Tamara Lorencová

Karl Feuerbach a jeho věta o dotyku kružnic

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 1, 16–27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149413

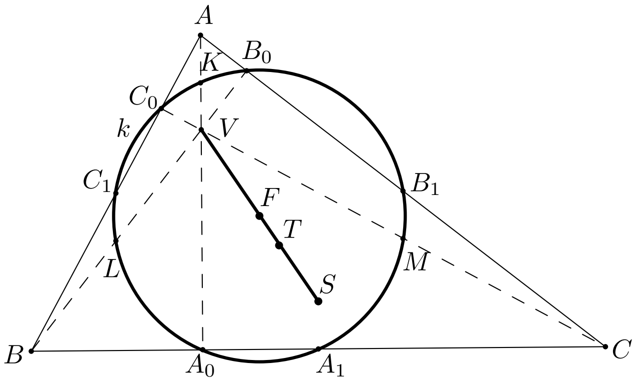
KARL FEUERBACH A JEHO VĚTA O DOTYKU KRUŽNIC

Tamara Lorencová

Úvod

V tomto článku se budeme věnovat jedné pozoruhodné kružnici, kterou spojujeme s obecným rovinným trojúhelníkem. Její objev byl původně připisován Leonhardu Eulerovi, který v roce 1765 dokázal, že *v obecném trojúhelníku mají ortický a příčkový trojúhelník společnou opsanou kružnici.* Lépe však tuto kružnici popisuje věta:

V libovolném trojúhelníku leží středy jeho stran, paty jeho výšek a středy úseček spojující vrcholy s ortocentrem na jedné kružnici.



Obr. 1

Důkaz této věty poprvé publikoval Poncelet v roce 1821. O rok později ji „znovuobjevil“ K. Feuerbach, jež ji nejen dokázal, ale doplnil i další důležitou větu popisující novou, překvapivou a hlubokou vlastnost této kružnice. Proto je tato kružnice často nazývána nejen *kružnicí devíti bodů*, ale i *Feuerbachovou kružnicí*. Dotyčnou „velkou“ Feuerbachovu větu a její možné důkazy v tomto příspěvku podrobně posoudíme.

Nyní se však ještě jednou větou vrátíme k L. Eulerovi, který je spjat s kružnicí devíti bodů také díky přímce, kterou nazýváme Eulerova přímka (daného nerovnostranného trojúhelníku). Na ní leží kromě středu kružnice opsané (S), ortocentra (V), těžiště (T) i střed kružnice devíti bodů (F). Pořadí těchto bodů je S, T, F, V a pro jejich vzdálenosti platí rovnosti:

$$|TS| = \frac{1}{3}|VS|, \quad |FT| = \frac{1}{4}|VT|.$$

Důkaz tohoto tvrzení nalezneme např. v [5, str. 47].

V oddíle 1 našeho článku uvedeme několik základních údajů a zajímavostí ze života K. Feuerbacha. V oddíle 2 zformulujeme jak „malou“ Feuerbachovu větu (tvrzení o existenci kružnice devíti bodů), tak i velkou Feuerbachovu větu, přitom první z vět doplníme původním Feuerbachovým důkazem. Hlavní částí příspěvku jsou oddíly 3 a 4, věnované dvěma různým důkazům velké Feuerbachovy věty, které jsou oba elementární, tj. přístupné i čtenářům bez hlubších geometrických znalostí (například o kruhové inverzi).

1. Ze života Karla Feuerbacha

Karl Feuerbach se narodil 30. 5. 1800 v německém městě Jena rodičům Evě Troster a Paulu Feuerbachovi, profesoru práva na univerzitě v Jeně, který napsal bavorský trestní zákoník. Eva a Paul měli jedenáct dětí, pěti synům byl udělen doktorát a tři z nich se stali dokonce profesory. Nejznámějším z bratrů byl známý filosof Ludwig Feuerbach.

