Učitel matematiky

Karel Horák

# 56. mezinárodní matematická olympiáda

*Učitel matematiky*, Vol. 24 (2016), No. 2, 107–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149388

# 56. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Karel Horák

Hlavními pořadateli 56. mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 4. do 16. července v thajském městě Chiang Mai na severu této pro nás pořád ještě exotické země, byly Ústav pro podporu výuky věd a technologií (IPST), Chiangmajská univerzita, Matematické sdružení Thajska pod patronací Jeho Veličenstva krále a Nadace pro podporu akademických olympiád a rozvoje vědecké výchovy (POSN) pod patronací Její Výsosti princezny Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra.

Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v pětadvacetipatrovém hotelu Holiday Inn v samém centru města. Soutěžící spolu s pedagogickými vedoucími bydleli v neméně skvělém hotelu v jiné části města. Počet soutěžících byl opět rekordní: olympiády se zúčastnilo 577 studentů ze 104 zemí celého světa.

Slavnostní zahájení se konalo v aule chiangmajské univerzity a zakončilo ho nápadité defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 64. ročníku MO v Praze a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Vojtěch Dvořák* z 8. ročníku Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Matěj Konečný* z 8. ročníku Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Marian Poljak* z 7. ročníku Gymnázia Jakuba Škody v Přerově, *Jan Soukup* z 8. ročníku Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, *Radovan Švarc* z 8. ročníku Gymnázia Česká Třebová a *Pavel Turek* z 6. ročníku Gymnázia v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel Mgr. *Michal Rolínek* z Institutu pro vědu a technologii v Klosterneuburgu u Vídně.

Vlastní soutěž se odehrála v univerzitní aule hotelu 10. a 11. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Výsledky našich jsou shrnuty v následující tabulce:

| | | **Body za úlohu** | | | | | | **Body** | **Cena** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Umístění** | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 394.–419. | Vojtěch Dvořák | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | HM |
| 322.–336. | Matěj Konečný | 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 11 | HM |
| 257.–282. | Marian Poljak | 6 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 14 | III. |
| 365.–393. | Jan Soukup | 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 9 | HM |
| 217.–256. | Radovan Švarc | 4 | 1 | 0 | 7 | 3 | 0 | 15 | III. |
| 160.–182. | Pavel Turek | 7 | 2 | 0 | 7 | 1 | 0 | 17 | III. |
| | Celkem | 38 | 5 | 0 | 24 | 7 | 0 | 74 | |

Vzhledem k tomu, že dva z našich studentů už mají doma po medaili z předchozí 55. MMO, čekali jsme, že své zkušenosti i přípravu zúročí lépe. Letošní MMO však dle mínění mnohých patřila k jedné z nejtěžších. Nicméně zisk tří bronzových medailí za velký úspěch považovat nelze. Zbylí tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honourable mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné soutěžní úlohy.

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří si tentokrát vedli o dost lépe než naši (a to nejlepšímu „česko-slovenskému“ účastníku Buiovi unikla zlatá medaile jen o bod):

| Umístění | | Body za úlohu 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Body | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 257.–282. | Patrik Bak | 1 | 5 | 0 | 7 | 1 | 0 | 14 | III. |
| 101.–117. | Eduard Batmendijn | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 4 | 20 | II. |
| 40.–54. | Truc Lam Bui | 7 | 5 | 0 | 7 | 0 | 6 | 25 | II. |
| 420.–430. | Tomáš Kekeňák | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 7 | |
| 183.–216. | Zhen Ning Dávid Liu | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 16 | III. |
| 217.–256. | Samuel Sládek | 7 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 15 | III. |
| | Celkem | 33 | 13 | 0 | 36 | 5 | 10 | 97 | |

