „prší" a „neprší" a vybarvi je tak, abyste mohli ověřit danou pravděpodobnost, že bude pršet. Zachyťte výsledky svých pokusů do tabulky. ([3], s. 40)

Úloha 3: A) Vytvoř si kolo štěstí jako na obrázku 4. Rozděl kruhový kotouč, jak je uvedeno, a vybarvi plochy. Šipku z kartonu na jednom konci propíchni a upevni pomocí kružítka ke kotouči. B) Nech šipku otáčet po kotouči tím, že do ní cvrnkneš ukazováčkem, a zaznamenávej výsledky. C) Dejte ve třídě dohromady výsledky zaznamenaných četností výsledných výsečí jednotlivých barev a určete podíly těchto výsledků. ([2], úloha č. 5, s. 40)

Klassenexperiment

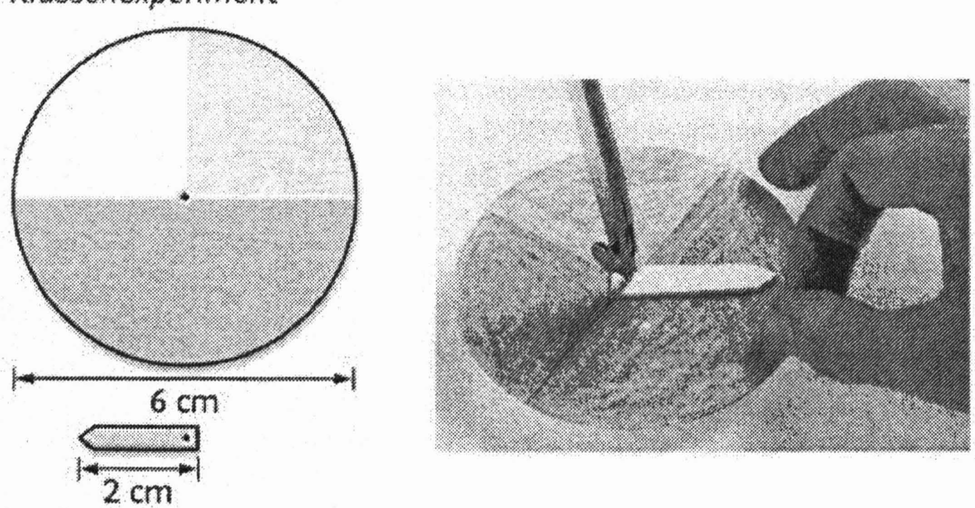


Fig. 2

Obrázek 4: Návodné obrázky k experimentu na kole štěstí[8]

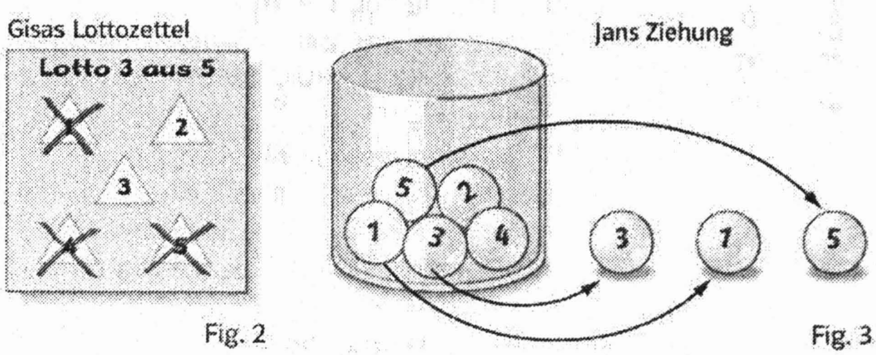
[7] V německé literatuře se často mluví o tzv. třídním experimentu, čímž se rozumí skutečnost, že na pořizování a zpracování dat pro získání výsledku úlohy se podílejí skupiny žáků z celé třídy.

[8] Zdroj obrázku: [3], s. 40.

Řešení úlohy 3: Dvě menší výseče kola štěstí jsou čtvrtkruhy, pravděpodobnost, že šipka padne na každou z nich, je 0,25, tj. 25 %, třetí výseč je půlkruh, pravděpodobnost je zde 0,5, tj. 50 %.

Úloha 4: Loterie „3 z 5“ (obr. 5). Gisa označí na svém losu křížkem tři z pěti čísel od 1 do 5. Jan táhne následně z losovacího zařízení najednou tři lístky (koule) z osudí. Jan vyhrává, pokud vytáhne právě tři čísla, která Gisa označila na svém losu. Gisa vyhraje, pokud Jan nevylosuje stejnou trojici čísel. V opačném případě vyhraje Jan. Hraj tuto hru se svým spolužákem 40krát. Shrň všechny výsledky dvojic spolužáků ze třídy do jedné tabulky a vypočítej hodnotu teoretické pravděpodobnosti. Měl jsi správný odhad, kdo bude vyhrávat? (Podle [3], s. 49, úlohy 11, 12.)