Karl byl vynikajícím studentem na univerzitách v Erlangenu a ve Freiburgu, díky čemuž mu byl udělen doktorát již ve 22 letech za závěrečnou práci „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung“

(„Vlastnosti některých významných bodů rovinného trojúhelníku a navíc jimi určené přímky a útvary. Analyticky-trigonometrické pojednání“). V tomto díle autor uvádí i s důkazem svůj objev „nejhezčí věty elementární geometrie od dob Eukleida“, jež popisuje dotyk kružnice vepsané s kružnicí devíti bodů libovolného trojúhelníka. Věta je v tomto díle dokázána především pomocí trigonometrických výpočtů, ne tedy syntetickými úvahami v duchu tradice zmíněného Eukleida.

Roku 1822 se Karl Feuerbach stal profesorem matematiky na gymnáziu v Erlangenu a o rok později i na tamní vysoké škole. Dále se však stýkal s přáteli ze studií, kteří byli pověstní svou nezodpovědností a dluhy.

V roce 1824 byl zatčen s 19 studenty a rok vězněn v Mnichově za své politické názory. Za tuto neutěšenou situaci se cítil zodpovědný, což ho přivádělo k depresím. Několikrát se pokusil dokonce o sebevraždu.

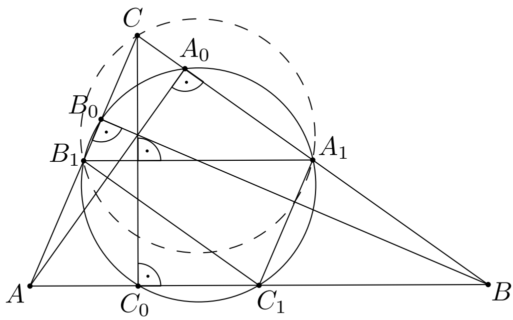
Po propuštění z vězení se Karl vrátil ke své rodině i k učitelství. Avšak deprese jej brzy připravily o práci. Po zlepšení zdravotního stavu v roce 1828 začal opět učit v Erlangenu, kde zůstal do doby, než ve vyučování vytáhl meč a hrozil žákům uříznutím hlavy, pokud nebudou umět vyřešit rovnici napsanou na tabuli. V ten den se vzdal učení a rozhodl se žít v ústraní. Šest let se oddával samotě a rozjímal nad obrazy svého synovce Anselma Feuerbacha. Zemřel 12. března 1834, tedy v pouhých 34 letech.

2. Malá a velká Feuerbachova věta

Jak jsme slíbili, v tomto oddíle uvedeme dva nejdůležitější výsledky získané Feuerbachem v jeho doktorské práci. První z nich opatříme i původním Feuerbachovým důkazem. Závěrem oddílu pojednáme všeobecně o důkazech druhého (tedy hlubšího a hlavního) Feuerbachova výsledku.

Věta (Malá Feuerbachova věta). *V libovolném trojúhelníku platí, že středy stran i paty výšek leží na jedné kružnici.*

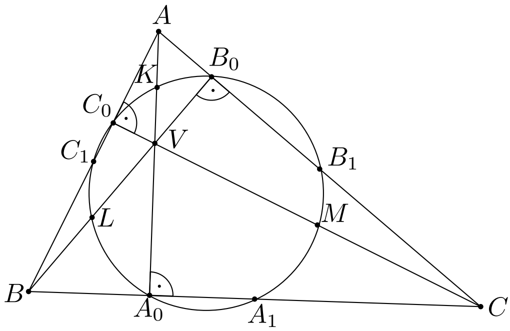
Důkaz. V trojúhelníku ABC označme A_1, B_1 a C_1 středy stran a A_0, B_0 a C_0 paty výšek (viz obr. 2).



Obr. 2

Uvažujeme-li trojúhelník $A_1B_1C_1$, pak jeho strany mají poloviční délky než strany trojúhelníku ABC. To stejné platí i pro trojúhelníky AC_1B_1, C_1BA_1 a B_1A_1C. Všechny tyto trojúhelníky jsou tedy shodné. Zároveň pro střední příčku B_1A_1 trojúhelníku ABC máme $AB \parallel B_1A_1$. Protože trojúhelník B_1A_1C má poloviční strany než trojúhelník ABC, má i poloviční výšky. Jejich výšky z vrcholu C však leží na stejné polopřímce s počátkem C. To už znamená, že bod C přejde v osové souměrnosti podle osy B_1A_1 do bodu C_0. Ze shodnosti trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a B_1A_1C vyplývá také shodnost jejich opsaných kružnic. Obě tyto kružnice procházejí společnými body B_1A_1, jedna je tedy obrazem druhé v osové souměrnosti podle přímky B_1A_1. V této souměrnosti přechází také bod C do bodu C_0, jež proto leží na kružnici opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Analogickou úvahou pro souměrnosti podle os A_1C_1, B_1C_1 dostáváme, že na kružnici opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží i body B_0, A_0. Důkaz je tedy hotov. □

