Andrea Kubišová

Proč řešit graficky úlohy lineárního programování

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 1, 1–16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149375`

PROČ ŘEŠIT GRAFICKY ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Andrea Kubišová

Lineární programování (v dalším textu též jen LP) se obecně věnuje pouze úlohám, kde lze vztahy mezi proměnnými popsat pouze pomocí lineárních rovnic nebo nerovnic.

Obecnou *úlohou lineárního programování* (zkráceně LP) s n neznámými a m vlastními omezeními, kde $m, n \in \mathbb{N}$, rozumíme úlohu nalézt extrém (maximalizovat, resp. minimalizovat) *účelovou funkci* ve tvaru

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n; \tag{1}$$

za podmínek (tzv. *vlastních omezení*) ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + \; a_{22}x_2 + \ldots + \; a_{2n}x_n &\le b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \tag{2}$$

a za *podmínek nezápornosti* proměnných

$$x_j \ge 0 \text{ pro každé } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Je-li navíc požadována celočíselnost proměnných

$$x_j \in \mathbb{Z} \text{ pro každé } j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

hovoříme o *úloze celočíselného programování*. Reálná čísla x_j, kde $j = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme *strukturní proměnné*, reálná čísla a_{ij}, kde $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme *strukturní koeficienty* (v i-tém vlastním omezení u j-té strukturní proměnné), reálná čísla b_i, kde $i = 1, 2, \ldots, m$, nazýváme *pravé strany* (i-tého vlastního omezení), reálná čísla c_j, kde $j = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme ceny či *cenové koeficienty* (j-tého procesu). *Matematickým modelem* rozumíme zápis (1)–(3) resp. (4).

Přípustným řešením každé úlohy LP nazývejme všechna řešení ve tvaru $x = (x_1, \ldots, x_n)$, která vyhovují všem podmínkám příslušného matematického modelu, *optimálním řešením* úlohy LP nazývejme přípustné řešení, které dává nejlepší hodnotu účelové funkce (1).

Optimální řešení úlohy lineárního programování se univerzálně hledá pomocí tzv. *simplexového algoritmu.* Systematicky prochází množinu všech přípustných řešení adjungované soustavy k soustavě vlastních omezení, ze složité algebraické teorie mimo jiné vyplývá, že optimálním řešením může být pouze řešení základní. Po konečném počtu kroků je rozhodnuto o řešitelnosti úlohy popř. nalezeno optimální řešení.

Z teorie řešení obecných úloh LP dále vyplývá, že může nastat jedna ze čtyř možností výsledku: jediné optimální řešení, nekonečně mnoho optimálních řešení (tzv. alternativní řešení), žádné přípustné, a tudíž žádné optimální řešení a neomezená množina přípustných řešení, která nemá reálné optimální řešení a má neomezenou hodnotu účelové funkce.

Množina přípustných řešení

Podle počtu strukturních neznámých můžeme použít zobrazení všech objektů matematického modelu ve dvojrozměrném, resp. trojrozměrném prostoru.

Pokud se v matematickém modelu vyskytují pouze dvě strukturní neznámé, lze celý problém řešit planimetricky, rovnice reprezentuje přímku, nerovnice polorovinu jí ohraničenou. Pokud se v matematickém modelu vyskytují tři strukturní neznámé, lze celý problém řešit stereometricky, rovnice reprezentuje rovinu, nerovnice poloprostor jí ohraničený.

Podmínkami nezápornosti a vlastními omezeními je určena množina všech přípustných řešení, tedy řešení, která vyhovují všem uvedeným podmínkám. Každá z podmínek přitom graficky reprezentuje geometrický útvar, vzájemný průnik všech těchto útvarů je množinou přípustných řešení. U dvourozměrných úloh jde obecně o konvexní mnohoúhelník (včetně neomezených (úhel apod.) či degenerovaných variant (úsečka, bod, prázdná množina)), u trojrozměrných jde o konvexní mnohostěn (včetně neomezených či degenerovaných variant (mnohoúhelník, úsečka apod.)).

Jeho tvar je dán vždy specifickou vzájemnou polohou dílčích lineárních geometrických objektů. V dalším textu bude zkonstruovaná množina přípustných řešení vyznačena vždy šedou barvou.

