Učitel matematiky

Eva Semerádová

Žákovská tvorba úloh k danému výsledku

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 2, 91–99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149386`

ŽÁKOVSKÁ TVORBA ÚLOH K DANÉMU VÝSLEDKU

Eva Semerádová

V článku se podíváme na aktivitu vhodnou do hodin matematiky, která slouží k procvičení látky, k odhalení momentů, které žáci v dané látce ne zcela zvládli, k rozvoji tvořivosti žáků i přesnosti vyjadřování.

Teoretická východiska

Tvorba úloh žáky je jednou z didaktických technik, která se dostává do popředí výzkumu v didaktice matematiky obzvlášť v posledních letech. Uveďme alespoň stručně některé cíle, které může učitel tvorbou úloh žáky sledovat. Je prokázáno, že tvorba úloh má pozitivní vliv na schopnost žáků slovní úlohy řešit (Silver, 1994 nebo English, 1998). Žáci vidí danou problematiku z jiného úhlu pohledu, méně závislou na kontextu (Pirie, 2002). I sama schopnost hledat a formulovat úlohy je pro žáky užitečná – může se jim hodit mimo jiné v budoucím profesním životě (Shriki, 2010). Rozvoj dovednosti tvořit úlohy považují někteří autoři za součást rozvoje tvořivosti (Subotnik, 2008). Diagnostikou žákova porozumění látce prostřednictvím tvoření úloh příslušejících danému výpočtu se u nás zabývají např. Tichá a Macháčková (2006).

Aktivita

Je bezesporu užitečné, mají-li si žáci tvořit vlastní úlohy. Na základě mnoha pokusů o zavedení různého provedení žákovské tvorby úloh do výuky však mohu říci, že pokud žákům dáme „bílý papír“ a řekneme „tvoř úlohu“, obvykle se nedočkáme výstupů, s nimiž bychom byli spokojeni. Přílišná volnost (libovolnost tématu, téma příliš široké – např. „něco z planimetrie“ apod.) často zapříčiní, že žák neví, odkud začít. Obvykle pak stráví velké množství času přemýšlením, co má vlastně tvořit, a samotné úloze se pak už věnuje mnohem méně. Lépe se proto osvědčuje konkrétní forma zadání[1]. Samozřejmě však nesmíme přejít do druhého extrému, tedy zadat situaci tak omezenou, že žáky příliš vede; jejich tvořivost se pak nerozvíjí.

Podstatou dále uváděné aktivity je *nechat žáky vytvořit úlohu vedoucí k zadanému výsledku.* Přitom se osvědčilo přidat požadavek alespoň na matematické téma, jehož by se měla úloha týkat. (Zadání „vytvořte úlohu, jejíž výsledek je 7“, by bylo příliš široké, jak bylo zmíněno výše.) Při aktivitě popsané v oddíle Ukázka téma výslovně omezeno nebylo, protože výsledek ve tvaru kombinačního čísla většinu žáků navádí ke kombinatorice automaticky.

Práce se nejlépe osvědčila v malých skupinách – ideálně dvojicích. *Na kartičky předepíšeme požadované výsledky a každá skupina si jednu vylosuje.* Doporučením je dané výsledky opakovat pro dvě skupiny – jak uvidíme v ukázce, opakovaná chyba u více skupin nám může pomoci lokalizovat problém. Žákům vysvětlíme, že za daný čas mají vytvořit úlohu, jejíž výsledek bude to, co je napsáno na jejich kartičce. Důležité je, aby žáci věděli, jak dlouho na aktivitu mají a že výstupem je hotová úloha čitelně napsaná na volném listu papíru. Pozor na to, že tvorba úlohy žákům zabere poměrně dost času – chceme-li mít jako výstup opravdu Zajímavé a správně formulované úlohy, je nutné dát časový limit alespoň 20 minut. Žákům řekneme, že úloha má mít přiměřenou obtížnost – nechceme žádnou triviální úlohu. Po odevzdání vytvořených úloh je možné aktivitu přerušit a pokračovat v ní v další hodině.

