Učitel matematiky

Tamara Lorencová

Karl Feuerbach a jeho věta o dotyku kružnic

*Učitel matematiky*, Vol. 23 (2015), No. 2, 79–90

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149422

# KARL FEUERBACH A JEHO VĚTA O DOTYKU KRUŽNIC

Tamara Lorencová

*Dokončení z minulého čísla.*

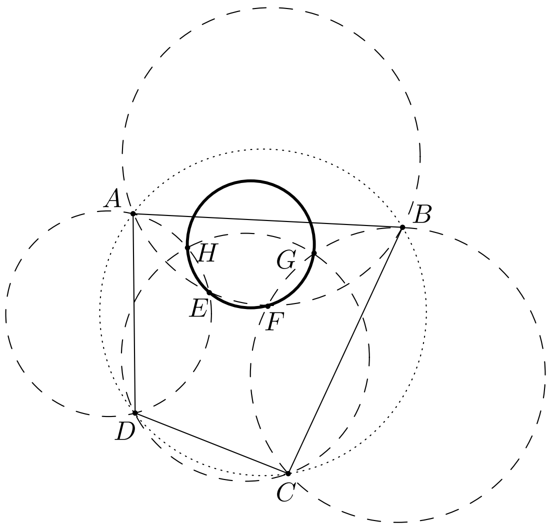
## 4. Jiný syntetický důkaz

V posledním oddíle našeho příspěvku uvedeme poměrně nedávný syntetický důkaz velké Feuerbachovy věty z článku [1]. Je sice poněkud delší než předchozí důkaz, stojí však za pozornost tím, že využívá několik pomocných tvrzení, která jsou zajímavá i sama o sobě. Okruh školské planimetrie je přitom mírně překročen pouze v Lemmatech 4 a 5. Ani tyto výsledky však neuvádíme bez důkazu a objasnění zahrnutých pojmů chordály dvou kružnic a jejich kolmosti.

**Věta (Miquelova věta o šesti kružnicích).** *Nad stranami tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ jako nad tětivami jsou sestrojeny čtyři kružnice. Každé dvě sousední z nich mají kromě vrcholu čtyřúhelníku $ABCD$ společný ještě jeden bod. Tyto body označené $E$, $F$, $G$, $H$ podle obrázku 8 leží na jedné kružnici.*

Důkaz této věty nalezneme například v díle *Perspectives on Projective Geometry* od Jurgena Richtera-Geberta, str. 339.

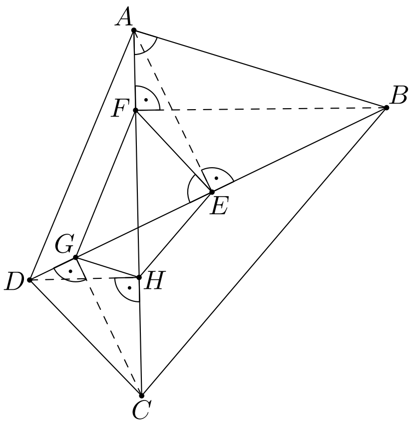
Pro náš důkaz bude postačující speciální případ uvedené Miquelovy věty, při kterém jsou čtyři kružnice nad stranami sestrojeny jako nad průměry. Průsečíky těchto čtyř Thaletových kružnic pak můžeme popsat jako kolmé průměty vrcholů čtyřúhelníku na jeho úhlopříčky následovně.




Obr. 8

**Lemma 1.** *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme $E$, $F$, $G$, $H$ kolmé průměty vrcholů na úhlopříčky čtyřúhelníku podle obrázku 9. Tyto body $E$, $F$, $G$, $H$ leží na jedné kružnici. Navíc platí, že vnitřní úhly u vrcholů $E$, $F$, $G$, $H$ sestrojeného čtyřúhelníku jsou po řadě shodné s vnitřními úhly u vrcholů $A$, $B$, $C$, $D$ původního (tětivového) čtyřúhelníku.*

*Důkaz.* Budeme předpokládat, že neplatí $AC \perp BD$ (jinak by bylo $E = F = G = H$), a dokážeme pouze, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $EFGH$ se shodují v úhlech $BAC$ a $FEG$, tedy v úhlech sevřených jednou stranou a jednou úhlopříčkou (se společným krajním bodem $A$, resp. $E$). S ohledem na symetrii celé situace to pak bude znamenat, že ve čtyřúhelnících $ABCD$ a $EFGH$ budou shodné všechny další odpovídající si úhly mezi stranami a úhlopříčkami, a tedy i odpovídající si vnitřní úhly. V důsledku toho bude čtyřúhelník $EFGH$ stejně jako $ABCD$ tětivový.

