Učitel matematiky

Jiří Bureš; Petr Eisenmann; Jiří Přibyl

Řešitelský obrázek jako efektivní cesta řešení úloh

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 2, 80–90

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149385

ŘEŠITELSKÝ OBRÁZEK JAKO EFEKTIVNÍ CESTA ŘEŠENÍ ÚLOH

Jiří Bureš, Petr Eisenmann, Jiří Přibyl[1]

Řešení úloh na základní a střední škole probíhá často prostřednictvím řešení typových úloh a následnou aplikací naučených postupů. Snaha žáků o vyřešení úloh se pak někdy stává spíše snahou vzpomenout si, jak se obdobná úloha řešila. V letech 2012 až 2014 jsme v rámci rozsáhlého projektu GA ČR *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi* v několika třídách různého věku a typu škol pracovali na změně tohoto přístupu a rozšíření žákovského repertoáru poznatků pro řešení úloh. Během 18 měsíců práce na projektu jsme řešili s žáky rozmanité typy úloh s využitím různých strategií, které se na základní a střední škole systematicky nepoužívají (viz např. Eisenmann, Přibyl & Novotná, v tisku). Příkladem je strategie *Vypuštění podmínky* (Eisenmann & Břehovský, 2013) nebo strategie *Analogie* (Eisenmann & Přibyl, v tisku). Jedním z významných zisků pro žáky, který jsme měli možnost pozorovat během řešení úloh, byla větší snaha a odvaha přistupovat k úlohám jiným způsobem, nevzdávat řešení, když není znám přímý způsob řešení úlohy.

V tomto článku se zaměříme na heuristickou strategii, kterou jsme nazvali *Řešitelský obrázek*. Nejprve ji stručně popíšeme a poté ukážeme několik úloh, které lze s její pomocí efektivně řešit. Na příkladu konkrétní úlohy nazvané *Nejkratší cesta* potom ukážeme, jakým způsobem žáci přistoupili k této úloze a jak úlohu řešili.

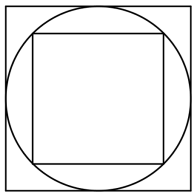
Řešitelský obrázek jako cesta k řešení úloh

Vhodné použití obrázku je často velmi účinným prostředkem k vyřešení problému. V takovém obrázku vyznačíme to, co je dáno,

[1] Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GA ČR č. 407/12/1939.

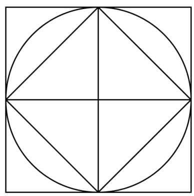
a často i to, co chceme získat. Obrázek, který takto získáme, se nazývá *Ilustrační obrázek.* Někdy nás již pomocí tohoto znázornění napadne řešení daného problému. Často však s obrázkem různě manipulujeme (např. dokreslujeme vhodné pomocné prvky) a pomocí takto doplněného obrázku problém vyřešíme. Takovému obrázku pak říkáme *Řešitelský obrázek.* Tento způsob řešení potvrzuje známé úsloví, že vhodný obrázek je mnohdy lepší než tisíc slov. Ilustrujme tento způsob třemi úvodními úlohami:

Úloha 1. Mějme čtverec vepsaný do kruhu, přičemž tento kruh je vepsán do většího čtverce (viz obr. 1). Určete, jakou část obsahu většího čtverce zaujímá menší čtverec.



Obr. 1

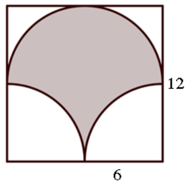
Řešení. Pomocí vhodného otočení menšího čtverce (viz obr. 2) a doplnění jeho úhlopříček úlohu již snadno vyřešíme.



Obr. 2

Odpověď. Menší čtverec zaujímá polovinu obsahu většího čtverce.

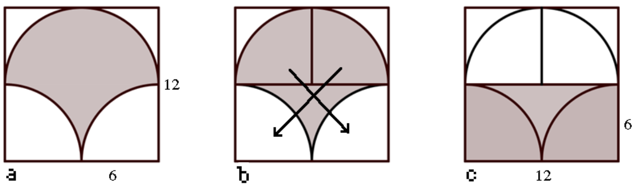
Úloha 2. Vypočítejte obsah „kapky“, jestliže její obvod tvoří kružnicové oblouky. Údaje na obr. 3 jsou uvedeny v centimetrech.