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme stěží uhájili pozici v první polovině (spolu s Mongolskem a Švýcarskem jsme se podělili o 45.–47. příčku) více než stočlenného pole. Počet získaných cen a celkový bodový zisk jednotlivých zemí vyčtete z připojené tabulky (čísla v závorce označují nižší počet reprezentantů):

| | I | II | III | body | | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| USA | 5 | 1 | 0 | 185 | Maďarsko | 0 | 3 | 3 | 113 |
| ČLR | 4 | 2 | 0 | 181 | Turecko | 0 | 5 | 0 | 113 |
| Korea | 3 | 1 | 2 | 161 | Brazílie | 0 | 3 | 3 | 109 |
| KLDR | 3 | 3 | 0 | 156 | Japonsko | 0 | 3 | 3 | 109 |
| Vietnam | 2 | 3 | 1 | 151 | Velká Británie | 0 | 4 | 1 | 109 |
| Austrálie | 2 | 4 | 0 | 148 | Kazachstán | 1 | 1 | 2 | 105 |
| Írán | 3 | 2 | 1 | 145 | Arménie | 0 | 1 | 5 | 104 |
| Rusko | 0 | 6 | 0 | 141 | Německo | 0 | 2 | 3 | 102 |
| Kanada | 2 | 0 | 4 | 140 | Hongkong | 0 | 2 | 3 | 101 |
| Singapur | 1 | 4 | 1 | 139 | Bulharsko | 0 | 2 | 1 | 100 |
| Ukrajina | 2 | 3 | 1 | 135 | Indonésie | 0 | 2 | 4 | 100 |
| Thajsko | 2 | 3 | 1 | 134 | Itálie | 1 | 2 | 0 | 100 |
| Rumunsko | 1 | 4 | 1 | 132 | Srbsko | 1 | 1 | 2 | 100 |
| Francie | 0 | 3 | 3 | 120 | Bangladéš | 0 | 1 | 4 | 97 |
| Chorvatsko | 1 | 3 | 1 | 119 | *Slovensko* | 0 | 2 | 3 | 97 |
| Peru | 2 | 2 | 1 | 118 | Makao | 0 | 1 | 2 | 88 |
| *Polsko* | 1 | 1 | 4 | 117 | Filipíny | 0 | 2 | 2 | 87 |
| Tchaj-wan | 0 | 4 | 1 | 115 | Indie | 0 | 1 | 2 | 86 |
| Mexiko | 1 | 2 | 3 | 114 | Moldavsko | 0 | 1 | 2 | 85 |

