Ľubomíra Dvořáková; Čeněk Škarda

Pomoc od bezmoci z odmocnin

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 1, 35–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149415

POMOC OD BEZMOCI Z ODMOCNIN

Ľubomíra Dvořáková, Čeněk Škarda

Výpočet druhé odmocniny pomocí tužky a papíru byl donedávna součástí základního vzdělání. Nyní se však více než na svou hlavu spoléháme na kalkulačku a tento jednoduchý numerický výpočet založený na násobení a odečítání upadá v zapomnění. Cílem článku je toto zapomenuté umění vzkřísit, a to hned třemi způsoby: „školním", čínským [2, 4] a indickým [1, 2, 3]. Ještě než přibližný výpočet druhé odmocniny z přirozeného čísla připomeneme, zkuste jej vymyslet sami!

1. Druhá odmocnina ve škole

Výpočet druhé odmocniny bude nejlépe srozumitelný na konkrétním příkladě. Dejme si za úkol najít $\sqrt{35\,217\,261}$.
Přesněji řečeno: Najdeme největší přirozené číslo n, které splňuje, že $n^2 \leq 35\,217\,261$. Celý postup je ilustrován na obrázku 1.

- Rozdělíme číslo 35 217 261 na dvojciferné bloky, tj. 35|21|72|61. (Začíná se vždy u jednotek, takže číslo 5 217 261 bychom rozdělili jako 5|21|72|61.)
- Podíváme se na první dvojici cifer 35 a přemýšlíme, jaká největší druhá mocnina přirozeného čísla se do ní vejde. Je to 5^2. Číslo 5 napíšeme do mezivýsledku, číslo 25 odečteme od 35 a za rozdíl 10 napíšeme další dvojici cifer ze zadání. Máme tak zbytek 1021. Pro přehlednost si do řádku za 1021 napíšeme oddělující značku, např. :, a za ni dvojnásobek mezivýsledku, tedy číslo 10.
- Druhou cifru odmocniny hledáme jako maximální x splňující:
$$(\overline{5x})^2 = (50 + x)^2 \leq 3521.$$

Pozor! Zápis $5x$ neznamená součin $5 \times x$, ale jde o desítkový zápis čísla $50 + x$. Součin značíme $\times$. Nerovnost lze zjednodušit na tvar:

$$100 \times x + x^2 = (100 + x) \times x = 10x \times x \leq 1021.$$

Maximální takové x je rovno 9. Číslo 9 napíšeme do mezivýsledku, číslo $109 \times 9 = 981$ odečteme od 1021 a za rozdíl 40 napíšeme další dvojici cifer ze zadání. Máme tak zbytek 4072. Do řádku za 4072 napíšeme oddělující značku a za ni dvojnásobek mezivýsledku, tedy číslo 118.

- Třetí cifru odmocniny hledáme jako maximální y splňující:

$$(59y)^2 = (590 + y)^2 \leq 352\,172.$$

Nerovnost lze zjednodušit na tvar:

$$1180 \times y + y^2 = (1180 + y) \times y = 118y \times y \leq 4072.$$

Maximální takové y je rovno třem. Číslo 3 napíšeme do mezivýsledku, číslo $1183 \times 3 = 3549$ odečteme od 4072 a za rozdíl 523 napíšeme další dvojici cifer ze zadání. Máme tak zbytek 52 361. Do řádku za 52 361 napíšeme oddělující značku a za ni dvojnásobek mezivýsledku, tedy číslo 1186.

- Poslední cifru odmocniny hledáme jako maximální z splňující:

$$(593z)^2 = (5930 + z)^2 \leq 35\,217\,261.$$

Nerovnost lze zjednodušit na tvar:

$$11\,860 \times z + z^2 = (11\,860 + z) \times z = 1186z \times z \leq 52\,361.$$

Maximální takové z je rovno čtyřem. Číslo 4 napíšeme do mezivýsledku, a získáme tak výsledek $\sqrt{35\,217\,261} \doteq 5934$. Číslo $11\,864 \times 4 = 47\,456$ odečteme od 52 361 a rozdíl 4905 je zbytek, který nás dělí od přesné hodnoty, tj. platí

$$35\,217\,261 = 5934^2 + 4905.$$

- Pokud bychom chtěli dostat ještě přesnější hodnotu odmocniny, nic nám nebrání pokračovat. Za zbytek by se napsaly dvě nuly, za mezivýsledek desetinná čárka a počítali bychom analogicky dále.