Obr. 3

Řešení. Doplňme do obrázku vhodně dvě navzájem kolmé úsečky. Obsah kapky S pak můžeme jednoduše spočítat jako obsah obdélníku o velikosti stran 6 a 12. Vznik tohoto obdélníku je znázorněn na obr. 4b. Tedy:

$$S = 12 \cdot 6 = 72$$



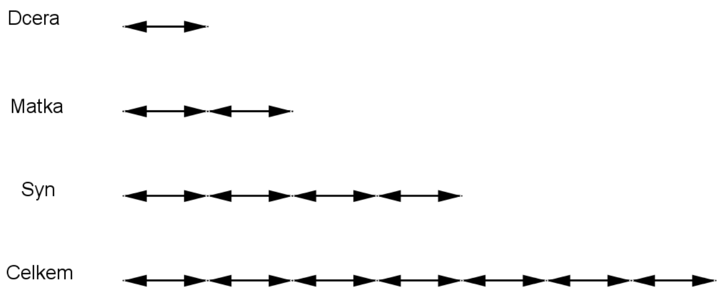
Obr. 4

Odpověď. Obsah kapky je 72 cm^2.

Po dvou úlohách z geometrie ilustrujme strategii Řešitelský obrázek ještě na jedné slovní úloze.

Úloha 3. Jeden Říman napsal závěť ve prospěch své ženy a dosud nenarozeného dítěte. Pokud by přišel na svět chlapec, měl dostat dvakrát větší dědictví než matka. Kdyby to bylo děvče, měla matka dostat dvakrát více než dcerka. Po Římanově smrti se narodila dvojčata – chlapec a děvče. Jak by se mělo rozdělit dědictví, aby byla závěť respektována?

Řešení. Začněme dcerou. Jejímu dědictví přiřadíme jeden dílek (viz obr. 5). Matka dostane dědictví 2 krát větší, tedy 2 dílky. Syn má dostat 2 krát více než matka, tudíž 4 dílky. Protože dědictví je jeden celek, zjistíme celkový počet dílků představující toto dědictví, a to je 7.



Obr. 5

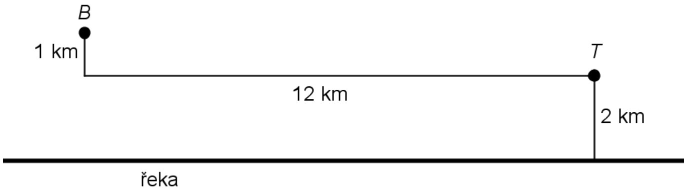
Odpověď. Aby byla závěť respektována, dostane syn $\frac{4}{7}$ dědictví, matka $\frac{2}{7}$ dědictví a dcera $\frac{1}{7}$ dědictví.

Úloha Nejkratší cesta a její řešení

Tato poslední, tradiční úloha nám poslouží k ukázkám v úvodu slíbených žákovských řešení. V této kapitole ale ukážeme dva způsoby řešení této úlohy pomocí strategie Řešitelský obrázek.

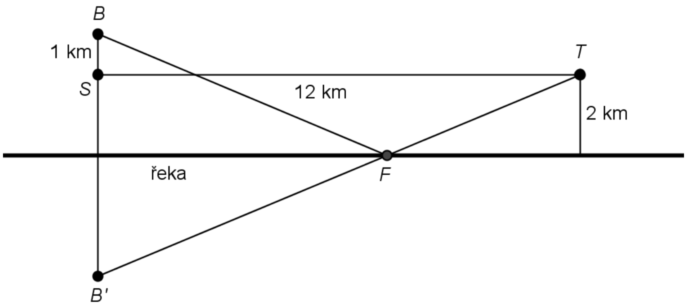
Úloha 4. Tvůj dům je vzdálen 2 km severně od řeky. Dům tvé babičky je vzdálen 12 km západně a 1 km severně od tvého domu. Každý den musíš babičce přivézt na čtyřkolce čerstvou vodu z řeky. Najdi nejkratší cestu od svého domu k babičce se zastávkou u řeky a urči její délku.

Řešení.
1. způsob
Tato úloha je tradiční úlohou pro zavádění nebo procvičování osové souměrnosti. Pokud si nakreslíme obrázek situace, kde bod B reprezentuje dům babičky a bod T reprezentuje tvůj dům, můžeme úlohu vyřešit velmi elegantně. Pro zjednodušení úlohy modelujeme řeku pomocí přímky (viz obr. 6).



