Petr Bogan

Rituální geometrie védských Indů jako inspirace pro učitele matematiky

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 3, 136–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149396

RITUÁLNÍ GEOMETRIE VÉDSKÝCH INDŮ JAKO INSPIRACE PRO UČITELE MATEMATIKY

Petr Bogan

Jako vysokoškolský učitel matematiky se pravidelně setkávám se studentkami a studenty, kteří v nedávné době absolvovali střední školu. Mnoho z nich má výrazné neznalosti či nedokonale vypěstované návyky z mnoha oblastí základů matematiky. Snad nejvíce jsou tyto neznalosti patrné v oblasti geometrie, především pak geometrie syntetické. Dalším neduhem dnešní doby je závislost lidí na různých elektronických pomůckách. Je bezesporu velkou výhodou, že dnešní studenti mají přístup k výkonné výpočetní technice a vysokorychlostnímu Internetu. Tyto nástroje však nejsou všemocné a často jejich nevhodné použití při výuce naopak potlačuje logické myšlení a zdravý úsudek. Pro mnohé studenty je pak smyslem matematiky hledání správného programu, který jim poskytne výsledek. Při návštěvě Indie jsem naopak obdivoval kreativitu lidí, kteří s minimem prostředků a nástrojů dokázali produkovat neuvěřitelné výtvory. Schopnost řešit problémy je u těchto lidí vyvinuta na pozoruhodně vysoké úrovni. Podle mého názoru by bylo třeba do výuky zařadit více hodin, při kterých jsou studenti vybaveni pouze jednoduchými nástroji, pomocí kterých budou řešit úlohy vyžadující kreativní přístup.

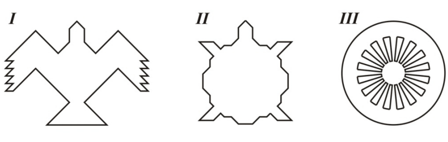
Před několika lety jsem spolupracoval s prof. Vopěnkou na tvorbě knihy (Al Chvárizmí, 2008). Při studiu kořenů matematiky, ve zmíněné knize popsané, mne zaujala rituální geometrie védských Indů. Bráhmani, příslušní ke kočovným kmenům Árjů, prováděli komplikované a do detailu předepsané rituály, při nichž konstruovali, za použití jednoduchých nástrojů jako provaz a dřevěné tyčky, složité geometrické obrazce. Úlohy, které řešili před téměř třemi tisíci lety, mohou být inspirací pro dnešní učitele k přípravě netradičních hodin matematiky.

Jako zdroj obecných informací jsem použil detailní záznam ceremonie z roku 1975 (Staal, 2010) a encyklopedii védských rituálů (Ranade, 2006). Při analýze informací týkajících se matematických znalostí, dovedností a překladu jednotlivých *sūter* jsem vycházel především z (Plofker, 2009) s přihlédnutím k (Imhausen et al., 2007) a (Datta, 1993).

Védské rituály a Śulba sūtry

Ohňové rituály probíhaly na vrchu cihlových ceremoniálních platforem zvaných *citi*, umístěných na rituálně upravených plochách zvaných *vedi*, uvnitř obětníkova domu nebo na pozemku v jeho okolí. Zmíněné objekty byly konstruovány na míru *yajamāna*, patrona oběti, v jehož prospěch se rituál pořádal.

Rituály dělíme do dvou skupin a to na *nitya* (povinné, každodenní, či nezbytné) a *kāmya* (zvláštní, plnící přání či nepovinné). Z našeho hlediska jsou zajímavé především velké mnohadenní *kāmya* rituály. Při nich jsou budovány platformy *citi* komplikovaných tvarů, závislých na účelu prováděného rituálu. Mezi nejznámější patří *śyena* (sokol), *kūrma* (želva), *ratha-cakra* (kolo od vozu) a další. Přestože se zmíněné platformy liší tvarem, obsah jejich ploch je vždy stejný. Dále mají všechny pět vrstev po 200 cihlách, obsahují tedy 1000 cihel.