Řešení úlohy 4: Gisa má $\binom{5}{3} = 10$ možností, jak zaškrtnout tři zvolená čísla. Stejný počet možností má také Jan při tažení koulí z osudí. Pravděpodobnost P, že „Jan vytáhne stejná čísla jako Gisa“ (jev A), se rovná $P(A) = \frac{1}{10} = 10\,\%$.[9]

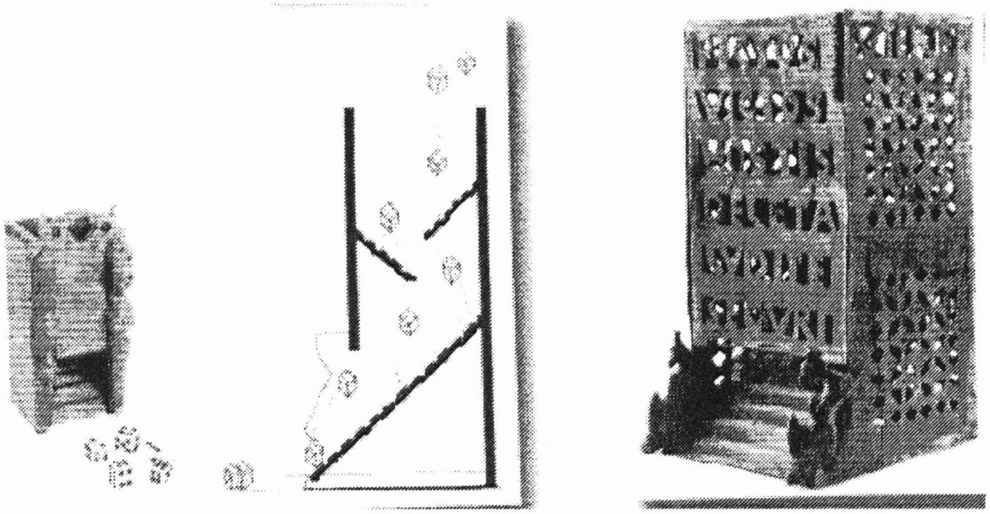


Obrázek 5: Los Gisy (Fig. 2), Janovo losování (Fig. 3)[10]

Příkladem využití **projektové metody** je projekt s názvem Staré a moderní losovací nástroje. ([15], s. 137) Projekt má předepsané fáze zpracování, metody práce (rešerše na internetu, prezentaci výsledků před třídou, evaluaci) a časovou náročnost. Na motivačních obrázcích jsou zařízení, která zajistí nezpochybnitelnost hodů hrací kostkou (obr. 6).

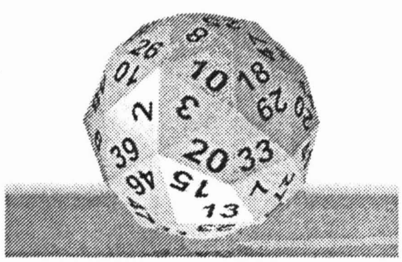
[9] V úloze 4 nerozlišujeme pořadí zaškrtávaných čísel, resp. pořadí tažených koulí.

[10] Zdroj obrázku: [3], s. 49.



Obrázek 6: Zařízení pro „spravedlivé“ házení hrací kostkou[11]

Motivační povahu mohou mít také vhodně zvolené nové či netradiční **výukové pomůcky**.

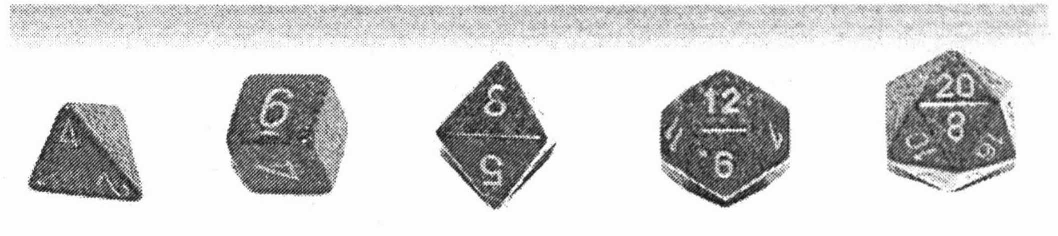


Obrázek 7: Losovací kostka[12]