Optimalizace

Již jsme vymezili množinu všech přípustných řešení. Nyní je třeba na základě rozhodovacího kritéria určit, které z nich je nejlepší. Toto kritérium je v matematickém modelu reprezentováno tzv. účelovou funkcí, která je opět lineárním vztahem mezi jednotlivými neznámými. Hledáme tedy bod, ve kterém má účelové funkce nejlepší možnou hodnotu (při maximalizaci nejvyšší, při minimalizaci nejnižší).

Tento bod (či více bodů) je opět závislý na vzájemné poloze nalezené množiny přípustných řešení a sklonu geometrického obrazu libovolné hladiny účelové funkce (sklonu přímky, resp. roviny). Nejčastěji do grafu nejprve vynášíme rovinu reprezentující nějakou konkrétně zvolenou hladinu hodnoty účelové funkce, tedy množinu bodů, ve kterých je hodnota účelové funkce rovna právě této libovolně zvolené hodnotě pravé strany. Každé volbě odpovídá právě jedna přímka, resp. rovina, kterou nazýváme *izokvanta.* Všechny izokvanty účelové funkce jsou vzájemně rovnoběžné. Sklon izokvanty tedy na volbě této hladiny nezávisí, můžeme ji tedy provést výhodně tak, aby šel úsekový tvar zjednodušit a jmenovatele zlomků, aby řádově odpovídaly volbě měřítka všech os.

Posledním krokem je pak už pouze posunutí získané izokvanty do nejzazšího bodu množiny přípustných řešení: v maximalizační úloze ve směru růstu hodnoty účelové funkce, v minimalizační úloze ve směru klesání hodnoty účelové funkce. Takto určené body jsou hledaným optimálním řešením zadané úlohy lineárního programování.

Z diskuse o všech možných tvarech množiny přípustných řešení a jejích vzájemných polohách se sklonem izokvant účelové funkce vyplývá, že může nastat jedna ze čtyř možností výsledku:

- žádné optimální řešení, je-li množina přípustných řešení triviálně prázdná,
- jediné optimální řešení, dotýká-li se optimální izokvanta množiny přípustných řešení v jediném vrcholu množiny přípustných řešení,
- nekonečně mnoho optimálních řešení (tzv. alternativní řešení), dotýká-li se optimální izokvanta množiny přípustných řešení podél celé strany, resp. stěny množiny přípustných řešení,
- úloha nemá reálné optimální řešení a hodnota účelové funkce je neomezená, pokud lze izokvantu ve směru daném typem optimalizace posunovat neomezeně daleko (množina přípustných řešení musí být v tomto případě neomezenou množinou), neboť k jakémukoli nalezenému řešení pak lze vždy nalézt řešení s ještě lepší hodnotou účelové funkce.

Pro názornost uveďme dva ilustrační příklady využívající grafické řešení. Ověření nalezeného řešení lze v těchto záměrně jednoduše volených v MS Excel pomocí Řešitele (Kubišová, 2014).

Pro dvě strukturní neznámé

Typicky se graficky řeší úlohy lineárního programování pro dvě strukturní neznámé. Uveďme první příklad.

Příklad 1

Firma PlastDrink může na své lince vyrábět dva druhy plastových nádob na pití: hrneček s oušky a kelímek s víčkem. Přitom jeden hrneček se na samoobslužné lince opracovává 4 minuty, kresba trvá zaměstnanci 5 minut a padne na něj 8 dkg tavné hmoty, zatímco jeden kelímek se na lince opracovává 4 minuty, kresba trvá zaměstnanci 6 minut a padne na něj 5 dkg tavné hmoty. Firma má aktuálně k dispozici 40 000 volných minut na samoobslužné lince, 500 pracovních hodin zaměstnanců na kreslírně a 400 kg tavné hmoty na skladě. Při prodejních cenách 40 Kč za hrneček a 20 Kč za kelímek je zaručen odbyt veškerého produkovaného množství, ovšem v tisícikusových baleních. Rozhodněte, kolik hrnečků a kolik kelímků má firma vyrábět, aby docílila maximální možné tržby.

Řešení
Nejprve sestavíme ze slovního zadání matematický model zadané úlohy. Je třeba zavést dvě strukturní proměnné: x_1 jako počet vyrobených hrnečků v tisících kusů a x_2 jako počet vyrobených kelímků v tisících kusů.