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| Bělorusko | 0 | 0 | 3 | 84 |
| Izrael | 1 | 0 | 2 | 83 |
| Saudská Arábie | 0 | 1 | 3 | 81 |
| Gruzie | 0 | 1 | 3 | 80 |
| Bosna a Hercegovina | 0 | 0 | 2 | 76 |
| Nizozemsko | 0 | 0 | 3 | 76 |
| *Česká republika* | 0 | 0 | 3 | 74 |
| Mongolsko | 0 | 0 | 2 | 74 |
| Švýcarsko | 0 | 0 | 3 | 74 |
| Ázerbájdžán | 0 | 0 | 2 | 73 |
| Kolumbie | 0 | 0 | 4 | 72 |
| Nový Zéland | 0 | 0 | 2 | 72 |
| Řecko | 0 | 1 | 2 | 71 |
| Argentina | 0 | 0 | 1 | 70 |
| Portugalsko | 0 | 0 | 3 | 70 |
| Sýrie | 0 | 1 | 1 | 69 |
| JAR | 0 | 0 | 1 | 68 |
| Belgie | 0 | 1 | 0 | 67 |
| Malajsie | 0 | 0 | 3 | 66 |
| Turkmenistán | 0 | 0 | 2 | 64 |
| Uzbekistán | 0 | 0 | 3 | 64 |
| Rakousko | 0 | 0 | 3 | 63 |
| Švédsko | 0 | 0 | 2 | 63 |
| Alžírsko | 0 | 1 | 1 | 60 |
| Kypr | 0 | 1 | 0 | 58 |
| Tádžikistán (5) | 0 | 1 | 1 | 57 |
| Litva | 0 | 0 | 1 | 54 |
| Norsko | 0 | 1 | 0 | 54 |
| Kostarika | 0 | 0 | 2 | 53 |
| Paraguay | 0 | 0 | 3 | 53 |
| Dánsko | 0 | 0 | 2 | 52 |
| Estonsko | 0 | 0 | 1 | 51 |
| Srí Lanka | 0 | 0 | 0 | 51 |
| Španělsko | 0 | 0 | 1 | 47 |
| Slovinsko | 0 | 0 | 1 | 46 |
| Makedonie | 0 | 0 | 1 | 45 |
| Island | 0 | 0 | 0 | 41 |
| Tunisko (4) | 0 | 0 | 1 | 41 |
| Albánie | 0 | 0 | 0 | 37 |
| Irsko | 0 | 0 | 0 | 37 |
| Lotyšsko | 0 | 0 | 0 | 36 |
| Ekvádor | 0 | 0 | 0 | 27 |
| Maroko | 0 | 0 | 0 | 27 |
| Finsko | 0 | 0 | 0 | 26 |
| Nikaragua (3) | 0 | 0 | 0 | 26 |
| Trinidad a Tobago (4) | 0 | 1 | 0 | 26 |
| Pákistán | 0 | 0 | 1 | 25 |
| Kambodža | 0 | 0 | 0 | 24 |
| Kosovo | 0 | 0 | 0 | 24 |
| Nigérie | 0 | 0 | 0 | 22 |
| Černá Hora (3) | 0 | 0 | 1 | 19 |
| Lichtenštejnsko (1) | 0 | 0 | 1 | 18 |
| Portoriko (3) | 0 | 0 | 1 | 18 |
| Kyrgyzstán | 0 | 0 | 0 | 17 |
| Uruguay | 0 | 0 | 0 | 16 |
| Kuba (1) | 0 | 0 | 1 | 15 |
| Salvádor (4) | 0 | 0 | 0 | 14 |
| Venezuela (2) | 0 | 0 | 0 | 13 |
| Chile (2) | 0 | 0 | 0 | 12 |
| Lucembursko (2) | 0 | 0 | 0 | 12 |
| Panama (3) | 0 | 0 | 0 | 9 |
| Uganda (5) | 0 | 0 | 0 | 6 |
| Bolívie (5) | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Ghana (5) | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Botswana | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Tanzánie (3) | 0 | 0 | 0 | 0 |

O obtížnosti úloh přirozeně svědčí množství rozdaných bodů. Jak je patrno z tabulky, Čínu letos o pár bodů předběhly Spojené státy americké, ale ani ty nepřekonaly hranici 200 bodů, což se už dlouho nestalo. Rusko letos vypadlo ze silné pětky, protože ruští studenti si překvapivě neporadili s obtížnou třetí planimetrickou úlohou, a tak nezískali ani jednu zlatou a skončili se šesti stříbrnými až na osmé příčce. Úlohy rozhodně nebyly lehké, naši si sice výborně poradili s kombinatorickou první úlohou, na které překvapivě pohořeli jinak výborní Vietnamci, a o něco hůře se čtvrtou (geometrickou) úlohou. Na zbývající těžší úlohy však bohužel nestačili.

K zisku zlaté medaile letos stačilo pouhých 26 bodů, přičemž plného počtu 42 bodů dosáhl jediný soutěžící, Zhuo Qun (Alex) Song z Kanady. Stříbrné medaile se udělovaly za 19–25 bodů a na bronz stačilo 14 bodů. Celkem jury udělila 39 zlatých, 100 stříbrných a 143 bronzových medailí a 126 studentů získalo „pochvalné uznání“ (Honourable mention).