Obr. 6

Využijeme symetrie a řeku použijeme jako osu souměrnosti, podle které zobrazíme bod B na bod B'. Jak víme, nejkratší spojnicí bodů T a B' je úsečka TB'. Průsečík úsečky TB' a řeky je bod F, který představuje místo, kde musíme nabrat vodu (viz obr. 7).



Obr. 7

Délku takto nalezené cesty vypočítáme pomocí Pythagorovy věty jako velikost přepony trojúhelníka $B'TS$:

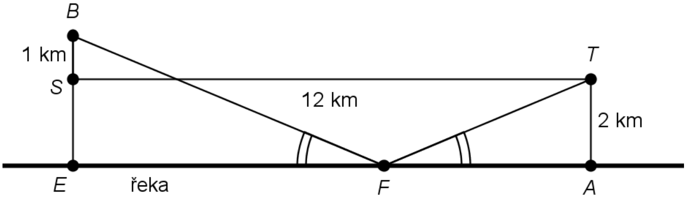
$$|B'T| = \sqrt{|B'S|^2 + |ST|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Nejkratší cesta tedy měří 13 km.

2. způsob

Nejprve nakreslíme obrázek situace, do kterého zakreslíme přibližnou pozici hledané nejkratší cesty. Při experimentování s pozicí bodu F (místo, kde musíme nabrat vodu) si můžeme všimnout, že cesta bude nejkratší, pokud budou oba ostré úhly u bodu F

shodné. Jestliže jsou tedy ostré úhly TFA a BFE shodné, pak jsou trojúhelníky TAF a BEF podobné. Z podobnosti trojúhelníků poté určíme polohu bodu F, který dělí úsečku EA v poměru 3 : 2 (viz obr. 8). Velikost úsečky FA je tedy 4,8 km a velikost úsečky EF je 7,2 km. Pomocí Pythagorovy věty pak snadno dopočítáme délku nejkratší cesty jako 13 km.



Obr. 8

Poznamenejme ještě, že kromě dvou výše uvedených řešení lze úlohu vyřešit např. i přímým způsobem, a to tak, že se vzdálenost hledané cesty vyjádří jako funkce vzdálenosti bodu F od bodu A a pak se pomocí diferenciálního počtu minimalizuje.

Využít lze však také heuristickou strategii Systematické experimentování, kdy řešitel buď na papíře nebo pomocí tužky a pravítka přibližné řešení najde systematickým posouváním bodu F na úsečce znázorňující řeku, nebo pomocí dynamické geometrie (např. Geogebry), kdy tento prostředek dokonce hodnotu nejkratší cesty vyčíslí.

Práce s úlohou ve třídě, žákovská řešení

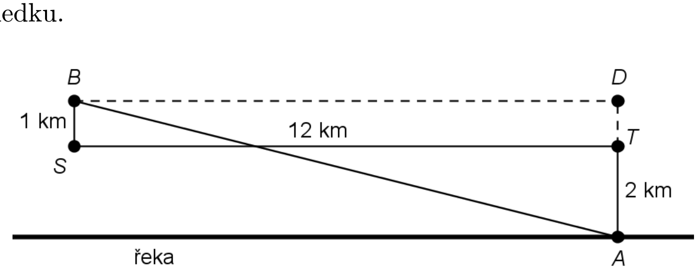
Tato část textu popisuje proces řešení úlohy žáky 3. ročníku Gymnázia Jana Nerudy v Praze (1. ročník SŠ, věk žáků 16–17 let). Žáci dostali zadání úlohy a samostatně nebo ve dvojicích pracovali na jejím vyřešení. Někteří žáci poté psali svá řešení na tabuli jako podklad pro společnou diskusi.

Velmi zajímavá byla již úvodní část řešení úlohy, kde zazněly i různé relevantní komentáře ohledně upřesnění zadání úlohy. Některé komentáře se týkaly tvaru řeky a jak ji znázornit. Zde jsme se nakonec dohodli, že řeku budeme modelovat pomocí přímky, jinak bychom nedokázali najít řešení úlohy. Jiné komentáře se zabývaly vzájemnou polohou obou domů a řeky, tj. zda musí být oba domy na stejné straně řeky. Dohodli jsme se, že budeme uvažovat o situaci, ve které oba domy stojí na stejné straně řeky. Další se týkaly existence případných cest, kterými může projet čtyřkolka. I v tomto případě jsme se dohodli na takové idealizované krajině, ve které čtyřkolka nemá žádné překážky.