Vidíme, že Feuerbach ve svém podání zmiňuje pouze šest, a nikoliv devět významných bodů na jedné kružnici. Ukažme však, že tvrzení o třech „chybějících“ bodech, kterými jsou středy spojnic vrcholů s ortocentrem (body K, L, M na obrázku 3, zvané někdy Eulerovy body), lze již snadno dokázat opětovným užitím malé Feuerbachovy věty.



Obr. 3

Uplatníme ji v trojúhelníku BCV, jehož paty jeho výšek jsou totožné s patami výšek trojúhelníku ABC, jsou to tedy body A_0, B_0, C_0. Na kružnici procházející těmito body leží podle předchozí věty také středy stran trojúhelníku. Pro trojúhelník BCV jsou to body A_1, M, L. Analogicky pro trojúhelník CAV se shodnými patami výšek leží na této kružnici i středy stran B_1, K, M.

Dokázali jsme, že na dané kružnici leží všech devět významných bodů.

Nyní konečně přejdeme k výsledku, který Feuerbacha proslavil a kterým se budeme zabývat po celý zbytek našeho textu.

Věta (Velká Feuerbachova věta). *Pro každý trojúhelník platí, že kružnice devíti bodů se vnitřně dotýká kružnice vepsané*[5] *a vně dotýká všech tří kružnic připsaných stranám daného trojúhelníku.*

Často jsou Feuerbachovým jménem nazývány i pomocné věty, které Feuerbach k celému pracnému důkazu svého „životního“ matematického výsledku potřeboval. Dnes je již známo více účinných postupů a je celkem jasné, že žádný jednoduchý důkaz (bez užití hlubší geometrické teorie) neexistuje. Proto je označení Feuerbachovy věty jako „velké“ adekvátní.

[5] V případě rovnostranného trojúhelníku ovšem tyto dvě kružnice splývají.

Sám Feuerbach použil postup trigonometrických výpočtů vedoucí k vyjádření vzdáleností:

$$|FO| = \frac{r}{2} - \rho, \quad |FI_a| = \frac{r}{2} + \rho_a, \quad |FI_b| = \frac{r}{2} + \rho_b, \quad |FI_c| = \frac{r}{2} + \rho_c,$$

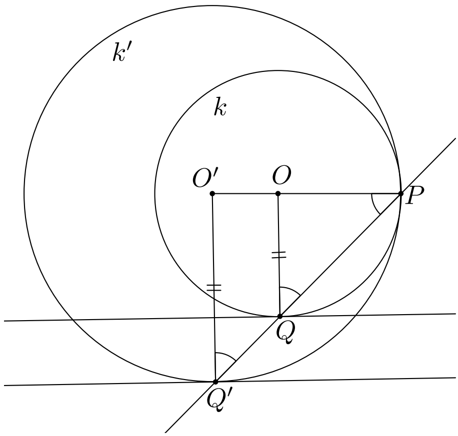
kde r je poloměr kružnice opsané, F je střed Feuerbachovy kružnice (o poloměru $\frac{r}{2}$), O střed kružnice vepsané a ρ její poloměr; I_a, I_b, I_c středy kružnic připsaných a ρ_a, ρ_b, ρ_c jejich poloměry. Z těchto rovností již rovnou vyplývá, že Feuerbachova kružnice se všech zmiňovaných kružnic popsaným způsobem dotýká. Tento postup je sice z hlediska použitých prostředků jednoduchý, ale jeho realizace je početně náročná a zdlouhavá. V současných učebnicích se nejčastěji objevuje kratší důkaz užitím kruhové inverze ([3], [4]), avšak například v české monografii [5] o geometrii trojúhelníku žádný důkaz uveden není. Hlavní motivací k sepsání našeho příspěvku tak bylo seznámit čtenáře s dvěma málo dostupnými elementárními „nepočetními“ postupy důkazů velké Feuerbachovy věty. Na rozdíl od stručně pojatých článků, ze kterých jsme je převzali, uvedeme tyto důkazy se všemi potřebnými podrobnostmi.