Obr. 1: *Citi* ve tvarech *śyena* (I), *kūrma* (II) a *ratha-cakra* (III)

Specifikace rozměrů, postupy a nástroje, užívané při konstruování zmíněných rituálních platforem a ceremoniálních ploch jsou shrnuty v *Śulba sūtrách* neboli „pravidlech pro provaz“. Tyto texty jsou řazeny mezi *vedāṅgy*[1] (přesněji mezi *kalpa sūtry*) a patří

[1] *vedāṅgy* – „údy véd“, pomocné disciplíny tradičně spojené se studiem

z hlediska matematiky k nejdůležitějším dílům védské slovesnosti. Mezi významné autory těchto děl řadíme *Baudhāyanu*, *Āpastambu*, *Mānavu* a *Kātyayanu*. Zmínění autoři nejsou historicky doloženými osobnostmi a jsou řazeni do prvního tisíciletí před naším letopočtem, přesněji od nejstaršího *Baudhāyany* (kolem roku 800 př. n. l.) až po nejmladšího *Kātyayanu* (kolem roku 200 př. n. l.). Mezi další dnes známé autory se řadí *Satyaṣāḍha*, *Maitrāyaṇiya*, *Vārāha* a *Vadhula*.

Nástroje užívané ke konstrukci platforem vycházejí z předmětů denní potřeby příslušníků kočovných kmenů. Základní užívané nástroje jsou:

- *rajju* – provaz, na kterém jsou značky ve specifických vzdálenostech. Tento nástroj sloužil jako ekvivalent dnešního pravítka s měřítkem a kružítka,
- *śaṅku* – dřevěné kolíky, tedy tyče sloužící k označování, resp. fixaci různých bodů nebo jako referenční body pro provaz,
- *veṇu* – bambusová hůlka, jejíž délka je rovna výšce *yajamāna* v pozici se vzpaženými pažemi (toto je bráno jako jednotka míry *puruṣa*, čemuž odpovídá 120 *aṅgul*[2]).

Vybrané úlohy řešené při konstrukci ceremoniálních platforem

Při konstruování rituálních platforem i pozemků, na nichž jsou stavěny, se řeší značné množství geometrických úloh:

- Konstrukce kolmice k dané úsečce v jejím krajním bodě;
- konstrukce čtverce, obdélníku nebo rovnoramenného lichoběžníku daných rozměrů;
- konstrukce kruhu s obsahem přibližně rovným obsahu daného čtverce;

véd. K nim náleží *śikṣā* – fonetika, znalost písmen, artikulace; *kalpa* – rituál; *vyākaraṇa* – gramatika; *nirukta* – etymologie, vysvětlení důležitých védských slov; *chandas* – metrika; *jyotiṣa* – astronomie. Fonetika a metrika slouží ke korektní recitaci a vyslovování, gramatika a etymologie slouží správnému porozumění, astronomie a rituály slouží k přesnému načasování a provedení rituálů.

[2] *Aṅgula* je délková jednotka „prst“, odpovídající 6 až 8 zrnům ječmene yava položeným jedno vedle druhého, 14 zrnům prosa nebo 34 zrnům sezamu.

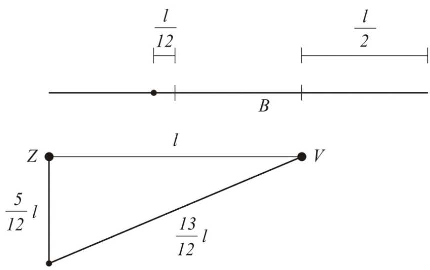
- přibližná konstrukce kruhu s dvojnásobnou velikostí obsahu oproti danému kruhu;
- konstrukce čtverce, jehož obsah je roven násobku či dílu obsahu jiného čtverce;
- konstrukce čtverce, jehož obsah je roven součtu nebo rozdílu obsahů dvou daných čtverců;
- transformace obdélníku na čtverec se stejným obsahem;
- konstrukce trojúhelníku nebo kosočtverce, jehož obsah je roven obsahu daného čtverce.

Řešení některých těchto úloh je popsáno v následujícím textu.

Konstrukce kolmice k dané úsečce v jejím krajním bodě
V *Śulba sūtrách* je uvedeno několik postupů pro situace, kdy je pata kolmice buď ve středovém, nebo v koncovém bodě úsečky. Pro příklad uveďme elegantní konstrukci čtverce, která zmíněnou konstrukci kolmice obsahuje a je specifická pro konstruování provazem. Následující sūtra popisuje konstrukci čtverce nad danou úsečkou ZV (západ – východ).