Vytvořené úlohy žákům rozdáme tak, aby každá skupina měla jinou, než vytvořila. Každá skupina pak prezentuje u tabule řešení úlohy, kterou dostala. O řešení může diskutovat celá třída s výjim-

[1] Jiné nápady na aktivitu ve třídě pomocí tvorby úloh lze nalézt např. v (Brown & Walter, 1990) – metoda „Co když ne-?“, v (Kopka, 1999) – metoda hroznů problémů nebo v (Patáková, 2012) – metoda nedokončených úloh.

kou autorů úlohy. Do diskuse jako učitel vstupujeme co nejméně. Autoři dostanou slovo až úplně na závěr, kdy přečtou výsledek, jenž měli zadán, a porovnají jej s výsledkem na tabuli. Pokud se objeví rozpor, zhodnotí jeho příčiny a zamyslí se nad tím, co by v úloze měli změnit.

Ukázka realizace

V ukázce rozebereme výstupy některých dvojic[2] řešících úkoly z kombinatoriky.

Úloha 1. Požadovaný výsledek: $4 \cdot \binom{11}{7}$

Greg má rád kávu. Ráno co ráno si vychutnává své 4 *šálky kávy. Jeho oblíbený šálek má* 259 *ml. Zároveň disponuje kávovarem. Kávovar mu předkládá* 11 *unikátních variant jeho oblíbeného nápoje (kávy). Každým stiskem jedné z možností do jeho šálku přitančí* 37 *ml zvolené radosti. Je ráno, takže veškeré Gregovy stisky jsou náhodné… Kolik chuťových kombinací kávy má Greg každé ráno možnost si vychutnat?*

Práce ve třídě:

- Žák u tabule nejprve nakreslil obrázek šálku rozděleného na 7 stejných částí, ke každé nakreslil šipku s poznámkou „11 možností“. Žáci sami (bez zásahu učitele) jej opravují, že náčrtek neodpovídá – záleželo by na pořadí, ale v hrnku se příchutě kávy stejně všechny smíchají.
- Žák se opravuje a pak píše správný vztah pro počet možností kombinací kávy v jednom hrníčku jako $\binom{11+7-1}{7} = \binom{17}{7}$.
- Dále žák uvažuje, jak zapracovat informaci o čtyřech hrníčcích ze zadání. Neví. Třída diskutuje možnosti vynásobení získaného kombinačního čísla čtyřmi – na podporu takového výpočtu však nejsou žádné argumenty. Pak začnou žáci diskutovat o tom, zda má informace o čtyřech hrníčcích vůbec nějaký význam. Diskutována jsou možná vyznění textu: Hrnečky jsou čtyři po sobě a řešíme vlastně variaci kombinací

[2]Septima Mensa gymnázia v Praze, školní rok 2014/15.

příchutí, správný výsledek je tedy $\binom{17}{7}^4$. Nebo text znamená, že hledáme opravdu jen počet chuťových kombinací? Pak by informace o čtyřech šálcích byla nadbytečná a výsledek by byl $\binom{17}{7}$.

- Po napsání očekávaného výsledku byly všechny chyby autorů jasné, zastavujeme se pouze u čísla 4, kterým má být dané kombinační číslo vynásobeno. Žáci jsou dotázáni, jak by v daném kontextu mohl vypadat text, aby se ve výsledku opravdu násobilo čtyřkou. Jedna žákyně přichází se správným nápadem, že místo čtyř šálků v úloze mohlo být např. dáno, že Greg má v lednici čtyři druhy dortů, z nichž jeden si chce ke kávě dát. Kolik má pak možností, jak si sestavit snídani?
- V závěrečném komentáři autoři přiznávají svoje chyby. Jednak jim nedošlo, že k výpočtu je nutné použít kombinace s opakováním, jednak měli chybu v zařazení čísla čtyři do výpočtu. Závěrečnou formulaci mínili tak, že chtěli zkoumat chuťové „čtyřkombinace“, jejich plánu by tedy odpovídal výsledek $\binom{17}{7}^4$. Komentují, že se nad formulací otázky dlouze zamýšleli, ale že už mysleli, že je jednoznačně pochopitelná.