Ve výuce pravděpodobnosti se využívají **pravidelné hrací kostky s různým počtem stěn**, tzv. **losovací kostka**, tj. kostka s tolika stěnami, kolik je čísel v osudí, nebo jiné kostky ve tvaru modelů těles určené k házení. Méně známá je hrací kostka z průhledného plastu, v níž je ukryta ještě jedna kostka menších rozměrů. V Americe je známá sestava čtyř tzv. **Efronových kostek** (tj. kostky s puntíky na jednotlivých stěnách v počtu [4,4,4,4,0,0], [3,3,3,3,3,3], [6,6,2,2,2,2], [5,5,5,1,1,1]) Volně dostupná ke koupi je **elektronická hrací kostka** vhodná k přímému využití ve výuce. Pro výpočty pravděpodobností jsou vhodné kostky ve tvaru modelů Platónových těles (obr. 8).

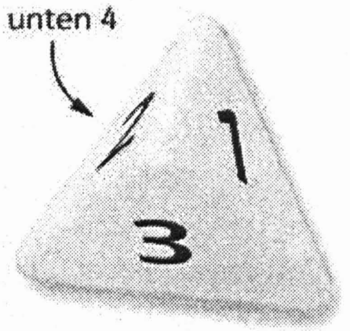
[11] Zdroj obrázku: [15], s. 136.

[12] Zdroj obrázku: [online] [cit. 8. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.lottowuerfel.de/



Obrázek 8: Losovací kostky ve tvaru platónských těles[13]

Úloha 5: Házej pravidelným čtyřstěnem (obr. 9). A) Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo 3? B) Jak často padlo číslo 3 při 800 hodech?



Obrázek 9: Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) jako losovací zařízení[14]

Řešení úlohy 5: Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) je pravidelné těleso, všechny stěny tedy mají stejnou šanci na to, aby mohly být výsledkem hodu. A) $P(A) = \frac{1}{4} = 25\,\%$ B) $800 \cdot \frac{1}{4} = 200$, tj. při 800 hodech tetraedrem očekáváme ve 200 případech výsledek s číslem 3.

Místo klasických hracích kostek lze využít například také **připínáčky.**

Úloha 6: Házej 200krát připínáčkem a v procentech odhadni šance na to, že připínáček spadne „na stranu" a „na hlavičku". ([3], s. 41)

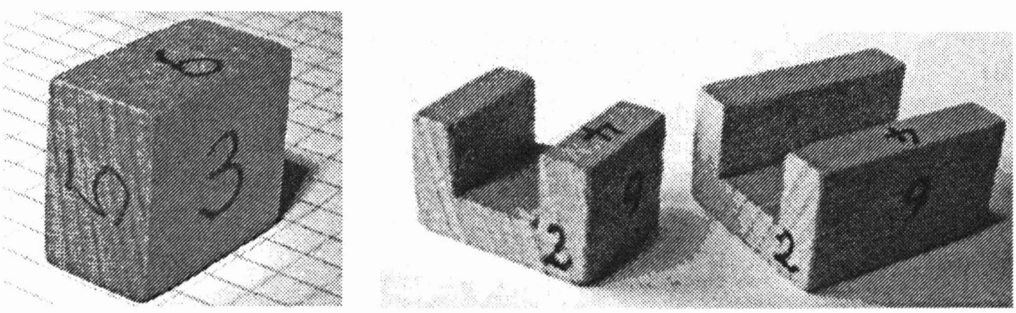
Řešení úlohy 6: U tohoto náhodného pokusu se nedá pravděpodobnost přímo odhadnout, a proto je potřeba provést dostatečně dlouhou řadu jeho opakování. Z dlouhých řad výsledků spočítané relativní četnosti dosahují hodnot 60 %, resp. 40 %, že „připínáček

[13] Zdroj obrázku: [online] [cit. 8.7.2013]. Dostupné na www: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:DnD_Dice_Set.jpg

[14] Zdroj obrázku: [3], s. 39.

spadne na hlavičku“, resp. „připínáček spadne na stranu“. Zde lze také dobře dokumentovat empirický zákon velkých čísel: z absolutních četností se spočítají relativní četnosti, které se znázorní do grafu. Žáci sami odhalí, že relativní četnosti „mají tendenci“ se se zvyšujícím počtem hodů blížit k jedné hodnotě, tj. stabilizují se kolem jisté konstanty, zde je to hodnota relativní četnosti asi 0,4, tedy pravděpodobnosti 40 %.