Délka je taková jako [požadovaný] rozsah; v západní třetině [této délky] zvětšené o její polovinu, na [místě] zmenšeném o šestinu [ze třetiny] se vytvoří značka. Upevní se [konce provazu] na dva konce východně-západní spojnice, [provaz] se napne jižně [držíme jej] za značku, vytvoří se značka [v bodě kterého dosáhneme]. Stejným způsobem [se napne provaz] severně; a ve zbylých dvou směrech po obrácení [konců provazu]. To je vymezení. [Je možné] zkrácení nebo prodloužení [strany pro vytvoření požadované poloviční strany čtverce s ohledem na] tuto značku.
(*Āpastamba śulba sūtra* 1.2)

Základem zmíněné konstrukce je pravoúhlý trojúhelník s poměrem délek stran 5 : 12 : 13. Použije se provaz, jehož délka je o polovinu větší než vzdálenost l bodů Z a V, které tvoří stranu konstruovaného čtverce. Nejprve se vytvoří značka na provazu zvaná *nirañchana*, která po napnutí provazu, jehož konce jsou upevněny v bodech Z a V, vytvoří zmíněný pravoúhlý trojúhelník. Užije se následující postup: provaz rozdělíme na třetiny,



Obr. 2: Konstrukce kolmice k dané úsečce v jejím koncovém bodě

západní třetinu opět na třetiny a nejvýchodnější z posledně zmíněných třetin rozdělíme na polovinu. Tím je značka sestrojena. Značka je v pěti šestinách západní třetiny provazu, neboli v pěti osmnáctinách jeho celkové délky, což odpovídá $\frac{5}{18} \cdot \frac{3}{2} \cdot l = \frac{5}{12} \cdot l$. Poté se konce provazu upevní k bodům Z a V. Provaz se uchopí za značku *nirañchana* a jeho napnutím vzniká pravý úhel. Následné dokončení čtverce je již triviální. Postup konstrukce je znázorněn na obr. 2.

Obdobná konstrukce existuje i pro trojúhelník s poměrem délek stran 3 : 4 : 5. Použije se prodloužený provaz o délce dvojnásobku vzdálenosti bodů Z a V. Značka se vytvoří ve třech osminách délky prodlouženého provazu.

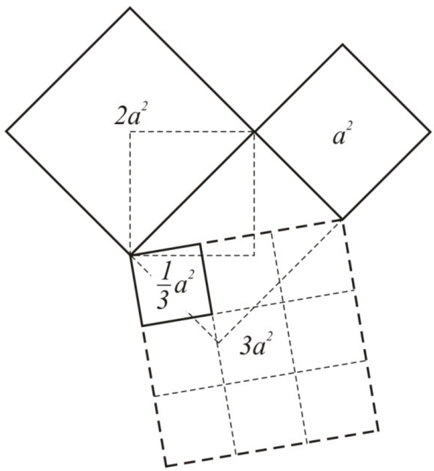
Mezi důležité *sūtry* je možno zařadit ty, které popisují vztah dnes známý pod pojmem Pythagorova věta. Závislost mezi obsahy čtverců sestrojených nad odvěsnami a přeponou pravoúhlého trojúhelníku je uvedena jednak ve speciálním tvaru, kdy jsou délky odvěsen shodné (*Āpastamba śulba sūtra* 1.5), rovněž tak i v obecném případě, kdy jsou rozdílné (*Āpastamba śulba sūtra* 1.6).

Konstrukce čtverce, jehož obsah je roven racionálnímu násobku obsahu daného čtverce

Provaz [rovný] úhlopříčce [čtvercového] čtyřúhelníku vytváří dvojnásobek plochy. Je to zdvojnásobovač (dvi-karanī, „zdvojovač“) čtverce.
(*Āpastamba śulba sūtra* 1.5)

Míra je šířkou, zdvojovač délkou. Provaz [rovný] přeponě je ztrojovač (tri-karanī).
(*Āpastamba śulba sūtra* 2.2)

Ztřetinovač (tṛtīya-karaṇī) je vysvětlen prostřednictvím tohoto. [Je to] dělení na devět dílů [ze čtverce nad ztrojovačem].
(*Āpastamba śulba sūtra* 2.3)