Komentáře:

- Na konkrétních chybách jako učitel vidíme, kde mají žáci problém.
- Diskuse ve třídě byla podnětná, zaujala většinu žáků.
- Žáci se sami přesvědčili o důležitosti přesného vyjadřování, protože viděli, že jejich text nebyl pochopen.
- Dozvěděli jsme se také něco o aspirační úrovni žáků (autorů) – úloha byla oproti většině ostatních náročná a propracovaná. Dvojice (nebo alespoň jeden její člen) má tedy motivaci pracovat nadprůměrně. (To koresponduje s tím, že jeden žák z autorské dvojice je – i přes chyby, které v práci měl – nadaný matematik, který navštěvuje i volitelný seminář z matematiky.)

Úloha 2. Požadovaný výsledek: $4 \cdot \binom{11}{7}$

Dětem nedělají bonbony dobře. Z pěti barelů, každého s jiným druhem bonbonů, vybereme 7 bonbonů a dáme je do pytle. To samé uděláme s dalšími třemi pytli. Dítě necháme vybrat jeden z pytlů, který obdrží. Kolik je možností obsahu pytle?

Práce ve třídě:

- Číslo $\binom{11}{7}$ je odhaleno hned.
- Mezi řešitelem úlohy u tabule a třídou probíhá diskuse, jak zapracovat do výpočtu čtyřku. Nakonec se shodují na výsledku $\binom{11}{7}$, i když čtyřnásobný výsledek byl také několika žáky navrhován. Diskuse šla poměrně rychle, neboť se jednalo o podobné téma jako u úlohy 1.
- Podobně jako u úlohy s kávou již dokážou žáci navrhnout přeformulaci, aby úloha měla požadovaný výsledek. (Např. že existují čtyři barvy pytlíku.)

Komentáře:

- Obdobná chyba autorů jako v úloze 1 nás upozorňuje na problematické místo, kde má potíže více žáků.

Úloha 3. Požadovaný výsledek: $2 \cdot 8! + 9!$

Seřaď 9 *koček, přitom kočka* 1 *a kočka* 33 333 *musí sedět vedle sebe. A k tomu přičti počet seřazení devíti psů.*

Práce ve třídě:

- Úloha nedělala žákům problémy, nebylo třeba o ní diskutovat. Ani kočka, která se jmenuje 33 333, žáky nepřekvapila.

Komentáře:

- Úloha opět vypovídá o charakteru žáků – autorů. Je zde patrná tendence plnit úkoly co nejjednodušším, ale správným způsobem, což koresponduje s jejich obvyklou prací v hodinách.

Úloha 4. Požadovaný výsledek: $2 \cdot 8! + 9!$

Máme kino o 11 řadách po osmi sedadlech a máme osmičlennou skupinu, která chce sedět spolu v jedné řadě. Urči počet možností, jak si mohou sednout.

Práce ve třídě spolu s komentáři:

- Žákyně (autorky) se mě ptaly, zda je možné si požadovaný výsledek nejprve zjednodušit vytknutím výrazu 8! na $11 \cdot 8!$. Je možné odpovědět oběma způsoby. Buď nám záleží na výsledku procesuálně – chceme, aby byl akcentován i postup výpočtu, můžeme např. i trvat na textu zohledňujícím pořadí prvků v komutativních operacích apod. Zde bylo žákyním zjednodušení výsledku povoleno – pracovali jsme tedy spíše v konceptuální rovině, kdy šlo pouze o hodnotu požadovaného čísla.
- Žák na tabuli přirozeně došel k výsledku $11 \cdot 8!$. Tím byl vlastně získán prostor na podúlohu navíc, kdy byl na tabuli napsán ještě požadovaný výsledek a žák musel obdobně jako autorky určit, zda se požadovaný a skutečný výsledek rovná.

Úloha 5. Požadovaný výsledek: $\binom{12}{7} - 10$

Máš 6 hrníčků – bílý, červený, modrý, zelený, žlutý a černý. Vyber 7 hrníčků, kde nezáleží na pořadí a mohou se opakovat. Pouze všech 7 nesmí být stejné barvy, a když je 6 hrníčků černých, sedmý nesmí být žlutý.