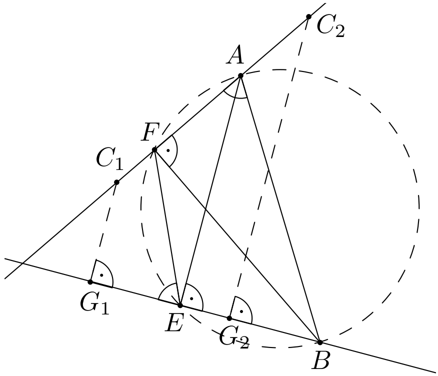



Obr. 9

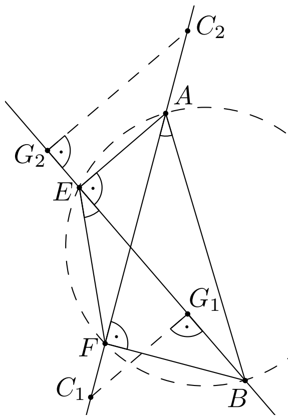
Naším jediným úkolem je tedy dokázat shodnost úhlů $BAC$ a $FEG$. V situaci z prvního obrázku potřebná rovnost ihned plyne z tětivového čtyřúhelníku $ABEF$:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAF| = 180^\circ - |\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle FEG|.$$

Takto snadno (prostřednictvím úhlů $BAF$ a $BEF$) se důkaz provede i v dalších jednotlivých situacích. Jak na žádnou nezapomenout? Je třeba uvážit, v jakém pořadí leží trojice bodů ($A$, $F$, $C$) a ($B$, $E$, $G$) na přímkách a čtveřice bodů ($A$, $B$, $F$, $E$) na kružnici, abychom mohli rozhodnout, zda úhly, které jsou ve hře, tedy úhly ve dvojicích ($BAC$, $BAF$), ($BAF$, $BEF$) a ($BEF$, $FEG$) se rovnají, nebo doplňují do $180^\circ$. Úsporný rozbor velkého počtu případů provedeme tak, že je rozdělíme do tří skupin, podle toho zda tětivovým čtyřúhelníkem je $ABEF$, nebo $ABFE$, či $AEBF$. Podle dalších tří obrázků (body $A$, $B$, $F$, $E$ považujme za pevné) už můžeme sami snadno vysvětlit, že bez ohledu na polohu příčky $CG$ přímek $AF$ a $BE$ ($CG \parallel AE$) jsou úhly $BAC$ a $FEG$ vždy shodné; stačí jen rozlišit dvě možnosti, totiž zda bod $C$ leží na polopřímce $AF$, či na polopřímce k ní opačné; stejný závěr pak zřejmě platí o poloze bodu $G$ vůči polopřímce $EB$ (zástupci obou možností jsou příčky $C_1G_1$ a $C_2G_2$ na všech třech obrázcích). Tím je úplný důkaz Lemmatu 1 hotov. □

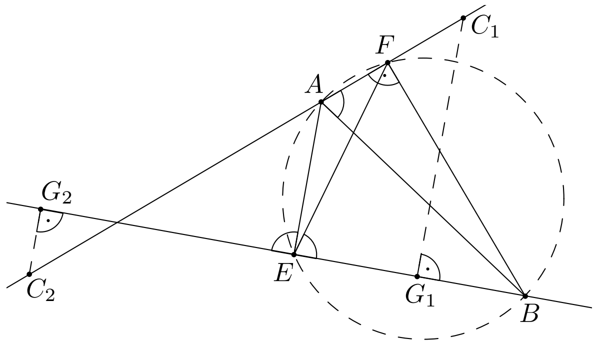



Obr. 10




Obr. 11

Německý historik matematiky Max Simon připisuje následující poznatek dělostřeleckému poručíku Victoru Calabrovi a profesoru Raphaëlu Malloizelovi ze školy Sv. Barbory v Paříži.