Žáci akceptovali toto zjednodušení výchozí situace díky možnosti zjednodušit řešení úlohy a také díky tomu, že jsou na obdobný přístup k idealizaci situace zvyklí např. z hodin fyziky. Obdobnou diskusi ohledně různých parametrů v zadání považujeme navíc za velmi cennou pro porozumění úloze.

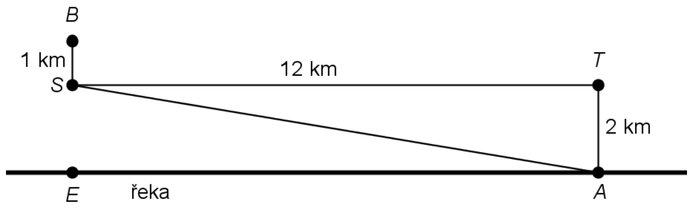
Nyní popíšeme pět způsobů řešení, které žáci postupně prezentovali na tabuli. První tři způsoby řešení nevedly ke správnému výsledku, čtvrtý způsob vedl ke správnému výsledku a poslední, pátý způsob řešení byl založen na správné analýze situace, nicméně zůstal nedokončený.

I. První způsob řešení je znázorněn na obr. 9. Nejprve je třeba urazit 2 km od domu přímo k řece (bod A) a poté jet přímo k babičce (bod B). Délka úsečky AB byla vypočítána pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ADB jako $|AB| = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$, celková délka cesty je tedy $2 + \sqrt{153} \doteq 14{,}4$ km. Tento způsob řešení tedy nevedl ke správnému výsledku.



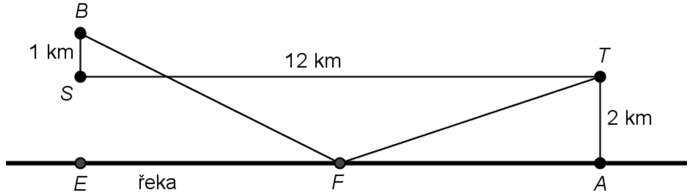
Obr. 9

II. Druhý způsob řešení je znázorněn na obr. 10. Žák počítal délku trasy jako $|TA| + |AS| + |SB| = 2 + \sqrt{148} + 1 \doteq 15{,}2\,\mathrm{km}$. Celkem by taková cesta měřila cca 15,2 km a byla tedy ještě delší než cesta vypočítaná prvním způsobem.



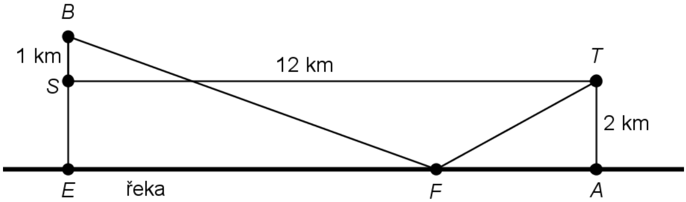
Obr. 10

III. Třetí způsob řešení je znázorněn na obr. 11. Žák umístil bod F do středu úsečky EA a vypočítal vzdálenosti $|TF|$ a $|BF|$. Tato trasa měří celkem $\sqrt{6^2 + 2^2} + \sqrt{6^2 + 3^2} \doteq 13{,}03\,\mathrm{km}$. S tímto řešením byli žáci spokojeni, jelikož se jednak jednalo o zatím nejmenší nalezenou hodnotu, jednak také proto, že střed úsečky mohli považovat za hezký a pravděpodobný výsledek. Poté byli žáci vyzváni k tomu, aby využili bod, který se nachází „blízko" středu úsečky EA, a ověřili, zda dojdou ke stejnému výsledku. Po úvodní diskusi („vychází to stejně, případně skoro stejně nebo mění se to jen o velmi malá čísla") se žáci nakonec shodli na tom, že výsledky nevychází pro tyto body stejně, a poté pokračovali v hledání nejvhodnějšího bodu na úsečce EA.