Kromě dvou podmínek nezápornosti (nelze produkovat záporná množství hrnečků ani kelímků), jsou v textu formulována další tři vlastní omezení, např. pro spotřebu tavné hmoty platí, že na všechny vyrobené hrnečky padne celkem $8x_1$ dkg a na všechny vyrobené kelímky $5x_2$ dkg hmoty, přičemž jí nemůže být spotřebováno více než uskladněných 40 000 dkg. Účelová funkce z zohledňuje prodejní cenu jednotlivých výrobků, rozhodovacím kritériem je maximální možná tržba. Vyjádříme-li i omezující množství v tisících jednotek, má potom matematický model úlohy LP tuto podobu:

$$\begin{aligned} z = 40x_1 + 20x_2 \ldots \max., \\ 4x_1 + 10x_2 &\leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Pro dvě strukturní proměnné budeme úlohu řešit planimetricky v kolmé souřadné soustavě, osa x_1 reprezentující počty hrnečků v tisících kusů je vodorovná, osa x_2 reprezentující počty kelímků v tisících kusů je svislá.

Podmínky nezápornosti vymezují první kvadrant, záporná vyrobená množství jsou nepřípustná.

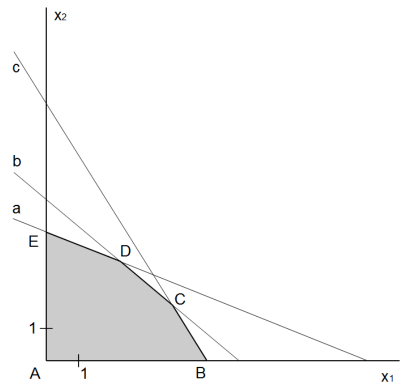
Vlastní omezení úlohy popisují tři poloroviny, nejprve nalezněme jejich hraniční přímky. Nejvýhodnějším se pro zobrazení přímky v rovině jeví určení jejího úsekového tvaru, který získáme podělením obecného tvaru rovnice absolutním členem.

$$
\begin{aligned}
a\colon \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{4} &= 1\\
b\colon \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} &= 1\\
c\colon \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{8} &= 1
\end{aligned}
$$

Jmenovatele zlomků přímo vyjadřují, v jakém bodě protíná hledaná přímka příslušnou osu. Pokud případně jeden ze zlomků chybí, přímka odpovídající osu neprotíná (je s ní tedy rovnoběžná).

Dále je třeba určit, která ze dvou polorovin je obrazem původní nerovnosti, což zjistíme dosazením libovolného bodu neležícího na hraniční přímce. Splňuje-li tento bod nerovnost, určuje hledanou polorovinu, pokud ne, určuje polorovinu opačnou.

Nyní můžeme zkonstruovat množinu přípustných řešení jako průnik prvního kvadrantu a všech tří nalezených polorovin. Situace je zachycena v obr. 1.



Obr. 1: Množina přípustných řešení ve 2D

Množina přípustných řešení je neprázdná, určitě tedy existuje také optimální řešení úlohy. Z *polygonu přípustných řešení* ABCDE jej vybereme na základě kritéria popsaného účelovou funkcí z. Položme nejprve motivační otázku například takto: Je dosažitelný zisk 80 tisíc Kč? Na tuto otázku dejme „grafickou odpověď“.

Ptáme se vlastně, může-li platit pro některá z přípustných řešení rovnost

$$z\colon 40x_1 + 20x_2 = 80.$$

Po převedení na úsekový tvar

$$z\colon \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = 1$$

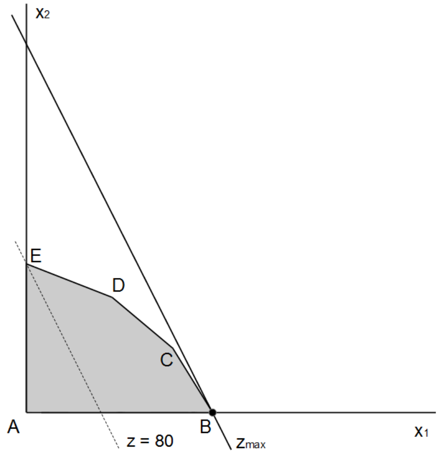
můžeme zobrazit v grafu (pouze čárkovaně) odpovídající přímku označenou $z = 80$. Tato přímka má s polygonem přípustných řešení ABCDE neprázdný průnik, zisk ve výši 80 tisíc Kč je dosažitelný, a to dokonce více způsoby.