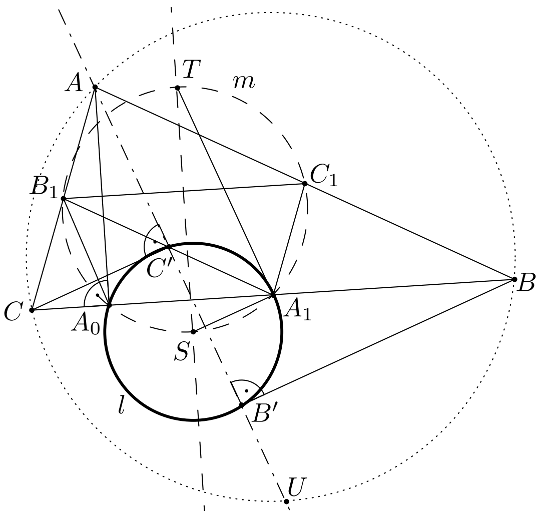



Obr. 12

**Lemma 2.** *V trojúhelníku $ABC$, ve kterém $|AB| \neq |AC|$, označme $B'$, $C'$ paty kolmic po řadě z vrcholů $B$ a $C$ na osu úhlu při vrcholu $A$. Dále označme $A_1$ střed strany $BC$ a $A_0$ patu výšky z vrcholu $A$. Pak body $B'$, $C'$, $A_1$, $A_0$ leží na jedné kružnici a střed $S$ této kružnice je středem toho oblouku $A_1A_0$ kružnice devíti bodů, na kterém neleží středy stran $AB$, $AC$.*

*Důkaz.* Uvažujme čtyřúhelník $ABUC$, kde $U$ je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ s osou úhlu u vrcholu $A$. Z rovnosti obvodových úhlů $BAU$ a $CAU$ plyne, že bod $U$ je středem oblouku $BC$ a jeho pravoúhlý průmět na stranu $BC$ je bod $A_1$. Aplikujeme-li na čtyřúhelník $ABUC$ Lemma 1, dostáváme fakt, že body $B'$, $C'$, $A_1$, $A_0$ leží na jedné kružnici, kterou označíme $l$ (obr. 13). Zbývá ještě ukázat, že středem kružnice $l$ je právě bod $S$ z formulace lemmatu. Je zřejmé, že bod $S$ leží na ose úsečky $A_0A_1$, proto stačí ukázat, že leží také na ose úsečky $B'C'$.

Označme $B_1$, $C_1$ po řadě středy stran $AC$, $AB$; $m$ kružnici devíti bodů a $T$ její druhý průsečík s osou tětivy $A_1A_0$ (tedy $T \neq S$). Protože tětivy $A_1A_0$ a $B_1C_1$ kružnice $m$ jsou rovnoběžné, mají společnou osu, takže bod $T$ je středem jejího oblouku $B_1C_1$, a proto jeho spojnice s třetím vrcholem $A_1$ trojúhelníku $A_1B_1C_1$ tvoří osu úhlu $C_1A_1B_1$. Jelikož čtyřúhelník $A_1B_1AC_1$ je rovno-



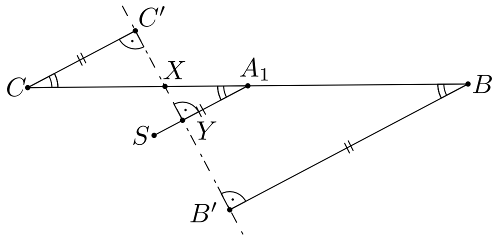

Obr. 13

běžník, jsou osy $A_1T$ a $AU$ dvou protějších úhlů u vrcholů $A_1$, $A$ rovnoběžné.

Z Thaletovy věty pro kružnici $m$ s průměrem $ST$ plyne $A_1S \perp$ $\perp A_1T$, takže podle předchozího závěru také platí $A_1S \perp AU$ neboli $A_1S \perp B'C'$.

Pro dokončení důkazu použijeme pomocný obrázek 14 s označenými průsečíky $X, Y$ úsečky $B'C'$ po řadě s úsečkami $BC$, $SA_1$. Pořadí bodů $X, Y$ na úsečce $B'C'$ odpovídá případu $|AB| > |AC|$; v případě $|AB| < |AC|$ lze použít analogický postup.