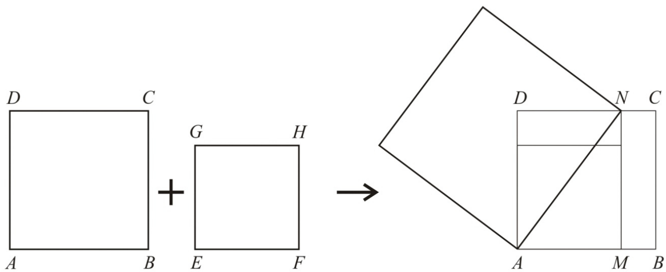


Obr. 3: Ztrojovač a ztřetinovač čtverce

Ve zmíněných *sūtrách* je popsán postup vytvoření čtverce, jehož obsah je roven násobku nebo dílu obsahu daného čtverce. Pravoúhlý trujúhelník, nad jehož jednou odvěsnou sestrojený čtverec má obsah n-násobku plochy daného čtverce a nad druhou jednonásobku, vytvoří nad přeponou čtverec o obsahu $n+1$ násobku daného čtverce. Vhodným rozdělením čtverce nad přeponou lze získat naopak čtverec o obsahu rovném dílu původního čtverce. Na obr. 3 je znázorněn postup při konstrukci čtverců s obsahem rovným trojnásobku a jedné třetině obsahu původního čtverce.

Konstrukce čtverce, jehož obsah je roven součtu nebo rozdílu obsahů dvou daných čtverců

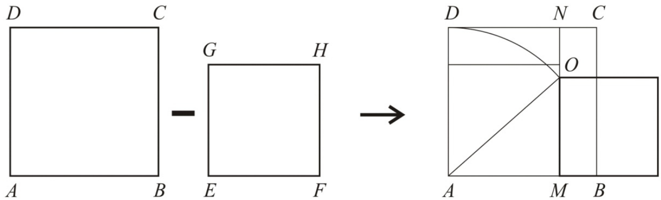
Sloučení dvou sobě rovných [čtvercových] čtyřúhelníků [již bylo] uvedeno. [Nyní] sloučení dvou [čtvercových] čtyřúhelníků s individuálními [rozdílnými] rozměry. Odřízni z většího část se stranou menšího. Provaz [rovný] úhlopříčce části [vytváří plochu, která] slučuje obě. To již bylo uvedeno. (*Āpastamba śulba sūtra* 2.4)



Obr. 4: Součet čtverců

Vytvoření čtverce, jehož obsah je roven součtu obsahů dvou daných čtverců, je jednoduchou aplikací Pythagorovy věty. Jak je znázorněno na obr. 4, jsou dány čtverce $ABCD$ a $EFGH$, z nichž první zmíněný má větší obsah. Na stranu většího čtverce AB se nanese od bodu A úsečka o délce rovné délce strany menšího z čtverců, čímž vznikne bod M. Následně se sestrojí obdélník $AMND$, délky jehož stran jsou rovny délkám stran původních čtverců. Čtverec sestrojený nad úhlopříčkou tohoto obdélníku, tedy nad úsečkou AN je hledaným čtvercem.

Odebrání [čtvercového] čtyřúhelníku ze [čtvercového] čtyřúhelníku: Odřízni část většího, tolik jako je strana toho co má být odebrán. Přenes [dlouhou] stranu větší [části] úhlopříčně na další [dlouhou] stranu. Odřízni to [druhou stranu] kam to padlo. S odříznutou [stranou je vytvořen čtverec rovný] rozdílu.
(*Āpastamba śulba sūtra* 2.5)



Obr. 5: Rozdíl čtverců

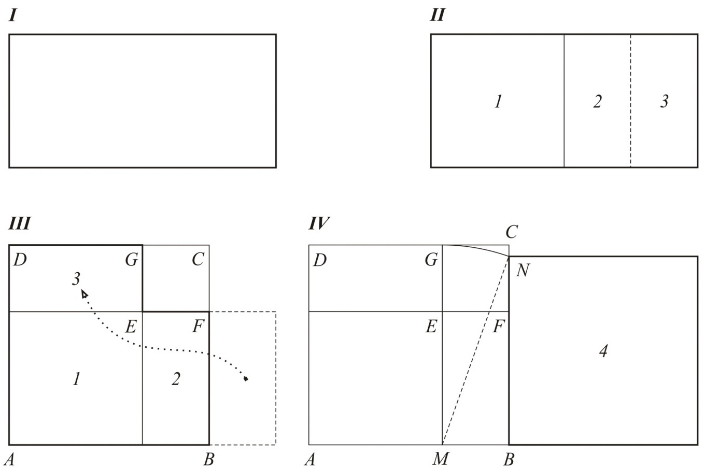
Vytvoření čtverce, jehož obsah je roven rozdílu obsahů dvou daných čtverců, je opět jednoduchou aplikací Pythagorovy věty. Jak je znázorněno na obr. 5, začátek konstrukce je shodný s předešlou úlohou a to až po vytvoření obdélníku $AMND$. Nyní je třeba vytvořit pravoúhlý trojúhelník, jehož délka přepony bude rovna délce strany většího ze čtverců a délka jedné z odvěsen bude rovna délce strany menšího ze čtverců. Sestrojíme kružnici se středem v bodě A a poloměrem rovným délce úsečky AD. Bod, ve kterém kružnice protne úsečku MN, se označí O. Tím vznikne hledaný trojúhelník a čtverec sestrojený nad odvěsnou MO je hledaným čtvercem.