Pro opakované náhodné ne-Laplaceovy pokusy (které se neopírají o jisté symetrie) se místo klasické „pravidelné“ hrací kostky používá například **kvádr** nebo i **nepravidelné nekonvexní tvary**. Využít se dají například **kostičky Lega**. Známé jsou **Riemerovy kostky**, vydané nakladatelstvím *Ernst Klett Verlag* ([14]). Jde o modely geometrických těles, resp. jejich části, jež jsou určeny k opakovaným (opakovatelným) náhodným pokusům (obr. 10).

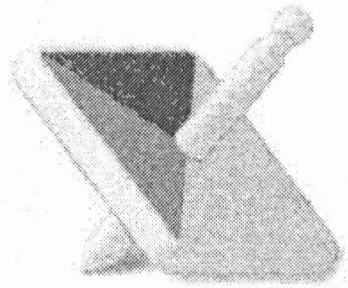


Obrázek 10: Hrací kostky ve tvaru kvádru a složených těles[15]

Motivačně působí **střídání různých losovacích zařízení: urna, loterijní zařízení, losovací nástroje – zápalky, koule, mince** nebo jiné předměty určené k losování či házení a časté pomůcky při tombolách.

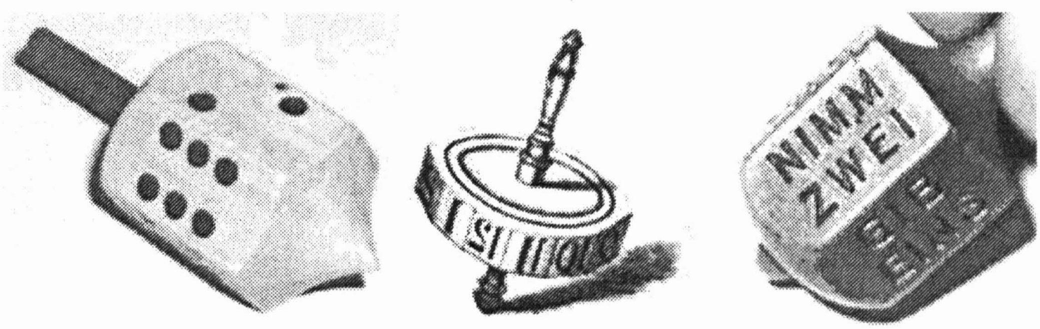
Z dalších často využívaných učebních pomůcek se doporučují **karty**, (výherní) **hrací automaty** (například typu jednoruký bandita), **Galtonova deska**, **ruleta**, různé typy herních zařízení a automatů, různé typy **kol štěstí**, **klasická káča** či tzv. **kvadratická káča** (obr. 11), stolní hry, strategicko-náhodné hry, například Člověče, nezlob se! (obr. 13), hra Město duchů (obr. 14), Domino apod., šifrovací zámky aj.

[15] Zdroj obrázku: [online] [cit. 10.7.2013]. Dostupné na WWW: [14].



Obrázek 11: „Kvadratická“ káča s různě barevnými „čtvrtvýsečemi“ (v originální podobě)[16]

Další různé podoby káči ukazuje obrázek 12.



Obrázek 12: Různé podoby káči určené k náhodnému losování[17]

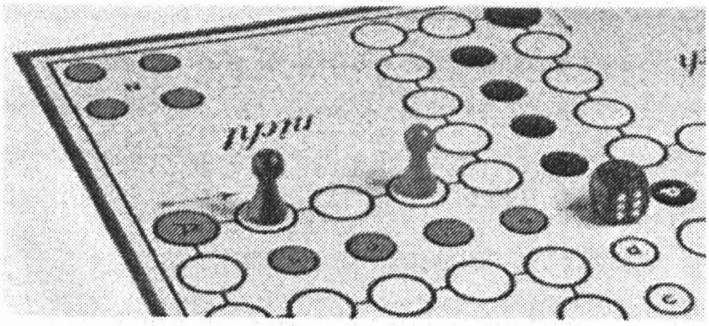
Úloha 7: Jak velká je pravděpodobnost, že se „kvadratická“ káča (obr. 11): a) po jednom točení překlopí na hranu se žlutou výsečí? (jev A) b) po dvou točeních opakovaně překlopí na hranu se žlutou výsečí? (jev B) c) po třech točeních nikdy nepřeklopí na hranu se žlutou výsečí? (jev C) d) po třech točeních (právě) dvakrát překlopí na hranu se žlutou výsečí? (jev D) ([2], s. 47)

Řešení úlohy 7:

$$\text{a) } P(A) = \frac{1}{4}, \quad \text{b) } P(B) = \frac{1}{16}, \quad \text{c) } P(C) = \frac{27}{64}, \quad \text{d) } P(D) = \frac{3}{64}.$$

Úloha 8: Urči pravděpodobnost, že Marcela předhoní svou červenou figurkou o dvě pole dále stojící figurku zelenou (jev A). (obr. 13)

[16] Zdroj obrázku: [3], s. 47.
[17] Zdroj obrázků: [online] [cit. 10.7.2013]. Wikimedia Commons.