Z rovnoběžnosti úseček $CC'$, $SA_1$, $B'B$ plyne shodnost vyznačených úhlů. Trojúhelníky $CXC'$, $A_1XY$, $BXB'$ jsou tedy podobné (podle věty *uu*). Protože platí $|CX| + |XA_1| = |XB| -$ $- |XA_1|$, získáváme z podobnosti trojúhelníků rovnost $|C'X| +$ $+ |XY| = |B'X| - |XY|$, tedy $|C'Y| = |B'Y|$. Odtud již plyne, že bod $S$ leží na ose úsečky $B'C'$, což jsme chtěli dokázat. $\square$




Obr. 14

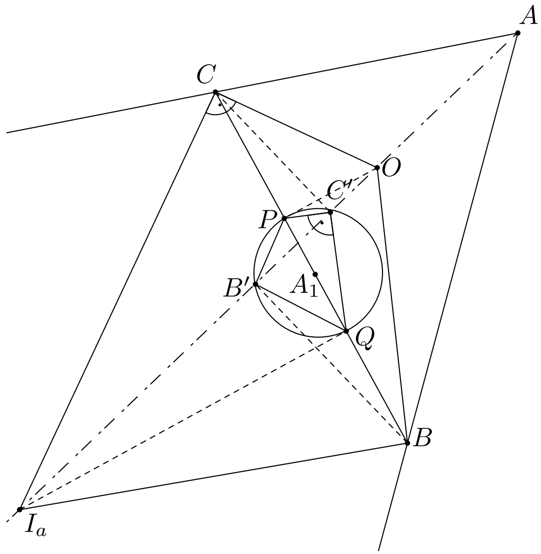
**Lemma 3.** *V trojúhelníku $ABC$, ve kterém $|AC| \neq |BC|$, označme $O$ střed kružnice vepsané a $I_a$ střed kružnice připsané ke straně $BC$. Pak čtyřúhelník $BOCI_a$ je tětivový. Dále označme $B'$, $C'$ paty kolmic po řadě z vrcholů $B$ a $C$ na osu úhlu při vrcholu $A$ a $P$, $Q$ body dotyku strany $BC$ po řadě s kružnicí vepsanou a kružnicí připsanou ke straně $BC$. Pak body $P$, $B'$, $Q$, $C'$ leží na jedné kružnici se středem $A_1$.*

*Důkaz.* Středy kružnice vepsané a připsané leží na osách úhlů, proto dostáváme:

$$|\sphericalangle OCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|, \quad |\sphericalangle I_aCB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ACB|).$$

Odtud plyne $|\sphericalangle I_aCO| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| + 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$. Analogicky $|\sphericalangle I_aBO| = 90^\circ$. Body $B$ i $C$ leží tedy na Thaletově kružnici nad průměrem $OI_a$, což dokazuje první tvrzení lemmatu.

V tětivovém čtyřúhelníku $BOCI_a$ body $B$, $P$, $C'$ a $Q$ představují kolmé průměty vrcholů na úhlopříčky, takže díky Lemmatu 1 leží na jedné kružnici a oba čtyřúhelníky $BOCI_a$ a $BPC'Q$ mají shodné vnitřní úhly. Jak už víme, body $B$, $C$ leží na Thaletově kružnici nad průměrem $OI_a$. Podle Lemmatu 1 mají oba čtyřúhelníky stejné vnitřní úhly, proto i body $B'$, $C'$ leží na Thaletově kružnici nad průměrem $PQ$. Jejím středem je skutečně střed $A_1$ strany $AB$, neboť body dotyku $P$ a $Q$ jsou, jak je dobře známo, podle bodu $A_1$ souměrně sdružené. Tím je hotov i důkaz druhého tvrzení lemmatu. □