Sestrojili jsme takzvanou izokvantu, přímku všech bodů, ve kterých je účelová funkce rovna hodnotě 80 000 Kč. Analogicky můžeme konstruovat další izokvanty pro jakékoli další zvolené hladiny zisku. Izokvanty jsou navíc vzájemně rovnoběžné (u obecné rovnice přímky přece měníme jen hodnotu pravé strany). Odtud vyplývá způsob nalezení optimálního řešení. Zobrazenou izokvantu nyní posuneme rovnoběžně co nejdále ve směru růstu hodnoty účelové funkce až k nejzazšímu bodu množiny přípustných řešení (viz obr. 2).

V našem případě to je bod B, jeho souřadnice $B[5;0]$ postačí odvodit z grafu. Obecně je vhodné získat souřadnice významných bodů výpočtem (každý bod je průsečíkem nějakých dvou přímek v grafu, stačilo by tedy řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Při průsečíku s osou tato potřeba odpadá). Maximální možnou hodnotu účelové funkce získáme dosazením těchto souřadnic do účelové funkce:

$$z_{\max} = 40 \cdot 5\,000 + 20 \cdot 0 = 200\,000\,\text{Kč}.$$

Nyní můžeme zapsat slovní odpověď: Maximálního možného zisku ve výši 200 000 Kč můžeme dosáhnout jediným možným způsobem, a to tak, že vyrobíme 5 000 hrnečků a žádné kelímky.



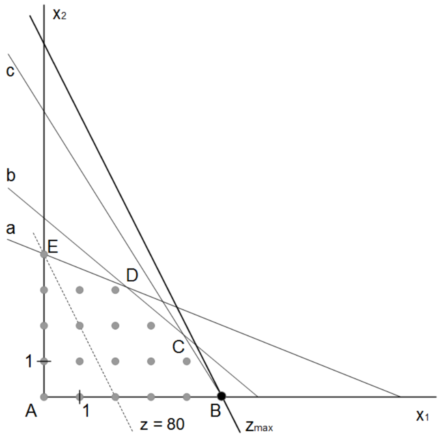
Obr. 2: Nalezení optimálního řešení ve 2D

Z obr. 2 lze případně vyčíst ještě více informací o výrobním programu: Je vidět, že další posunutí izokvanty zarazila přímka c, což poukazuje na skutečnost, že v tuto chvíli je již vyčerpána veškerá tavná hmota, zatímco čas na opracování i kresbu ještě zbývá. Na případné zlepšení hodnoty účelové funkce by mělo naskladnění další tavné hmoty, zatímco zvětšení obou časových kapacit by bylo v tuto chvíli zbytečné.

Poznámka: Pokud by byla izokvanta účelové funkce rovnoběžná s jednou z hraničních přímek množiny vlastních omezení, potom by se přímka $z_{\max}$ dotýkala polygonu přípustných řešení podél celé strany, úloha by potom měla nekonečně mnoho reálných optimálních řešení reprezentovaných úsečkou mezi odpovídajícími vrcholy tohoto polygonu. K jejich zápisu by pak bylo nutné obecné řešení založené na lineární kombinaci krajních bodů této úsečky.

Shodou okolností bylo nalezeno rovnou celočíselné řešení zadané úlohy. Sluší se přesto poznamenat, že jsme při řešení Příkladu 1 dosud zanedbávali zřejmou podmínku celočíselnosti (má smysl produkovat jen celé počty nádob).

Představme si ještě, že by výrobce produkoval pouze tisícikusová balení hrnečků a kelímků. Pokud tuto podmínku $x_{1,2} \in \mathbb{Z}$ do matematického modelu doplníme, množinu přípustných řešení bude tvořit pouze konečný počet izolovaných bodů s celočíselnými souřadnicemi z původní množiny přípustných řešení vybraných. Další postup se nezmění. V našem případě se nezmění ani výsledné řešení. Průběh hledání celočíselného řešení zadané úlohy LP je znázorněn v obr. 3.



Obr. 3: Nalezení celočíselného optimálního řešení ve 2D

Na tomto místě je třeba poznamenat, že obecně neplatí, že k nalezení celočíselného řešení stačí původně nalezené neceločíselné zaokrouhlit, či zaokrouhlit dolů. Takto nalezené body nemusí být vůbec přípustné nebo mohou mít horší hodnotu účelové funkce, než jiné celočíselné body množiny přípustných řešení. Tuto skutečnost lze případně opět demonstrovat na vhodně zvoleném příkladu.