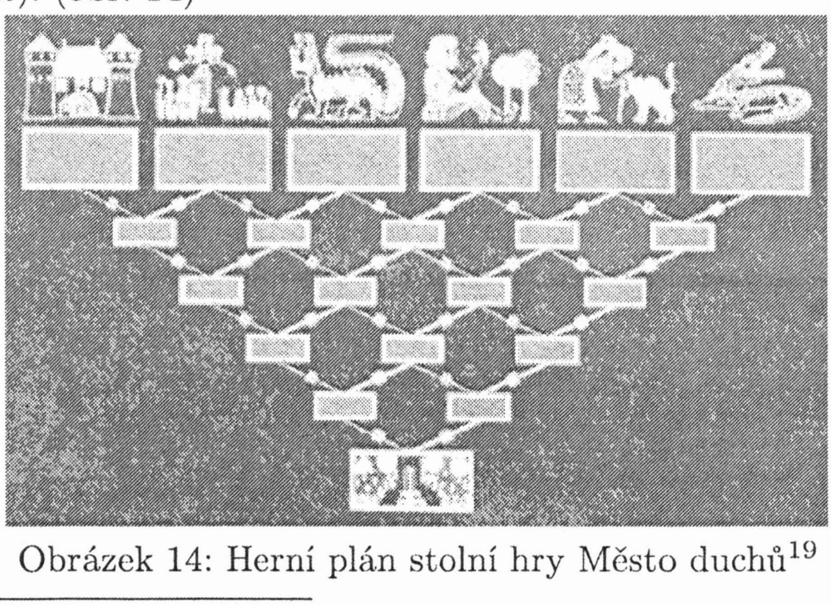
Obrázek 13: Hra Člověče, nezlob se! Výchozí situace k úloze 8.[18]

Řešení úlohy 8: Marcela musí hodit některé z čísel 3, 4, 5, 6. Tedy $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Úloha 9: Hraj se spolužákem hru **Kámen, nůžky, papír**. Kdo vyhrává?

Řešení úlohy 9: Vzhledem k pravidlům této známé hry neexistuje strategie, jak dosáhnout pravidelně opakujícího se vítězství, tedy šance na výhru mají oba hráči stejnou. Kombinace stejných symbolů zvolených oběma hráči najednou nemají vliv na rozhodnutí o výherci.

Úloha 10: Hraj se spolužákem **stolní hru Město duchů** (Geisterstadt). (obr. 14)



Obrázek 14: Herní plán stolní hry Město duchů[19]

[18] Zdroj obrázku: [3], s. 44.
[19] Zdroj obrázku: [9], s. 22.

Řešení úlohy 10: Hra Město duchů je součástí **výukového boxu** *Mathematisches Labor* (na trhu již od roku 1972, nakladatelství *Klett Verlag*), který obsahuje různé hry ke kombinatorice a pravděpodobnosti. Začne se hrát na herním plánu (obr. 14) a na každé „křižovatce" se hází speciální „spravedlivou" kostkou a rozhoduje se, zda jít doleva nebo doprava. Hra využívá Bernoulliho řetězec délky 5. Pravděpodobnost, že hráč dosáhne každého z koncových polí, je $P = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 3{,}1\,\%$.

Další hry k pravděpodobnosti lze nalézt v **matematickém kufříku** (*Mathekoffer*), který vydává nakladatelství *Klett Verlag*.

Úloha 11: **Hra O poklad pirátů** (*Piratenschatzspiel*) ([9], s. 18–21) (obr. 15)

Obrázek 15: Hrací plán hry O poklad pirátů[20]