Obr. 15

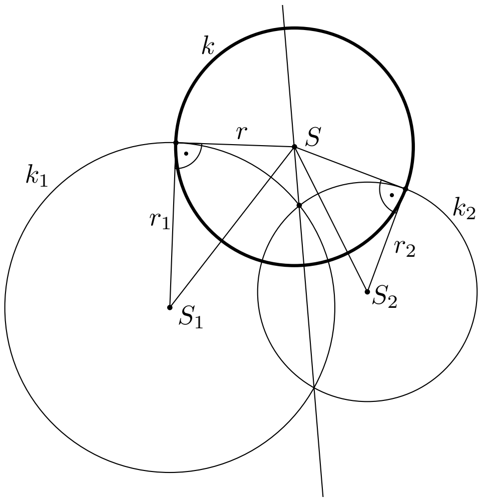
Roku 1813 francouzský geometr Louis Gaultier, během svého studia na Ecole Polytechnique v Paříži, napsal monografii nazvanou *Les contacts des cercles*, ve které poukázal na pozoruhodnou vlastnost chordály dvou kružnic. Připomeňme, že jde o přímku tvořenou právě těmi body, které mají k daným dvěma kružnicím stejnou mocnost; v případě protínajících se kružnic tato přímka prochází oběma jejich průsečíky. Vysvětleme ještě, že dvě protínající kružnice se nazývají navzájem kolmé, mají-li ve svém průsečíku navzájem kolmé tečny.

**Lemma 4.**

*a) Každá kružnice kolmá ke dvěma daným kružnicím má střed na chordále těchto kružnic.*

*b) Jestliže má kružnice střed na chordále dvou kružnic a je kolmá k jedné z nich, pak je kolmá i ke druhé z nich.*

*Důkaz.* Uvažované kružnice označme $k(S, r)$, $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$.




Obr. 16

a) Z kolmosti kružnice $k$ ke kružnicím $k_1$, $k_2$ dostáváme:

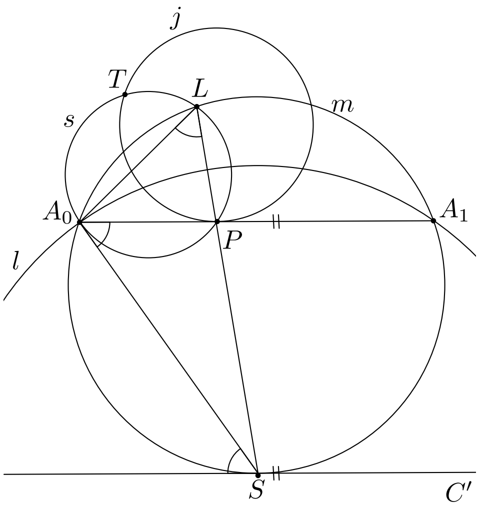
$$|SS_1|^2 = r_1^2 + r^2, \quad |SS_2|^2 = r_2^2 + r^2.$$

Vyjádříme-li z obou rovnic $r^2$, obdržíme $|SS_1|^2 - r_1^2 = |SS_2|^2 - r_2^2$, což vyjadřuje rovnost mocností bodu $S$ ke kružnicím $k_1$, $k_2$. Bod $S$ tedy leží na jejich chordále.

b) Leží-li střed $S$ na chordále kružnic $k_1$, $k_2$, má k oběma kružnicím stejnou mocnost, tedy $|SS_1|^2 - r_1^2 = |SS_2|^2 - r_2^2$. Z kolmosti kružnic $k$ a $k_1$ plyne $|SS_1|^2 = r_1^2 + r^2$. Celkově dostáváme $|SS_2|^2 - r_2^2 = r^2$, což vyjadřuje kolmost kružnic $k$, $k_2$. □

**Lemma 5.** *Je dána kružnice $m$ a její tětiva $A_0A_1$. Střed jednoho oblouku $A_0A_1$ kružnice $m$ označme $S$. Nechť $l$ je kružnice se středem $S$ procházející body $A_0$, $A_1$. Uvnitř úsečky $A_0A_1$ je dán bod $P$. Označme $L$ druhý průsečík přímky $SP$ s kružnicí $m$ a $j$ kružnici, která se dotýká úsečky $A_0A_1$ v bodě $P$ a která je* *kolmá ke kružnici $l$. Pak kružnice $j$ má vnitřní dotyk s kružnicí $m$ v bodě $L$.*

*Důkaz.* Označme $s$ kružnici procházející body $A_0$, $P$, $L$. V první části důkazu ukážeme, že kružnice $s$ a $j$ mají společné body $P$ a $L$. Použijeme přitom metodu důkazu sporem, když budeme předpokládat, že kružnice $s$ a $j$ mají společné body $P$ a $T$, kde $T \neq L$ (tudíž bod $T$ neleží na přímce $SP$, viz obr. 17).