3	5|	2	1|	7	2|	6	1	$\sqrt{\ }$	$\doteq$	**5934**
−2	5									
1	0	2	1						:	109×9
−	9	8	1							
		4	0	7	2				:	1183×3
	−	3	5	4	9					
			5	2	3	6	1		:	$11\,864 \times 4$
		−	4	7	4	5	6			
				4	9	0	5			

Obr. 1: Výpočet druhé odmocniny z čísla 3 521 7261 „školním“ způsobem

Podobným způsobem sami spočtěte $\sqrt{26\,150}$. Pozor! Při dělení na dvojice cifer nyní dostanete 2|61|50. Měl by vám vyjít výsledek 161.

2. Druhá odmocnina v Číně

Čínský popis výpočtu druhé (i třetí) odmocniny obsažený v *Matematice v devíti knihách* z přelomu letopočtu je nejstarším historicky dochovaným postupem. V terminologii – my používáme její počeštěnou variantu – se odráží souvislost s dělením. Číslo, jehož odmocninu hledáme, se nazývá **š**, tj. dělenec. Jedno z pomocných čísel nese označení **fa**, což znamená dělitel, a skutečně se jím v každém kroku dělí příslušný zbytek.

Čínský algoritmus předvedeme na výpočtu $\sqrt{173\,212}$ a postup ilustrujeme na obrázku 2. Všechny úkony byly prováděny na počítací desce pomocí dřevěných tyčinek. Zřejmě proto čínští počtáři nešetřili ve svém postupu přepisováním. Právě proto volíme ilustraci na menším čísle než v předchozí sekci, a navíc zbytečné kroky vynecháváme.

- Napíšeme do řádku **š** odmocňované číslo a do řádku **ťien-suan** číslo 10 000, které označuje nejvyšší lichou cifru dělence (tak počtáři říkali odmocňovanému číslu). **Ťien-suan** vždy zvýrazňuje aktuální pozici ve výpočtu, k ničemu jinému neslouží.
- První cifru odmocniny hledáme jako maximální přirozené číslo, jehož mocnina je menší nebo rovna 17, což je 4. Čtyřku napíšeme do řádku **fang** na pozici nejvyšší cifry výsledku a **fa** (též nazýváno **suo-te**) vyplníme součinem čtyřky a **ťien-suan**. Dále odečteme od čísla 173 212 součin **fang** a **fa**, tj. $4 \times 40\,000$. Rozdíl 13 212 vložíme do **š**. Nakonec **fa** zdvojnásobíme a posuneme o jedno místo doprava. Posuneme i **ťien-suan**, a to o dvě místa doprava.
- Pro získání druhé cifry odmocniny se podíváme, kolikrát se maximálně vejde **fa** do **š**, tedy 8000 do 13 212, a to je jednou. Zapíšeme jedničku do řádku **fang** za čtyřku a do řádku **fa** za osmičku. Odečteme od **š** součin druhé cifry **fang** a **fa**, tj. $13\,212 - 1 \times 8100$. Rozdíl 5112 napíšeme do **š**. Posuneme o jedno místo doprava **fa** a o dvě místa doprava **ťien-suan**. Nakonec poslední cifru, tedy jedničku, v řádku **fa** zdvojnásobíme.
- Pro získání poslední cifry odmocniny se podíváme, kolikrát se maximálně vejde **fa** do **š**, tedy 820 do 5112, a to je 6krát. Zapíšeme číslo 6 na konec řádku **fang** a do řádku **fa** za dvojku. Odečteme od **š** součin druhé cifry **fang** a **fa**, tj. $5112 - 6 \times 826$, a rozdíl 156 napíšeme do **š**. Nakonec poslední cifru, tedy šestku, v řádku **fa** zdvojnásobíme.
- Výpočet končí, **fang** obsahuje výsledek 416 a **š** obsahuje zbytek 156, který chybí do přesné hodnoty odmocniny, tj. $173\,212 = 416^2 + 156$.

Všimněme si, že Číňané na rozdíl od „školního“ výpočtu nekontrolují při volbě nové cifry její velikost bezchybně. Může se jim klidně stát, že ji zvolí příliš velkou. Pak jim ale v následujícím kroku vznikne záporný zbytek, a oni tak zjistí, že cifru zvolili

1.

fang						
š	1	7	3	2	1	2
fa						
ťien-suan		1	0	0	0	0

2.

fang				4		
š	1	7	3	2	1	2
fa		4	0	0	0	0
ťien-suan		1	0	0	0	0

3.

fang				4		
š		1	3	2	1	2
fa			8	0	0	0
ťien-suan				1	0	0

4.

fang				4	1	
š		1	3	2	1	2
fa			8	1	0	0
ťien-suan				1	0	0

5.

fang		4	1	
š	5	1	1	2
fa		8	2	0
ťien-suan				1

6.

fang		4	1	6
š	5	1	1	2
fa		8	2	6
ťien-suan				1

7.

fang	**4**	**1**	**6**
š	1	5	6
fa	8	3	2
ťien-suan			1

Obr. 2: Výpočet druhé odmocniny z čísla 173 212 čínským způsobem.