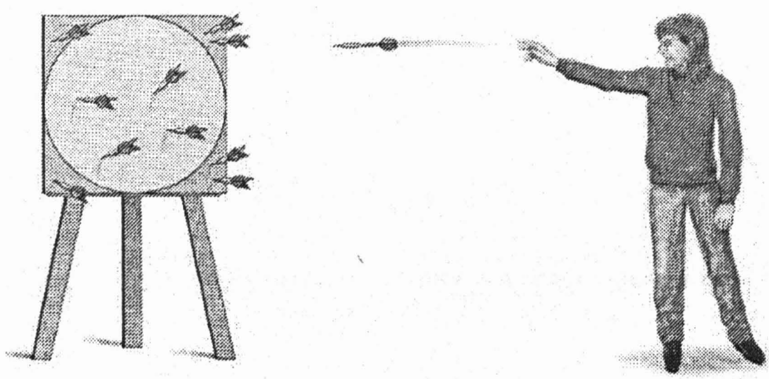
Řešení úlohy 11: Jde o stolní hru určenou pro žáky 3. ročníku ZŠ. Cílem je získat pirátský poklad. Hru hrají dva hráči. Nejdříve žáci pracují s pracovním listem, kde se seznámí s pravidly hry. Hráč Black Jack se posune o jedno pole dopředu, jestliže padne na dvou kostkách součet 6. ($P = \frac{5}{36} \approx 13{,}8\,\%$) Hráč Red Head se

[20] Zdroj obrázku: [9], s. 19.

posune o jedno pole, jestliže bude součet 9. ($P = \frac{4}{36} \approx 11{,}1\,\%$) Dále žáci hrají hru s novými pravidly: Black Jack (Red Head) se posune o jedno pole dále při součtu 4 ($P = \frac{3}{36} \approx 8{,}3\,\%$), resp. 10 ($P = \frac{3}{36} \approx 8{,}3\,\%$), 7 ($P = \frac{6}{36} \approx 16{,}6\,\%$), resp. 3 ($P = \frac{2}{36} \approx 5{,}5\,\%$), nebo 12 ($P = \frac{1}{36} \approx 2{,}7\,\%$), resp. 8 ($P = \frac{5}{36} \approx 13{,}8\,\%$). Žáci odhadují a zjišťují, zda pro dané součty existují jen jediné možné kombinace na kostkách, a rozhodují, která pravidla jsou spravedlivá, či u kterých má protihráč vyšší šance na výhru. (Spravedlivá jsou jen pravidla pro součty 4 a 10.) Pravidla se dají upravit dále například takto: sleduje se, zda padl sudý, nebo lichý součet, zda je součet větší než 8, resp. menší než 6, nebo jeden ze spoluhráčů hází jen jednou kostkou a násobí hozený počet dvěma a druhý ze spoluhráčů hází také jednou kostkou a hozený počet ok vynásobí týmž počtem apod.

Další úlohy se týkají experimentálního určení přibližné hodnoty Ludolfova čísla π.

Úloha 12: Vyrob si terč čtvercového tvaru, do kterého vepiš kruh a vymaluj jej jinou barvou (obr. 16). Registruj počet všech hodů, kdy šipka zasáhla kruh, a počet všech provedených hodů. Čemu se rovná podíl těchto dvou počtů? (Podle [2], s. 35.)



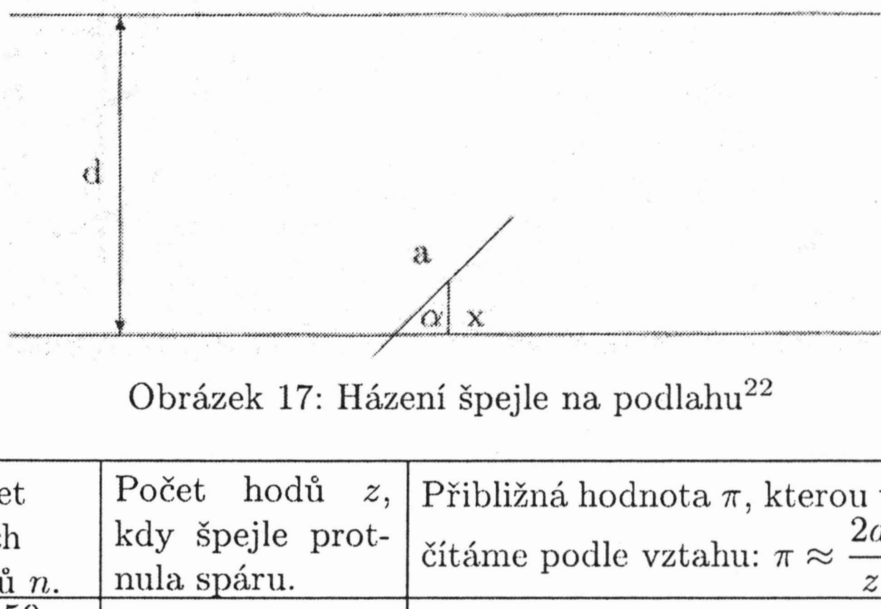
Obrázek 16: Házení šipek na terč[21]

Řešení úlohy 12: Relativní četnost h náhodného jevu, kdy „šipka zasáhne kruh“, je se zvyšujícím se počtem všech hodů rovna hodnotě zlomku teoretické pravděpodobnosti $h = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$ pro hodnotu r poloměru čtverci vepsaného kruhu. Tedy $\pi \approx 4 \cdot h$.