3. Elementární důkaz

V tomto oddíle podrobně vyložíme důkaz velké Feuerbachovy věty, který je založen na elementárních poznatcích syntetické geometrie a který jsme převzali z článku [2]. V samotném závěru důkazu využijeme následující pomocné tvrzení.

Lemma. *Nechť P je společný bod kružnic k, k'. Bodem P veďme přímku, jež protne kružnice k, k' po řadě v bodech Q, Q'. Jsou-li tečny ke kružnicím k, k' sestrojené v bodech Q, Q' rovnoběžné, pak se kružnice k a k' v bodě P navzájem dotýkají.*

Důkaz. Označme O, O' po řadě středy kružnic k, k' (obr. 4). Trojúhelníky POQ, $PO'Q'$ jsou rovnoramenné a platí $|\sphericalangle OPQ| = |\sphericalangle OQP|$, $|\sphericalangle O'PQ'| = |\sphericalangle O'Q'P|$. Z rovnoběžnosti tečen v bodech Q, Q' plyne i rovnoběžnost poloměrů OQ, $O'Q'$ kružnic k, k', ke kterým jsou tečny kolmé. Pro rovnoběžky OQ, $O'Q'$ platí



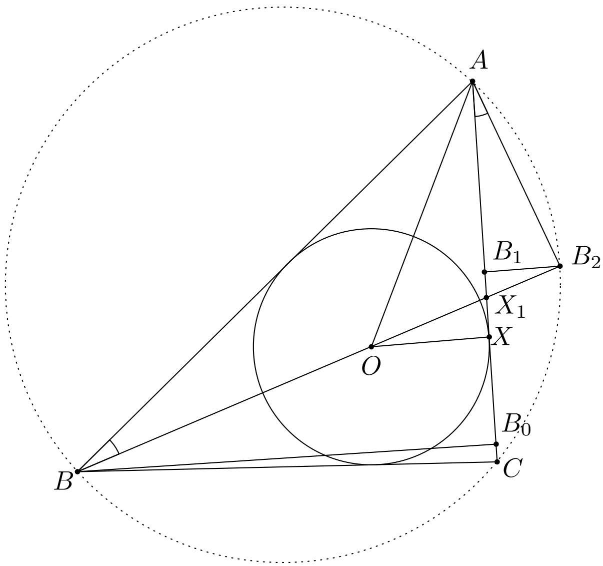
Obr. 4

tedy shodnost úhlů $|\sphericalangle OQP| = |\sphericalangle O'Q'P|$. Celkově jsme získali $|\sphericalangle OPQ| = |\sphericalangle O'PQ'|$, z čehož plyne, že body O, O', P leží na jedné přímce. Bod P leží tedy na spojnici středů kružnic k, k' a zároveň je jejich společným bodem, což odpovídá pouze situaci, kdy je bodem jejich dotyku. $\square$

Nyní přejdeme k samotnému důkazu velké Feuerbachovy věty. Kromě již zmíněných pat výšek A_0, B_0, C_0 a středů stran A_1, B_1, C_1 trojúhelníku ABC označme X bod dotyku kružnice vepsané se stranou AC. Dále označme X_1, B_2 průsečíky osy úhlu CBA po řadě se stranou AC a kružnicí opsanou. Na této ose samozřejmě leží také střed O kružnice vepsané (obr. 5).

Jelikož bod B_2 leží na ose úhlu ABC, jsou shodné obvodové úhly ABB_2 a CBB_2, a tedy i příslušné tětivy AB_2 a CB_2. Z rovnoramenného trojúhelníku ACB_2 tak máme $B_2B_1 \perp AC$. Dále platí:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle B_2AO| &= |\sphericalangle B_2AC| + |\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle B_2BC| + |\sphericalangle CAO| = \\ &= |\sphericalangle OBA| + |\sphericalangle OAB|,\end{aligned}$$



Obr. 5

což odpovídá velikosti úhlu B_2OA. Trojúhelník AB_2O je tedy rovnoramenný s rameny $|B_2A| = |B_2O|$. Jelikož zároveň platí $|\sphericalangle B_2AC| = |\sphericalangle B_2BC| = |\sphericalangle B_2BA|$, jsou trojúhelníky B_2AX_1, B_2BA podobné. Z podobnosti těchto trojúhelníků vyplývá rovnost poměrů jejich stran přilehlých ke společnému vrcholu B_2, kterou zapíšeme jako rovnost součinů $|B_2X_1| \cdot |B_2B| = |B_2A|^2$. S přihlédnutím k rovnosti $|B_2A| = |B_2O|$ dostáváme $|B_2X_1| \cdot \cdot |B_2B| = |B_2O|^2$.

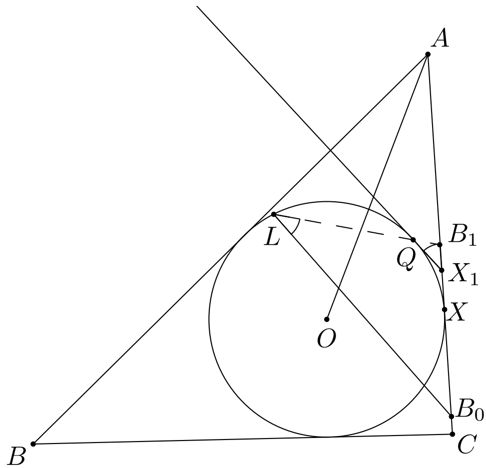
Protože B_0, X, B_1 jsou kolmé průměty kolineárních bodů B, O, B_2 na přímku AC, platí

$$\frac{|B_1X_1|}{|B_2X_1|} = \frac{|B_1B_0|}{|B_2B|} = \frac{|B_1X|}{|B_2O|}.$$

Ve jmenovatelích zlomků jsou délky z odvozené rovnosti $|B_2X_1| \cdot$

$\cdot |B_2B| = |B_2O|^2$. Proto platí i analogická rovnost pro čitatele: $|B_1X_1| \cdot |B_1B_0| = |B_1X|^2$.

V další části důkazu už budeme potřebovat předpoklad, že trojúhelník ABC není rovnostranný, že tedy například platí $|AB| > |BC|$ neboli $|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle BAC|$. Pak B_1, X_1, X, B_0 je pořadí čtyř různých bodů na polopřímce AC. Uvážíme druhou tečnu z bodu X_1 ke kružnici vepsané (různou od tečny AC). Nechť Q je její bod dotyku a nechť L je druhý průsečík přímky B_1Q s kružnicí vepsanou (obr. 6).



Obr. 6

Použitím mocnosti bodu B_1 ke kružnici vepsané získáváme rovnost $|B_1Q| \cdot |B_1L| = |B_1X|^2$. Srovnáním odvozených rovností $|B_1X_1| \cdot |B_1B_0| = |B_1X|^2$ a $|B_1Q| \cdot |B_1L| = |B_1X|^2$ obdržíme rovnost $|B_1X_1| \cdot |B_1B_0| = |B_1Q| \cdot |B_1L|$, jež vyjadřuje mocnost bodu B_1 ke kružnici, na které leží body X_1, B_0, Q, a tedy i bod L. Z tětivového čtyřúhelníku X_1QLB_0 tak dostáváme

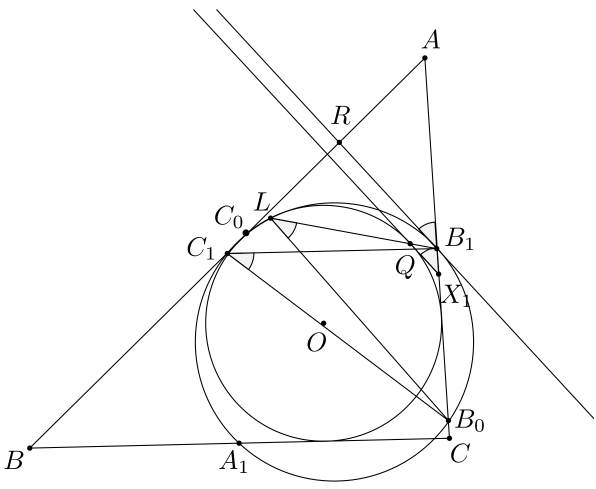
$$|\sphericalangle B_1LB_0| = |\sphericalangle QLB_0| = 180^\circ - |\sphericalangle B_0X_1Q| = |\sphericalangle QX_1A|.$$

Tečny X_1X a X_1Q jsou souměrně sdružené podle přímky X_1O, proto $|\sphericalangle B_0X_1Q| = 2|\sphericalangle OX_1X|$, a tudíž

$$\begin{aligned}180^\circ - |\sphericalangle B_0X_1Q| &= 180^\circ - 2|\sphericalangle OX_1X| = \\ &= 180^\circ - 2(|\sphericalangle X_1BA| + |\sphericalangle X_1AB|) = \\ &= 180^\circ - 2\left(\frac{|\sphericalangle ABC|}{2} + |\sphericalangle CAB|\right) = \\ &= |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle CAB|.\end{aligned}$$

Vypočetli jsme tak (kladnou) velikost obou shodných úhlů B_1LB_0 a QX_1A, se kterými budeme v další části důkazu pracovat.

Nyní do našich úvah konečně vstoupí Feuerbachova kružnice. Uvažme její tečnu v bodě B_1 a označme R její průsečík s přímkou AB (obr. 7).



Obr. 7

Úsekový úhel C_1B_1R je roven obvodovému úhlu $C_1A_1B_1$, jenž odpovídá úhlu CAB v podobnosti trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a ABC.

Dále pro ně platí $A_1B_1 \parallel AB$, a proto $|\sphericalangle A_1B_1C| = |\sphericalangle BAC|$. Z toho plyne $|\sphericalangle RB_1A| = |\sphericalangle C_1B_1A| - |\sphericalangle C_1B_1R| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle CAB|$. Stejný výsledek jsme obdrželi pro úhel B_1LB_0, který je tudíž s úhlem RB_1A shodný.

Uvažme dále, že obvodový úhel $B_1C_1B_0$ je shodný s úsekovým úhlem u vrcholu B_1, jenž je shodný s vrcholovým úhlem RB_1A. Celkem tak dostáváme shodnost úhlu $B_1C_1B_0$ s úhlem B_1LB_0, jež znamená, že bod L leží na oblouku $B_1C_1B_0$ Feuerbachovy kružnice. Je to tedy její společný bod s kružnicí vepsanou.

Jak víme, úhel RB_1A je shodný nejen s úhlem B_1LB_0, ale také s úhlem QX_1A. Z toho okamžitě vyplývá, že tečna X_1Q kružnice vepsané a tečna B_1R Feuerbachovy kružnice jsou rovnoběžné. Jsou tedy splněny všechny předpoklady úvodního lemmatu, a proto se vepsaná a Feuerbachova kružnice dotýkají v bodě L, a to vnitřně, neboť bod L leží vně úsečky QB_1.

Vnější dotyk Feuerbachovy kružnice s kružnicemi připsanými lze dokázat analogicky.

Dokončení příště.

Literatura

[1] Ayme, J. L. *Feuerbach's Theorem a new purely synthetic proof.* 2010, překlad: Rosado, F. B., internetový zdroj: `http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Feuerbach1.pdf`

[2] Grinberg, D. *Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie*, internetový zdroj: `http://www.matheraetsel.de/texte/Feuerbach.pdf`

[3] Pedoe, D. *Circles: a mathematical view.* The Mathematical Association of America. 1995.

[4] Prasolov, V. *Plane Geometry part 2.* překlad: Leites D., internetový text, originál: `http://www.mccme.ru/prasolov`

[5] Švrček, J., Vanžura, J. *Geometrie trojúhelníka.* Polytechnická knižnice. Praha 1988.

Abstract

The text is about Karl Feuerbach and his remarkable theorems. First, we describe his life and the path to mathematics. Then we remember the "small" Feuerbach's theorem about nine points circle, with brief proof. Finally, we state the "big" Feuerbach's theorem about tangent circlec, and two the most interesting proofs.

Mgr. Tamara Lorencová
Ústav matematiky a statistiky
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: tamara.nedevova@centrum.cz