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. K největším zážitkům bezesporu patřil výlet do sloního parku Maetaman korunovaný jízdou na hřbetě slona, který po soutěži absolvovali i soutěžící, neméně vzrušující byla i zhruba čtyřkilometrová plavba na bambusových vorech mírnými peřejemi. Po koordinaci jsme pak měli ještě možnost navštívit chrám Wat Pra That Doi Suthep v horách za hranicí města a poté chrám Wat Chedi Luang v historickém středu města.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v prostorné aule chiangmajské univerzity za účasti thajského ministra školství a v uvolněném duchu bez velkých proslovů. Po úžasném bubenickém a tanečním vystoupení došlo k rozdání medailí, na němž se valnou částí kromě představitelů univerzity a pana ministra podíleli sami organizátoři a koordinátoři.

O hostitelských zemích příštích olympiád je už jasno až do roku 2019: v roce 2016 to bude Hongkong, poté Brazílie, Rumunsko a Velká Británie.

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

**1.** Konečnou množinu $\mathcal{S}$ bodů v rovině nazveme *vyváženou*, jestliže pro libovolné dva různé body $A$ a $B$ z $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ takový bod $C$, že $|AC| = |BC|$. Množinu $\mathcal{S}$ nazveme *středuprostou*, jestliže pro žádné tři různé body $A$, $B$ a $C$ z $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ bod $P$ takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqslant 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě $n$ bodů.

(b) Určete všechna přirozená čísla $n \geqslant 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě $n$ bodů.

(*Nizozemsko*)

**2.** Určete všechny trojice $(a, b, c)$ kladných celých čísel, pro něž každé z čísel

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

je mocninou 2.

(*Mocnina 2 je celé číslo tvaru $2^n$, kde $n$ je nezáporné celé číslo.*) (*Srbsko*)

**3.** Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$. Označme $\Gamma$ kružnici mu opsanou, $H$ jeho průsečík výšek a $F$ patu výšky z vrcholu $A$. Střed strany $BC$ označme $M$. Nechť $Q$ je bod kružnice $\Gamma$ takový, že $\angle HQA = 90°$, a $K$ bod kružnice $\Gamma$ takový, že $\angle HKQ = 90°$. Předpokládejme, že body $A$, $B$, $C$, $K$ a $Q$ jsou navzájem různé a leží na kružnici $\Gamma$ v tomto pořadí.

Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $KQH$ a $FKM$ se vzájemně dotýkají. (*Ukrajina*)

**4.** Trojúhelníku $ABC$ je opsána kružnice $\Omega$ o středu $O$. Přitom kružnice $\Gamma$ se středem $A$ protne úsečku $BC$ v bodech $D$ a $E$ takových, že body $B$, $D$, $E$ a $C$ jsou různé a leží na přímce $BC$ v tomto pořadí. Kružnice $\Gamma$ a $\Omega$ se protínají v bodech $F$ a $G$, přičemž body $A$, $F$, $B$, $C$ a $G$ leží na kružnici $\Omega$ v tomto pořadí. Označme $K$ další průsečík kružnice opsané trojúhelníku $BDF$ s úsečkou $AB$ a $L$ další průsečík kružnice opsané trojúhelníku $CGE$ s úsečkou $CA$.

Předpokládejme dále, že přímky $FK$ a $GL$ jsou různé a protínají se v bodě $X$. Dokažte, že bod $X$ leží na přímce $AO$. (*Řecko*)

**5.** Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež splňují rovnici

$$f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

pro všechna reálná čísla $x$ a $y$. (*Chorvatsko*)

**6.** Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel vyhovuje následujícím podmínkám:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2\,015$ pro každé $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ pro všechna $k$ a $l$ taková, že $1 \leqslant k < \ell$.

Dokažte, že existují dvě kladná celá čísla $b$ a $N$ taková, že

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1\,007^2$$

pro všechna celá čísla $m$ a $n$ splňující $n > m \geqslant N$. (*USA*)

*Karel Horák*
*e-mail: horakk@math.cas.cz*