Práce ve třídě:

- Žáci odhalují nepřesnou formulaci – vybrat sedm hrníčků ze šesti je možné 0 způsoby. V návaznosti na zbytek textu se usnesou na tom, že údaj v textu byl jistě míněn jako „6 barev hrníčků“.
- Žákyně u tabule správně odhalí $\binom{12}{7}$ možností, jak vybrat sedm hrníčků šesti možných barev. Od výsledku odečítá 6 možností, jak vybrat hrnečky stejné barvy, a 1 možnost odpovídající šesti černým a jednomu žlutému hrnečku. Výsledek je tedy $\binom{12}{7} - 7$

- Po napsání požadovaného výsledku na tabuli žáci – neautoři – nebyli schopni vysvětlit rozpor ani přeformulovat zadání, které by vedlo k danému výsledku. V závěrečném komentáři autoři přiznávají chybu – v textu mělo být „...sedmý **musí** být žlutý“ místo „...sedmý **nesmí** být žlutý“. Situaci jsme se zbytkem třídy zkontrolovali – pak už by zadání odpovídalo.

Komentáře:

- Překvapivá obliba kombinací s opakováním v úlohách je dána tím, že se jednalo o čerstvě probranou látku.

Závěr

Ukázali jsme aktivitu, kdy žáci mají za předem stanovených podmínek sestavit úlohu s daným výsledkem. Jednou z výhod aktivity – jak jsme si mohli všimnout v ukázce – je, že odkrývá problémy žáků hlavně v těchto oblastech:

- Schopnost přesného vyjádření: Žáci mají mnohdy potíže s přesným vyjadřováním. Přitom situace, kdy spolužáci jejich úlohu nevyřeší, protože jí neporozuměli, je pro ně daleko průkaznější, než když je na nepřesnost upozorní učitel.
- Porozumění látce: Nerozumí-li žák dané látce dostatečně, vytvoří pravděpodobně úlohu s jiným výsledkem, než je požadovaný. Přitom opakované výsledky na kartičkách mohou pomoci diagnostikovat momenty, se kterými má problém více žáků.
- Numerické chyby: Numerické chyby opět vedou k jiným výsledkům než požadovaným. Předpoklad je, že rovněž zde působí motivačně silněji rozpor objevený spolužáky než učitelem. Rozpor mezi zamýšleným a požadovaným výsledkem hledají autoři sami, což rovněž pomáhá reedukaci.

Dalšími výhodami aktivity jsou:

- Rozvoj tvořivosti: Aktivita je s otevřeným koncem, úkol „vytvoř úlohu“ nemá jednoznačné řešení. Žáci musí přemýšlet jiným způsobem, než když úlohy řeší.
- Motivační stránka: Mnohdy působí velmi motivačně, neřeší-li se úlohy dané učitelem, ale úlohy, které si zadali žáci sami.
- Procvičení tématu: Během aktivity žáci vyřešili množství úloh na podobné téma. I během tvorby žáci výrazně procvičují téma (řeší mnoho svých nápadů).

Uvedená aktivita samozřejmě lze variovat podle konkrétních podmínek ve třídě i podle procvičovaného tématu.

Literatura

[1] Bairac, R. (2005). Some Methods for Composing Mathematical Problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Dostupné z `http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bairac.pdf`

[2] Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing.* Second Edition. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Ltd., Publisher.

[3] Kopka, J. (1999) *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: UJEP.

[4] Patáková, E. (2012). Tvorba úloh studentem – konkrétní aktivita. In N. Vondrová, *Dva dny s didaktikou matematiky 2012* (154–158). Praha: PedF UK.

[5] Pirie, S. E. B. (2002). Problem Posing: What Can It Tell Us about Students‘ Mathematical Understanding? In *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Norwich: ERIC/CSMEE Publications.

[6] Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers‘ awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 159–179.

[7] Subotnik, R. F. (2008). The psychosocial dimensions of creativity in Mathematics: Implications for gifted education policy. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conerence on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (35–47). Haifa: CET.

[8] Tichá, M. & Macháčková, J. (2006) Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF.

Abstract

The article deals with problem posing in mathematics lessons. It is based on several experimental teaching episodes where problem posing was used. Some examples of posing activities as well as of pupils' problems are given and commented on.

Eva Semerádová
Mensa gymnázium, o.p.s.
Španielova 1111/19
163 00 Praha 6 – Řepy
Pedagogická fakula UK
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1