Transformace obdélníku na čtverec se stejnou velikostí obsahu

Přejeme-li si [převést] obdélníkový čtyřúhelník na rovnostranný čtyřúhelník: Odřízneme [čtvercovou část pravoúhelníku] s [jeho] šířkou, [a] majíce zbytek, umístěme [poloviny] na dvě přilehlé strany [čtvercové části]. Vyplníme chybějící [část] dalším [čtvercem]. Je to odebrání [které bylo právě] uvedeno.
(*Āpastamba śulba sūtra* 2.7)

Další, hojně se při konstrukcích ceremoniálních platforem vyskytující úlohou, je transformace jednoho základního rovinného obrazce v jiný se stejným obsahem. Úloha je rozložena do dvou kroků. Nejprve se výchozí obrazec transformuje na čtverec a poté tento na výsledný obrazec. V případě konstrukce platformy s násobkem obsahu původní plochy se jako prostřední krok ještě vkládá konstrukce čtverce s násobným obsahem oproti zadanému. Jako příklad je uvedena transformace obdélníku na čtverec. Konstrukce je zachycena na obr. 6. Výchozí obdélník je zachycen v I. Z něj se odřízne čtverec 1, a zbytek se rozdělí na shodné části 2 a 3, jak je zachyceno v II. Díl 3 se přesune ke čtverci 1, jak je znázorněno v III a dále se vzniklý obrazec $ABFEGD$ doplní na čtverec $ABCD$. Následně se již pomocí dříve popsané konstrukce sestrojí čtverec, jehož obsah je roven rozdílu obsahů čtverců $ABCD$ a $EFCG$. K tomu se užije trojúhelník MBN jehož přepona MN má délku rovnu délce strany čtverce $ABCD$ a délku odvěsny MB rovnu délce strany čtverce $EFCG$. Obsah čtverce 4, sestrojeného nad odvěsnou BN, je roven zmíněnému rozdílu obsahu čtverců, tedy obsahu obrazce $ABFEGD$, který je shodný s obsahem původního obdélníku.

Sestrojení opačné konstrukce, tedy transformace čtverce na obdélník, jehož délka jedné strany je dána, doporučuji čtenáři jakožto samostatné cvičení. O této konstrukci hovoří *Āpastamba śulba sūtra* 3.1.



Obr. 6: Transformace obdélníku na čtverec

Konstrukce kruhu s obsahem přibližně rovným obsahu daného čtverce

Přejeme-li si převést [čtvercový] čtyřúhelník na kruh: Veď [provaz] ze středu k rohu [čtverce]. [Potom ho] napni vůči straně, nakresli kružnici s [poloměrem rovným polovině strany] plus třetině zbytku [poloviny úhlopříčky nad polovinou strany]. To je s konečnou platností [poloměr] kružnice. Tolik, kolik je přidáno [k okrajům kruhu] je odebráno [od rohů čtverce].
(*Āpastamba śulba sūtra* 3.2)

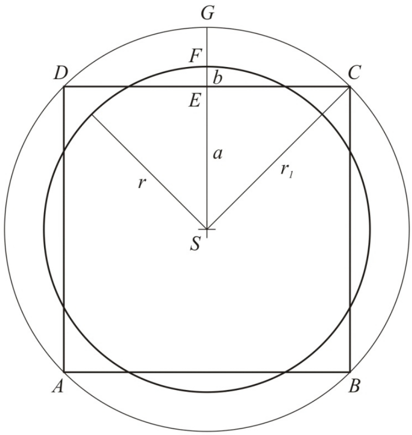
Úkolem je převést čtverec na kruh se stejným obsahem (viz obr. 7). Přestože je uvedená konstrukce pouze přibližná, není tento fakt v originálním textu zmíněn. Nechť je dán čtverec $ABCD$. Pomocí provazu opíšeme čtverci kružnici se středem S (střed zadaného čtverce) a poloměrem rovným polovině délky úhlopříčky tohoto čtverce, tedy r_1. Dále provaz napneme směrem kolmým na stranu čtverce a vyznačíme na něm délku poloviny strany čtverce zvětšenou o třetinu rozdílu poloměru r_1 a poloviny strany čtverce a. Tímto poloměrem opíše okolo středu S kružnici, která ohraničuje hledaný kruh.