Obr. 11

IV. Čtvrtý způsob je jediný správný a úplný žákovský postup řešení a je založen na druhém autorském řešení. Žák rozdělil úsečku EA pomocí bodu F v poměru 3 : 2 odpovídajícímu poměru vzdáleností $|BE| : |TA|$ obou domů od řeky. Poté vypočítal obě vzdálenosti $|TF| = \sqrt{|TA|^2 + |AF|^2} = \sqrt{2^2 + 4,8^2} = 5{,}2\,\mathrm{km}$ a $|BF| = \sqrt{|BE|^2 + |EF|^2} = \sqrt{3^2 + 7,2^2} = 7{,}8\,\mathrm{km}$. Součet obou vzdáleností je roven 13 km a je tedy roven délce nejkratší cesty (viz obr. 12).

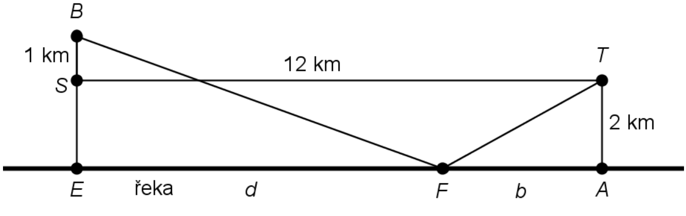


Obr. 12

V. Poslední způsob řešení je znázorněn na obr. 13. Žák rozdělil cestu k babičce na dvě části. Délku cesty od domu k řece vyjádřil jako $|TF| = \sqrt{4 + b^2}$ a délku cesty od řeky k babičce jako $|FB| = \sqrt{9 + d^2}$ s tím, že $b + d = 12$. Po vyjádření $b = 12 - d$ a dosazení pak vyjádřil celkovou vzdálenost jako

$$l = |TF| + |FB| = \sqrt{148 - 24d + d^2} + \sqrt{9 + d^2}.$$

Dále už ale žák nevěděl, jak pokračovat, a úlohu nedořešil. Hledaná délka cesty představuje totiž globální minimum funkce $l(d)$ a její nalezení vyžaduje znalost diferenciálního počtu. Podle našeho názoru se ale jedná o výbornou úvahu žáka 1. ročníku vyššího gymnázia.



Obr. 13

Při řešení úlohy navrhli žáci celkem pět způsobů řešení, z nichž tři nevedly ke správnému výsledku, jeden ano a jedna nadějná cesta nemohla být dořešena. V rámci jednoho způsobu řešení úlohy se objevilo i experimentování, které bylo podnětem pro další řešení úlohy. Objevil se i návrh na využití programu GeoGebra jako nástroje pro nalezení co nejpřesnějšího přibližného řešení. Nikdo z žáků nepoužil autorské řešení úlohy s využitím osové souměrnosti. Řešením úlohy umístěním bodu F do středu úsečky EA získali žáci velmi dobrou aproximaci výsledku a bylo nutné je přesvědčit, že existují ještě cesty s kratší délkou. Správný výsledek nalezli žáci pomocí rozdělení úsečky EA v poměru vzdáleností obou domů od řeky.

Závěr

V článku jsme ukázali několik úloh, ve kterých lze při řešení úlohy využít heuristickou strategii Řešitelský obrázek. Zatímco v některých popsaných typech úloh je využití řešitelského obrázku obvyklé, v jiných úlohách se nejedná o běžnou strategii a její použití ve výuce může pomoci žákům rozšířit repertoár možných strategií a může být tak vhodné pro žáky, kteří mají potíže s algebraickým způsobem řešení úloh, ale naopak jsou schopni dobře reprezentovat situaci pomocí obrázku.

Literatura

[1] Eisenmann, P. & Břehovský, J. (2013). Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie, *Matematika, Fyzika, Informatika*, 22(3), Praha, 183–191.

[2] Eisenmann, P., Přibyl J. & Novotná J. (v tisku). Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. *Dva dny s didaktikou matematiky 2015.*

[3] Eisenmann, P. & Přibyl, J. (v tisku). Analogie – užitečná heuristická strategie, *Učitel matematiky.*

Abstract

Problem solving with pictures might be an effective way to solve problems. Several examples of the use of graphical representation to solve problems are shown in the text and several pupils' strategies and approaches to solving selected problem are presented and discussed.

Jiří Bureš
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: jiri.bures@pedf.cuni.cz

Petr Eisenmann
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: petr.eisenmann@ujep.cz

Jiří Přibyl
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: jiri.pribyl@ujep.cz