[21] Zdroj obrázku: [2], s. 35.

Všeobecně známá je **Buffonova úloha**, kterou v 18. století navrhl a vyřešil G. L. LECLERC (nazývaný BUFFON).

Úloha 13: Z přiměřené výšky házej nejméně dvěstěkrát na desku složenou z prken téže šířky d (vhodné je nahradit ji velkým papírem s narýsovanými čarami imitujícími spáry mezi prkny) špejli, jejíž délka je rovna a ($a < d$) (obr. 17). Kolikrát (z) ze všech hodů n dopadla špejle na některou ze spár mezi prkny? Zvyšuj počet hodů a vypočítej, čemu je roven podíl všech hodů a počtu hodů, kdy špejle spadla na některou ze spár, bude-li mít špejle délku a rovnou polovině šířky spáry. Doplň tabulku. (Podle [8], s. 126–129.)



Obrázek 17: Házení špejle na podlahu[22]

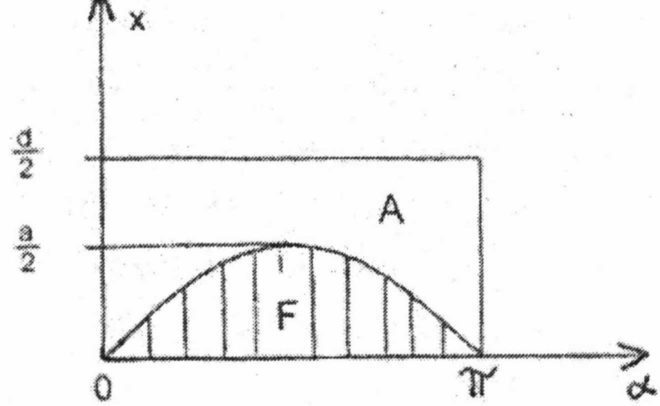
Počet všech hodů n.	Počet hodů z, kdy špejle protnula spáru.	Přibližná hodnota π, kterou vypočítáme podle vztahu: $\pi \approx \frac{2a \cdot n}{z \cdot d}$.
50		
100		
200		
500		

Tabulka: Tabulka k záznamu výsledků hodů špejlí a k výpočtu přibližné hodnoty π

Řešení úlohy 13: Nechť x je vzdálenost středu špejle k nejbližší spáře, α úhel, který svírá špejle se spárou. Pomocí x a α je vždy libovolná pozice špejle jednoznačně určena. Rozhodnutí o tom, zda

[22] Zdroj obrázku: [8], s. 126.

špejle spadne na spáru či ne, závisí na místě dopadu středu špejle a na velikosti úhlu α, o který se špejle otočila kolem svého středu. Platí $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$ a $0 \leq \alpha \leq \pi$. „Špejle protne spoj mezi prkny" (jev S) jen tehdy, jestliže $x \leq \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha$. Všechny takové případy jsou obsaženy v části pod grafem funkce $x = \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha$ (obr. 18).



Obrázek 18: Graf funkce $x = \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha$.[23]

Plocha A je omezena obdélníkem se stranami délek π a $\frac{d}{2}$. Plocha F příznivá jevu S je F$= \int_0^\pi \frac{a}{2} \sin\alpha \, d\alpha = a$. Pravděpodobnost P jevu S:

$$P(S) = \frac{\text{obsah plochy F}}{\text{obsah plochy A}} = \frac{a}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2a}{d\pi}.$$

Jestliže jev S nastane ze všech n provedených hodů z-krát, je podíl $\frac{z}{n}$ (relativní četnost jevu S) roven hodnotě teoretické pravděpodobnosti: $\frac{z}{n} \approx \frac{2a}{d\pi}$, tedy $\pi \approx \frac{2a \cdot n}{z \cdot d}$, pro $a = \frac{d}{2}$ dostáváme $\pi \approx \frac{n}{z}$, pro $a = d$ pak bude $\pi \approx \frac{2n}{z}$. Čím více hodů provedeme, tím přesnější bude hodnota čísla π.

Při řešení učebních úloh z pravděpodobnosti a statistiky působí motivačně také **informační a komunikační technologie**, které umožňují především efektivní zpracování získaných dat, výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu (kalkulátor, aplikace na počítači), znázornění pravděpodobnosti a jejího rozdělení (tabulky

[23] Zdroj obrázku: [8], s. 127.

v MS Excel, stromová schémata v MS Word), výpočet absolutních a relativních četností, grafickému znázornění rozdělení četnosti (MS Excel), prezentaci výsledků projektu ve stochastice (MS PowerPoint) apod.

K popularizaci matematiky a motivaci k učení se matematice také významně přispívá široké zázemí „matematiky na internetu".

Závěr

Setkání žáků s matematikou a jejich motivace k učení (nejen stochastice) neprobíhá jen při klasické školní výuce a může mít různou podobu. Pravděpodobnost poskytuje žákům dobré motivy k učení se matematice. Především jde o možnost řešit úlohy z praxe a o využití činnostních forem výuky. Německé učebnice matematiky poskytují řadu dobrých vzorů pro práci žáků v hodině matematiky, které podpoří jejich matematické „usilování", zapojí je do aktivní práce a ukáží jim smysluplnost, a tedy potřebnost učení se matematickým poznatkům a dovednostem v přímém vztahu k jejich reálnému prostředí.

Literatura

[1] Baum, M. et al., *LS 5 Mathematik für Gymnasien*, 1. vyd. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2007. 224 s.

[2] Baum, M. et al., *LS Stochastik*, 1. vyd. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2003. 190 s.

[3] Brandt, D. et al., *LS 3 Mathematik für Gymnasien*, 1. vyd. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2005. 216 s.

[4] Brandt, D. et al., *LS 4 Mathematik für Gymnasien*, 1. vyd. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2006. 214 s.

[5] Henn, W., *Didaktik der Stochastik (skriptum přednášek)*, Universität Dortmund, Dortmund, 2001. [online] [cit. 20. 9. 2009]. Dostupné na WWW: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/downloads/Didaktik_Stochastik_gesamt.pdf

[6] Der Mathematisch-Physikalische Salon [online] [cit. 8. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.skd.museum/de/museen-institutionen/zwinger-mit-semperbau/mathematisch-physikalischer-salon/index.html

[7] Kalhous, Z., Obst, O. a kol., *Školní didaktika*, 1. vyd. Portál, Praha, 2002.

[8] Kütting, H., Sauer, M., *Elementare Stochastik: Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.

[9] Lehner, S., Mehltretter, K., *Kinder entdecken Stochastik. Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik, 1.-4. Schuljahr*, Kopiervorlagen München, Oldenbourg, 2009. 69 s.

[10] Mathematikdidaktische Werkstatt [online] [cit. 5. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.ph-heidelberg.de/didaktische-werkstatt-mathematik.html

[11] MathFilm Festival 2008 [online] [cit. 8. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.mathfilm2008.de/

[12] Muzeum Mathematikum [online] [cit. 8. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.mathematikum.de/

[13] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J., *Pedagogický slovník*, 4. vyd. Portál, Praha, 2003.

[14] Riemer, W., *Riemer-Würfel*, Spannende und lehrreiche Experimente mit ungewöhnlichen Objekten einzusetzen im Unterricht über Wahrscheinlichkeit und Statistik von Klasse 5 bis 13. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1998. [online] [cit. 20. 6. 2013]. Dostupné na WWW: http://www.riemer-koeln.de/joomla/index.php?option=com_wrapper&view =wrapper&Itemid=56.

[15] Saxl, I., Pravděpodobnost a statistika v našich životech., IN Lávička, M. et al. (ed.) *Sborník příspěvků z konference 10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* 1. vyd.

SUMA, CMS, 2006 37–45. CD, [online] [cit. 10. 7. 2013]. Dostupné na WWW: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_58.pdf.

[16] Schätz, U., Eisentraut, F., *Mathematik für Gymnasien*, 4. vyd. C. C. Buchners Verlag, Bamberg, 2007. 197 s.

[17] Schmid, A., Schweizer, W., *LS Stochastik. Grundkurs*, 1. vyd. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1996. 169 s.

[18] Stampe, E., *Repetitorium Fachdidaktik Mathematik*, Klinkhardt, Bad Heilbrunn, 1984. 168 s.

[19] Steinbring, H., *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs – das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht*, Materialien und Studien Band 18, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, Bielefeld, 1980. 462 s.

PhDr. Jan Fiala, Ph.D.
Gymnázium V. Nováka Jindřichův Hradec
Husova 333
377 01 Jindřichův Hradec
e-mail: fiala@gvn.cz

ABSTRACT

Our paper deals with some possibilities of students' motivation in stochastic at German grammar schools. The paper includes the analysis of selected textbooks focused on probability and statistics. Next, some tasks are included which focus on students' motivation and which can be used in such teaching of mathematics which emphasises pupils' active participation in the learning process. The article can help Czech mathematics teachers who teach the introduction to probability theory at secondary schools.