Pro tři strukturní neznámé

Analogicky vyřešíme další úlohu lineárního programování pro tři strukturní neznámé.

Příklad 2
Firma ColorWorld vyrábí přidáváním práškových přísad tři velmi žádané odstíny barev – Blush, Terra a Inky, jejichž odbyt je předem zaručen, prodávají se postupně za 40, 60 a 80 Kč za 1 litr. V tab. 1 je vidět, kolik gramů práškových přísad je třeba při jejich míchání přisypat do jednoho litru bílé barvy.

Barevné odstíny / Práškové přísady	Blush	Terra	Inky
Yellow	2	4	10
Cyan	3	4	4
Magenta	2	8	4

Tab. 1: Míchání barev

K dispozici má firma už jen 20 g práškové přísady Yellow, 12 g práškové přísady Cyan a 16 g práškové přísady Magenta. Rozhodněte, kolik litrů které barvy má namíchat, aby dosáhla nejvyšší tržby z jejich prodeje za předpokladu, že se všechna namíchaná barva prodá.

Řešení
Nejprve sestavíme ze slovního zadání matematický model úlohy. Je třeba zavést tři strukturní proměnné: x_1 jako množství namíchané barvy Blush v litrech, x_2 jako množství namíchané barvy Terra v litrech a x_3 jako množství namíchané barvy Inky v litrech.

Kromě tří podmínek nezápornosti (nelze produkovat záporná množství barev), jsou v textu formulována další tři vlastní omezení, účelová funkce z zohledňuje prodejní cenu jednotlivých výrobků, rozhodovacím kritériem je maximální možná tržba. Matematický model úlohy LP má tuto podobu:

$$
\begin{aligned}
z = 40x_1 + 60x_2 + \; 80x_2 \ldots \text{max.},\\
2x_1 + \;\; 4x_2 + \; 10x_3 &\leq 20,\\
3x_1 + \;\; 4x_2 + \;\;\; 4x_3 &\leq 12,\\
2x_1 + \;\; 8x_2 + \;\;\; 4x_3 &\leq 16,\\
x_{1,2,3} &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Pro úlohu se třemi strukturními proměnnými budeme úlohu řešit stereometricky v kolmé pravotočivé souřadné soustavě. Pro naše účely postačí základy *kosoúhlého promítání*, osy x_2 a x_3 jsou navzájem kolmé a nezkreslené, osa x_1 s nimi svírá úhel $135°$ a dochází na ní ke zkrácení zobrazovaných vzdáleností v poměru $1 : 2$.

Podmínky nezápornosti vymezují první oktant, záporná vyrobená množství jsou nepřípustná.

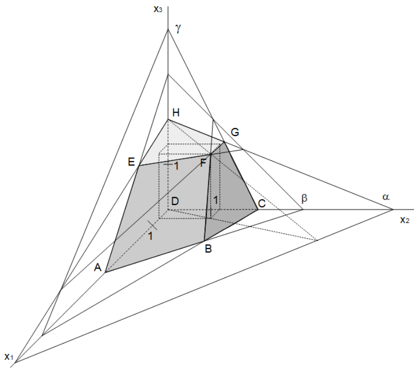
Vlastní omezení úlohy popisují tři poloprostory, nejprve nalezněme jejich hraniční roviny. Nejvýhodnějším se pro zobrazení roviny jeví určení jejího úsekového tvaru, který získáme podělením obecného tvaru rovnice absolutním členem.

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{2} &= 1\\
\beta\colon \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} &= 1\\
\gamma\colon \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} &= 1
\end{aligned}
$$

Jmenovatele zlomků přímo vyjadřují, v jakém bodě protíná hledaná rovina příslušnou osu. Pokud některý ze zlomků chybí, rovina odpovídající osu neprotíná (je s ní tedy rovnoběžná).

Dále je třeba určit, která ze dvou polorovin je obrazem původní nerovnosti, což zjistíme dosazením libovolného bodu neležícího v hraniční rovině. Splňuje-li tento bod nerovnost, určuje hledaný poloprostor, pokud není, určuje poloprostor opačný.

Nyní můžeme zkonstruovat množinu přípustných řešení jako průnik prvního oktantu a všech tří nalezených poloprostorů. Situace je zachycena v obr. 4.



Obr. 4: Množina přípustných řešení ve 3D

Množina přípustných řešení je neprázdná, určitě tedy existuje také optimální řešení úlohy. Z *polyedru přípustných řešení* ABCDEFGH jej vybereme na základě kritéria popsaného účelovou funkcí z. Položme nejprve motivační otázku například takto: Je dosažitelný zisk 240 Kč? Na tuto otázku dejme „grafickou odpověď". Ptáme se, může-li platit pro některá z přípustných řešení rovnost

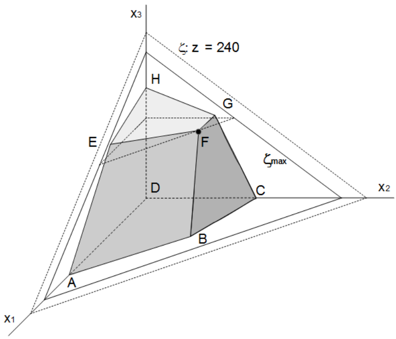
$$\zeta\colon 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 = 240.$$

Po převedení na úsekový tvar

$$\zeta\colon \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$$

můžeme zobrazit v grafu odpovídající rovinu označenou $\zeta\colon z = 240$. Zde je třeba vyřešit stereometrickou úlohu nalezení řezu polyedru přípustných řešení ABCDEFGH rovinou ζ. Ta má s množinou přípustných řešení prázdný průnik, zisku ve výši 240 Kč nelze žádným způsobem míchání barev dosáhnout.

Sestrojili jsme takzvanou izokvantu, rovinu bodů, ve kterých je účelová funkce rovna hodnotě 240 Kč. Analogicky můžeme konstruovat další izokvanty pro jakékoli další zvolené hladiny zisku. Budou vzájemně rovnoběžné (u obecné rovnice roviny měníme přece jen hodnotu pravé strany). Odtud vyplývá způsob nalezení optimálního řešení. Zobrazenou izokvantu nyní posuneme rovnoběžně co nejdále ve směru růstu hodnoty účelové funkce až k nejzazšímu bodu množiny přípustných řešení (viz obr. 5).



Obr. 5: Optimální řešení ve 3D

V našem případě to je bod F, vyznačili jsme jím procházející hlavní přímku hledané roviny $\zeta_{\max}$. Body, ve kterých vniká do nárysny a bokorysny, vedeme její stopy, které jsou rovnoběžné se stopami roviny $\zeta\colon z = 240$, nakonec doplníme také půdorysnou stopu. Tentokrát souřadnice bodu F nelze odečíst z grafu, je třeba je spočítat jako průsečík rovin α, β a γ, které se v bodě F protínají, tedy řešit soustavu tří lineárních rovnic jejich hraničních přímek o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 20,\\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 12,\\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 16. \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení, $F[0{,}57; 1{,}14; 1{,}43]$. Vycházíme z předpokladu, že lze namíchat libovolné malé množství barevných odstínů, nevzniká zde tedy požadavek celočíselnosti řešení.

Maximální možnou hodnotu účelové funkce získáme dosazením těchto množství do účelové funkce:

$$z_{\max} = 40 \cdot 0{,}57 + 60 \cdot 1{,}14 + 80 \cdot 1{,}43 = 205{,}71\,\text{Kč}.$$

Nyní můžeme zapsat slovní odpověď: Maximálního možného zisku ve výši 205,71 Kč můžeme dosáhnout jediným způsobem, a to tak, že namícháme 0,57 l barvy v odstínu Blush, 1,14 l barvy v odstínu Terra a 1,34 l barvy v odstínu Inky.

Z obrázku lze případně vyčíst ještě více informací o výrobním programu: Je vidět, že bod F leží v hraničních rovinách všech tří poloprostorů reprezentující dílčí vlastní omezení, což poukazuje na skutečnost, že v tuto chvíli jsou již vyčerpány veškeré práškové přísady všech tří druhů a zvětšení množství na skladě u jakékoli z nich by vedlo ke zlepšení hodnoty účelové funkce.

Doplňme ještě obecně, že počet řešení souvisí s tvarem množiny přípustných řešení a její vzájemnou polohou se sklonem rovin izokvant. I zde by bylo možné udělat obecnou diskusi popisující vznik všech čtyř možných variant řešení.

Závěr

Grafické řešení úlohy lineárního programování pracuje pouze s lineárními rovnicemi a nerovnicemi, jejich soustavami a hlavně jejich geometrickými obrazy, využívá metod řešení soustav lineárních rovnic a základů planimetrie a stereometrie.

Žákům střední školy by tedy nemělo činit po vysvětlení smyslu těchto úloh problém samostatně zapsat pomocí jednoduchých lineárních vztahů kompletní matematický model.

Nejprve lze motivačně nechat třídu tipovat nejlepší řešení, ověřovat přípustnost těchto vlastních tipů a u přípustných návrhů se spolužáky soutěžit v porovnávání dosažené hodnoty účelové funkce. Studenti tak lépe porozumí pojmům jako přípustné řešení, lepší hodnota účelové funkce, hledání optimální hodnoty účelové funkce.

Dále je třeba zdůraznit, že přestože nelze v rámci dosavadních znalostí nijak početně dokázat či vyvrátit, zda jde o optimum (nelze zkoušet pro všech nekonečně mnoho přípustných neceločíselných variant či velmi mnoho celočíselných variant), existuje algebraická (početní) metoda, která to umožní.

K zobrazení všech objektů matematického modelu v rovině či prostoru můžeme žákům nabídnout jednoduché převedení obecného tvaru rovnice na názorný úsekový tvar a porovnat jejich užitečnost. S využitím planimetrických, resp. stereometrických vědomostí potom mohou úlohu vyřešit. Nejprve je vhodné pracovat s úlohami se dvěma strukturními neznámými, posléze je možné přejít také k úlohám trojrozměrným. U zobrazování sklonu izokvanty se žáci musí zamyslet nad vhodnou volbou hladiny účelové funkce, prakticky si zopakují dělitelnost. Význam izokvant můžeme studentům připodobnit k významu vrstevnic v geografické mapě, které zase spojují body se stejnou nadmořskou výškou.

Žáci v průběhu řešení vnímají propojení geometrických objektů se soustavou lineárních rovnic, a tak upevní propojení lineárních rovnic a nerovnic a jejich geometrických obrazů. Objekty polorovina a poloprostor se zde využijí prakticky. V rámci geometrie je také možné a vhodné provést diskusi o způsobu vzniku všech čtyř typů optimálních řešení vzhledem ke vzájemné poloze objektů matematického modelu.

Žáci v ideálním případě obdivují, jak úlohu, kterou neumí vyřešit algebraicky, lze elegantně vyřešit graficky, ocení jednoduchou fintu s rovnoběžným posunováním přímky či roviny co nejdál to v požadovaném směru jde. V rámci deskriptivní geometrie by mohly být stejné úlohy řešeny i pomocí dalších zobrazovacích metod.

Přidanou hodnotou každé metody je, že žák vidí její jednoduchost a užitečnost v praxi.

Z výše uvedených důvodů je tento způsob řešení téměř nezbytný také pro vysokoškolské studenty ve cvičeních operačního výzkumu, přestože zde slouží pouze jako názorná paralela ilustrující průběh algebraického řešení úloh LP. Student si může znázornit postup v jednotlivých krocích simplexového algoritmu graficky a lépe si tak uvědomit význam tzv. základních řešení pro soustavu lineárních rovnic, kterým odpovídají jednotlivé průsečíky přímek, resp. rovin.

Literatura

[1] Kubišová, A. (2014). *Operační výzkum*. Jihlava: VŠPJ.

[2] Kubišová, A. (2014). Solving linear operation research optimization problems in MS Office 2010 Excel spreadsheet. *Logos Polytechnikos*, 5(3), 15–28.

Abstract

At universities focused on economy, Operation Research topics are usually included in the study plan, including solving of Linear Programming problems. A universal tool for their algebraic solution is (numerically difficult) Simplex Algorithm, for which it is necessary to know at least the fundamental of Matrix Algebra.

To illustrate this method of solving LP problems and to discuss all types of results, it seems to be very convenient to include a chapter about graphic solutions to LP problems. Moreover, this way of solution can be explained separately as well, and already at the secondary school. It only requires the knowledge of graphic representations of linear objects and their geometry.

In 2D, we can solve two-dimensional problems by planimetry methods and oblique projection, thus avoiding the usage of more complicated methods of descriptive geometry. In 3D, we can solve three-dimensional problems by stereometry methods.

Andrea Kubišová
Katedra matematiky VŠPJ
Tolstého 16
586 01 Jihlava
e-mail: kubisova@vspj.cz