o jedna větší, než měli. (V této chvíli se také sluší přiznat, že si této chybovosti byli plně vědomi.) Ilustrujme tento problém na příkladě. Počítáme-li $\sqrt{176\,212}$ čínským způsobem, pak dostaneme druhou cifru mezivýsledku rovnou dvěma. Ovšem jako zbytek pak obdržíme záporné číslo, proto se musíme vrátit zpět a opravit volbu na jedničku. Postup je naznačen na obrázku 3. Číňané totiž postupují následovně. Po volbě první cifry rovné čtyřem by měli další cifru hledat jako maximální x splňující:

$$176\,212 \geq (4x0)^2 = (400 + x0)^2.$$

1.

fang						
š	1	7	6	2	1	2
fa						
ťien-suan		1	0	0	0	0

2.

fang				4		
š	1	7	6	2	1	2
fa		4	0	0	0	0
ťien-suan		1	0	0	0	0

3.

fang				4		
š		1	6	2	1	2
fa			8	0	0	0
ťien-suan				1	0	0

4.

fang				4	2	
š		1	6	2	1	2
fa			8	2	0	0
ťien-suan				1	0	0

5.

fang				4	2	
š			–	1	8	2
fa				8	2	0
ťien-suan						1

6.

fang				4	1	
š		1	6	2	1	2
fa			8	1	0	0
ťien-suan				1	0	0

7.

fang				4	1	
š			8	1	1	2
fa				8	2	0
ťien-suan						1

8.

fang				4	1	9
š			8	1	1	2
fa				8	2	9
ťien-suan						1

9.

fang				**4**	**1**	**9**
š				6	5	1
fa				8	2	9
ťien-suan						1

Obr. 3: Výpočet druhé odmocniny z čísla 176 212 čínským způsobem. V postupu je třeba se vrátit, vychází-li zbytek záporný, a zvolit cifru o jedničku menší.

Nerovnost se dá upravit do tvaru:

$$16\,212 \geq 800 \times x0 + (x0)^2 = 8x0 \times x0 = 8x00 \times x.$$

Ovšem oni v prvním kroku volí x tak, aby $8000 \times x$ se vešlo do 16 212 a až v dalším kroku odečtou od 16 212 hodnotu 8200×2. Dostanou pak zbytek -182, a tak zjistí, že zvolené x bylo příliš velké.

3. Druhá odmocnina v Indii

Indové nazývali odmocninu múla, což značí kořen stromu nebo také základ, počátek, vznik. Výpočet druhé (a také třetí) odmocniny v Indii poprvé popisuje učenec Aryabhata v knize *Aryabhatiya* z roku 499. Kromě kapitoly věnované matematice se zaobírá také výpočtem kalendáře, dělením času a popisy pohybu vesmírných těles. Pravidla výpočtu odmocniny vyjádřená ve verších jsou velmi stručná a bez ukázky na konkrétních příkladech. S malými změnami se algoritmus později objevuje v pracích dalších indických matematiků. I jejich popisy algoritmu jsou velmi lakonické. Uveďme na ukázku text od Sridhary (kolem roku 750): „Odečti (největší možný) čtverec od (posledního) lichého místa, vyděl zbytek zdvojnásobenou (pod nejbližší místo) posunutou odmocninou; podíl umísti na řádce (zdvojnásobené odmocniny) a po odečtení jejího čtverce zdvojnásob (podíl). Potom posuň obdržené (v řádku zdvojnásobené odmocniny) číslo o jedno místo kupředu a děl jím jako dříve. (Po opakování operace do konce) vezmi polovinu zdvojnásobeného čísla.“

Ukážeme opět algoritmus na výpočtu $\sqrt{173\,212}$ a ilustrujeme ho na obrázku 4.

- Začneme znázorněním lichých a sudých pozic (symboly $|$, resp. $-$).
- Hledáme největší druhou mocninu přirozeného čísla, která se vejde do 17, což je $4^2 = 16$. Rozdílem $17 - 16 = 1$ přepíšeme 17 v zadání. Nový zbytek je tedy 13 212. Zdvojnásobenou odmocninu, tj. 8, zapíšeme pod 13 (obecně tak, aby končila na následující sudé pozici).

- Číslo 13 vydělíme 8. Celou část podílu rovnou jedné zapíšeme za 8 a zbytkem po dělení, tj. číslem 5, přepíšeme 13. Dále od 52 odečteme druhou mocninu celé části podílu, tj. jedničku. A samotnou celou část podílu zdvojnásobíme na 2. Mezivýsledek 82 posuneme o jedno místo doprava.
- Číslo 511 vydělíme 82. Celou část podílu rovnou šesti zapíšeme za 82 a zbytkem po dělení, tj. číslem 19, přepíšeme 511. Dále od 192 odečteme druhou mocninu celé části podílu, tj. $192 - 36 = 156$. A samotnou celou část podílu nahradíme zdvojnásobenou hodnotou, tj. 6 přepíšeme na 12, a nový mezivýsledek je 832.
- Vydělením druhého řádku dvěma dostaneme výsledek 416 a v prvním řádku je pak zbytek 156, který nás dělí od přesné hodnoty, tj. $173\,212 = 416^2 + 156$.