Obr. 17

Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušných tětivě $A_0S$ kružnice $m$ a z rovnoběžnosti přímky $A_0A_1$ s tečnou v bodě $S$ dostáváme shodnost tří úhlů vyznačených na obrázku. Z rovnosti $|\sphericalangle PLA_0| = |\sphericalangle PA_0S|$ vyplývá, že přímka $A_0S$ je tečna ke kružnici $s$ v bodě $A_0$.

Tečna ke kružnici $l$ v bodě $A_0$ je průměr kružnice $s$, která je proto ke kružnici $l$ kolmá. Kružnice $l$ je tak kolmá k oběma kružnicím $j$ a $s$, takže podle Lemmatu 4a) střed $S$ kružnice $l$ leží na chordále $PT$, což je ve sporu s naším předpokladem. Bod $L$ je tedy společným bodem kružnic $m$ a $j$. Díky jejich rovnoběžným tečnám v bodech $P$ a $S$ dostáváme podle Lemmatu z oddílu 3 našeho článku, že kružnice $m$ a $j$ se v bodě $L$ navzájem dotýkají, a to vnitřním způsobem, neboť bod $L$ leží vně úsečky $SP$. Důkaz je hotov. □

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom krátkým výkladem podali důkaz samotné velké Feuerbachovy věty o dotyku kružnice $m$ devíti bodů s kružnicí $j$ trojúhelníku $ABC$ vepsanou. Budeme přitom předpokládat, že platí $|AB| \neq |AC|$, a zachováme označení všech významných bodů z předchozích lemmat. Podle Lemmatu 2 víme, že body $B'$, $C'$, $A_1$, $A_0$ leží na kružnici $l$, jež má střed v bodě $S$ (střed oblouku $A_1A_0$ kružnice $m$). V Lemmatu 3 jsme zjistili, že body $P$, $B'$, $Q$, $C'$ leží na kružnici se středem $A_1$, již nazveme $p$. Tato kružnice je kolmá ke kružnici $j$, neboť $OP \perp PA_1$. Protože kružnice $p$ a $j$ jsou kolmé a střed $O$ kružnice $j$ leží na společné chordále $B'C'$ kružnic $l$ a $p$, jsou podle Lemmatu 4b) rovněž kružnice $j$ a $l$ kolmé. Kružnice $j$, $l$ a $m$ splňují podmínky Lemmatu 5, a proto kružnice $m$ a $j$ mají vnitřní dotyk v bodě $L$, což jsme právě chtěli dokázat.

Na úplný závěr konstatujme, že dotyk kružnice devíti bodů s kružnicemi připsanými lze dokázat analogickým postupem, při kterém je ovšem zapotřebí netriviálně modifikovat obsah většiny uvedených lemmat.

## Literatura


[1] Ayme, J. L. *Feuerbach's Theorem a new purely synthetic proof*. 2010. Překlad F. B. Rosado. Dostupné z: `http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Feuerbach1.pdf`

[2] Grinberg, D. *Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie*. Dostupné z: `http://www.matheraetsel.de/texte/Feuerbach.pdf`

[3] Pedoe, D. *Circles: a mathematical view*. The Mathematical Association of America. 1995.

[4] Prasolov, V. *Plane Geometry part 2*. Překlad D. Leites. Dostupné z: `http://www.mccme.ru/prasolov`

[5] Švrček, J. & Vanžura, J. *Geometrie trojúhelníka.* Polytechnická knižnice. Praha 1988.

## Abstract

The text is about Karl Feuerbach and his remarkable theorems. First, we describe his life and the path to mathematics. Then we present the "small" Feuerbach's theorem about nine points circle, with a brief proof. Finally, we state the "big" Feuerbach's theorem about tangent circle, and two of the most interesting proofs.

*Mgr. Tamara Lorencová*
*Ústav matematiky a statistiky*
*Kotlářská 2*
*611 37 Brno*
*e-mail: tamara.nedevova@centrum.cz*