U přibližné konstrukce je třeba uvést, jak přesná ve skutečnosti je. Při výpočtu budu vycházet z označení uvedeného na obr. 7. Poloměr konstruovaného kruhu je roven součtu $a + b$, kde a je polovina délky hrany čtverce a b je třetina rozdílu poloviny délky úhlopříčky a poloviny délky strany čtverce. Platí tedy:

$$r = a + b,$$
$$r = a + \frac{1}{3}\left(r_1 - a\right).$$

Toto můžeme upravit do tvaru:

$$r = a + \frac{1}{3}\left((a\sqrt{2} - a\right),$$
$$r = \frac{a}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right).$$



Obr. 7: Transformace čtverce na kruh

Dosazením do vzorce pro obsah kruhu zjistíme, že velikost S_k plochy daného kruhu je rovna:

$$S_k = \pi r^2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{9}\pi a^2 \approx 4{,}069a^2.$$

Plocha původního čtverce je rovna:

$$S_c = (2a)^2 = 4a^2.$$

Rozdíl obsahů $S_k - S_c$ je roven $a^2\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{9}\pi - 4\right)$. Obsah kruhu je tedy přibližně o 1,7 % větší než obsah původního čtverce.

Závěr

Rituální geometrie starých Indů, jejíž nevelkou část jsem popsal uvedením několika *sūter*, v sobě skrývá z hlediska učitele matematiky velký potenciál. Tuto geometrii lze provádět „v malém“, tedy na papíře s použitím pravítka a kružítka nebo ve vhodném počítačovém programu, ale rovněž „ve velkém“, tedy za použití provazu přímo v terénu. Žáci či studenti se mohou naučit vytyčovat v terénu základní útvary, například obdélníkové, čtvercové nebo kruhové záhonky. Mohou transformovat jejich tvary, slučovat či rozdělovat záhonky tak, aby sloužily pro stejné množství rostlin, nebo stěhovat je jinam se zachováním obsahu, ale změnou proporcí a podobně. Je možné vymýšlet vlastní *sūtry*, sestavené na míru konkrétních úloh, navrhovat vlastní konstrukce pomocí provazu a značek na něm umístěných tak, aby výsledný nástroj, tedy provaz se značkami, byl co nejvíce efektivní. Nezanedbatelným hlediskem je i propojení matematiky s jinými obory, její přenesení mimo učebnu a skutečnost, že po teoretickém vymýšlení a praktickém aplikování, vidí studenti hotové dílo, např. záhon připravený pro přesazení rostlin.

Literatura

[1] Al Chvárizmí. (2008). *Aritmetický a algebraický traktát.* Nymburk: OPS.

[2] Staal, F. (2010). *Agni: The Vedic Ritual of the Fire Altar* (Set). Delhi: Motilal Banarsidass publishers.

[3] Ranade, H. G. (2006). *Illustrated Dictionary of Vedic Rituals.* New Delhi: Indira Gandhi National Centre for the Arts.

[4] Imhausen, A., Robson, E., Dauben, J. W., Plofker, K. & Berggren, J. L. (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook.* Edited by V. J. Katz. Princeton: Princeton University Press.

[5] Plofker, K. (2009). *Mathematics in India.* Princeton: Princeton University Press.

[6] Datta, B. (1993). *Ancient Hindu geometry: the science of the Sulba.* New Delhi: Cosmo Publications.

Abstract

The Śulba sūtras, or "Rules of the cord", are intended to lay down the rules of demarcation of various sacrificial altars, pandals and places for sacred fire. This part of Vedic culture contains unique, just about three thousand years old ritual geometry. Constructions, such as addition or subtraction of squares or area-preserving transformations of figures, are performed with the use of a rope and wooden poles. This article presents some of the geometric rules described in the mentioned texts and introduces them as interesting teaching tools for mathematics teachers.

Petr Bogan
Fakulta životního prostředí UJEP
Králova výšina 3132/7
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: petr.bogan@ujep.cz