1.

$$\begin{array}{cccccc} - & | & - & | & - & | \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccccc} | & - & | & - & | \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ & 8 & & & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{cccc} - & | & - & | \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & & \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{cccc} - & | & - & | \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ & 8 & 2 & \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{ccc} | & - & | \\ 1 & 9 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{ccc} | & - & | \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \end{array}$$

Obr. 4: Výpočet druhé odmocniny z čísla 173 212 indickým způsobem

Indický algoritmus je podobný „školnímu“ v tom, že nepracuje s celým odmocňovaným číslem, ale ukrajuje z něj postupně dvojice cifer. Jinak se ovšem cifry odmocniny hledají ze stejné podmínky jako v čínském algoritmu. Tudíž také občas dochází k volbě příliš velké cifry a je pak třeba se vrátit o krok zpět a zvolit cifru o jedničku menší. Čtenář nechť si sám takový případ prozkoumá při výpočtu $\sqrt{176\,212}$. (Na rozdíl od čínských textů není v indických o chybovosti žádná zmínka.) Ve srovnání s čínským algoritmem má indický dvě výhody:

1. Je úspornější, protože se provádí více kroků naráz.

2. Indičtí počtáři si všimli, že od zbytku se vždy odečítá dvojnásobek dosavadní odmocniny. Proto stačí si pamatovat tyto dvojnásobky a poslední mezivýsledek pak vydělit dvěma. V řeči čínské metody si vlastně zaznamenáváme řádek **fa**, zatímco řádek **fang** nepotřebujeme.

Právě používání zdvojnásobené části odmocniny a dělení posledního mezivýsledku dvěma je charakteristické pro indickou metodu. S takovou formou algoritmu se setkáváme později u Arabů, jejichž prostřednictvím se ve středověku dostávaly do Evropy indické znalosti matematiky (mimo jiné i desítková soustava a číslice, kterým dnes říkáme (indo)arabské.) Metoda pro výpočet druhé odmocniny se v Evropě objevuje až ve 12. století.

Z uvedených metod se nám zdá početně nejpřívětivější indická, a to i za cenu, že je třeba občas vrátit se o krok zpět a opravit volbu cifry. Určitě i vy sami všechny tři metody porovnejte. Spočítejte například následující odmocniny. Pro pohodlí uvádíme i správné výsledky.

$$\sqrt{354\,032} \doteq 595, \qquad \sqrt{364\,816} = 604,$$
$$\sqrt{93\,701} \doteq 306, \qquad \sqrt{999\,999} \doteq 999.$$

Uvědomíte si tak, že cifry z výsledku mohou nabývat jen hodnot menších než deset, že mohou být i nulové a že je důležité dělit odmocňované číslo správně na bloky a hlídat si, na které pozici se právě ve výpočtu nacházíme.

4. Závěr

Snad se naplnil cíl článku „pomoci od bezmoci z odmocnin“ a čtenář si z něj dle svého gusta vybral „školní“, čínskou či indickou metodu výpočtu odmocniny, kterou nyní umně vládne.

Literatura

[1] Bailey, D. H., Borwein, J. M., *Ancient Indian Square Roots: An Exercise in Forensic Paleo-Mathematics*, manuscript, 2011, dostupné na `http://www.davidhbailey.com/dhbpapers/india-sqrt.pdf`

[2] Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, 1. vydání, Academia, Praha 1978.

[3] Parakh, A., *Aryabhata's Root Extraction Methods*, Indian Journal of History of Science **42.2** (2007), 149–161.

[4] Wang, L., Needham, J., *Horner's Method in Chinese Mathematics: Its Origin in the Root-Extraction Procedures of Han Dynasty*, T'Oung Pao **43(5)** (1955), 345–401.

[5] Škarda Č., *Aritmetika včera a dnes* (www stránka s popisy algoritmů základních aritmetických operací), `http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc`

Abstract

Calculation of the square root of natural numbers used to be a part of mathematics taught at elementary schools. However nowadays, we prefer calculators to our heads and the simple algorithm for square roots has been almost forgotten. The aim of this article is therefore to revive this art and moreover to show three methods: school-wise, Chinese and Indian. Before we recall the algorithms, try to invent your own way of calculation of square roots!

Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D. & Čeněk Škarda
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
Trojanova 13
120 00 Praha 2
e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz